This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**A propos de ce livre**

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

**Consignes d'utilisation**

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

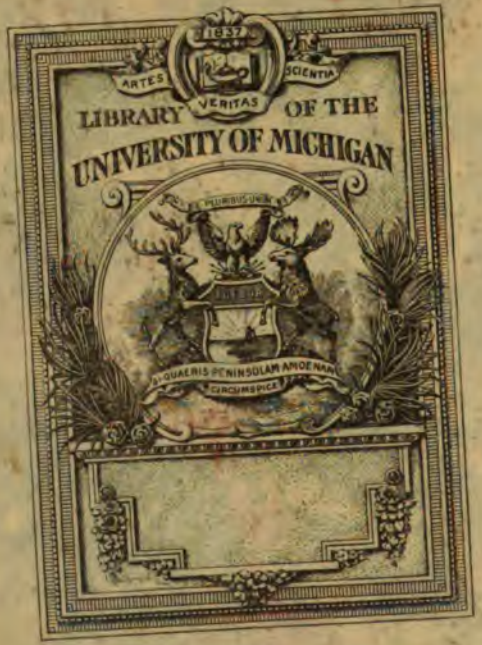
+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

**À propos du service Google Recherche de Livres**

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`


1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

NON
CIRCULATING

# OPUSCULES

## *MATHÉMATIQUES.*

TOME V.

PREMIERE PARTIE.

*On trouve chez Briaſſon les Ouvrages ci-après de Mathématique de M. d'Alembert;*

SÇAVOIR,

TRAITÉ de Dynamique, nouvelle Edition, conſidérablement augmentée, *in*-4. *fig.* 1758. La premiere Edition eſt de 1743.

— Traité de l'Equilibre & du mouvement des Fluides, pour ſervir de ſuite au *Traité de Dynamique*, *in*-4. *fig.* 1744.

— Eſſai d'une nouvelle Théorie de la réſiſtance des Fluides, *in*-4. *fig.* 1752.

Nota. *Ces trois Traités ont une très-grande liaiſon entr'eux ; cependant ils ſeront toujours ſéparés au gré de l'acheteur.*

— Réflexions ſur la cauſe générale des Vents, *in*-4. *fig.* 1747.

— Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes & ſur la nutation de l'Axe de la Terre, *in*-4. *fig.* 1749.

— Recherches ſur différens points importans du Syſtême du Monde, *in*-4. 3 vol. *fig.* 1754 & 1756.

— Opuſcules Mathématiques, ou Mémoires ſur différens ſujets de Géométrie, de Méchanique, d'Optique, d'Aſtronomie, &c. *in*-4. 5 vol. *fig.* 1761, 1764, 1767 & 1768. *Le quatriéme & le cinquiéme volume ſe vendent ſéparément.*

*Nota.* Les *Elémens de Muſique* du même Auteur, qu'on peut mettre au nombre de ſes Ouvrages Mathématiques, ſe trouvent à Paris chez *Deſaint* & *Saillant*, & à Lyon chez *Jean-Marie Bruyzet*.

# OPUSCULES

## MATHÉMATIQUES,

OU

92077

MÉMOIRES sur différens Sujets de GÉOMÉTRIE, de MÉCHANIQUE, D'OPTIQUE, D'ASTRONOMIE, &c.

*Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoiſe, des Académies Royales des Sciences de France, de Pruſſe, d'Angleterre & de Ruſſie, de l'Académie Royale des Belles-Lettres de Suede, de l'Inſtitut de Bologne, & de la Société Royale des Sciences de Turin.*

TOME V, DIVISÉ EN DEUX PARTIES.

A PARIS,

Chez BRIASSON, Libraire, rue Saint Jacques, à la Science.

M. DCC. LXVIII.

*AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.*

# AVERTISSEMENT.

CE Volume, le plus conſidérable de tous ceux que j'ai mis au jour juſqu'à préſent, eſt le cinquiéme des *Opuſcules Mathématiques*, que je publie ſucceſſivement depuis ſix à ſept années. Ces *Opuſcules* avoient été précédés de huit à neuf autres Volumes ſur les objets les plus importans de la Méchanique, de la Géométrie tranſcendante & de l'Aſtronomie phyſique. Il n'y a pas d'apparence que j'en publie par la ſuite un auſſi grand nombre; heureux ſi ce fruit d'un travail de plus de vingt-cinq ans, & le peu que je pourrai encore y joindre, peut être de quelque utilité au progrès des Sciences Phyſico-Mathématiques.

Le nouvel Ouvrage que je préſente aux Savans, roule principalement ſur deux objets; ſur la Théorie des Fluides, & ſur le mouvement des Corps céleſtes dans le ſyſtême de la gravitation. Il renferme auſſi quelques autres matieres dont je dirai un mot dans un moment; mais je m'arrêterai d'abord à ces deux principaux articles.

Dans le premier Mémoire de ce Volume,

je confirme par de nouvelles preuves ce que j'avois déja démontré ailleurs, qu'il n'eſt pas vrai, comme l'ont cru de ſavans Géometres, que dans un fluide hétérogène & en équilibre, les couches de différente denſité doivent toujours être de niveau ; mais je fais voir en même-temps, d'après une obſervation dont je ſuis redevable au célébre M. de la Grange, les reſtrictions qu'on doit apporter à ce que j'avois avancé moi-même à ce ſujet. Je prouve encore, que la loi de l'équilibre des fluides, donnée & adoptée juſqu'ici pour générale, ne l'eſt pas à pluſieurs égards, & qu'elle a beſoin d'être modifiée ; remarque qui me donne occaſion d'en faire quelques autres, propres à jetter un nouveau jour ſur les principes de l'Hydroſtatique. Ces réflexions ſont terminées par de nouvelles recherches ſur la figure de la terre, dans leſquelles je démontre, entr'autres choſes, qu'un fluide homogène ne peut être en équilibre, s'il n'eſt de figure ſphérique ou elliptique.

Le Mémoire ſuivant a pour objet de confirmer auſſi par de nouvelles preuves, ce que j'avois avancé dans le IV^e^ Mémoire du premier Volume de mes *Opuſcules*, ſur l'impoſſibilité de réduire au calcul, dans un très-grand nombre

de cas, les loix du mouvement des fluides. Je donne en même-temps des méthodes pour trouver les cas où ce mouvement peut être calculé analytiquement, & j'y joins des éclairciſſemens utiles ſur les équations fondamentales de l'Hydrodynamique, que j'ai données ailleurs.

J'examine, dans le troiſiéme Mémoire, les loix du mouvement des fluides dans les tuyaux; on y trouvera le dénouement de quelques paradoxes, qui dans cette matiere, ont paru arrêter d'habiles Géometres; je montre auſſi le peu d'exactitude de certaines ſuppoſitions qu'on croiroit pouvoir ſe permettre pour déterminer le mouvement dont il s'agit; je fais quelques réflexions ſur la méthode de trouver les cas où le fluide ſe diviſe en coulant; & je termine ces obſervations par des recherches analytiques ſur la figure de la veine que le fluide forme en ſortant du tuyau.

Le quatriéme Mémoire eſt entiérement deſtiné à l'examen des équations qui repréſentent, d'après ma Théorie, le mouvement des Fluides. Je cherche les cas où ces équations peuvent avoir lieu; je donne les moyens de les faire quadrer (lorſque la choſe eſt poſſible) avec l'équation qui exprime la figure du vaſe; & j'entre à ce

ſujet dans pluſieurs détails analytiques, que les Géometres ne trouveront peut-être pas indignes de leur attention.

Dans le cinquiéme Mémoire, j'expoſe un ſingulier paradoxe, que j'invite les Mathématiciens à examiner, & duquel il réſulte, qu'en ſuppoſant à un corps ſolide une certaine figure, ce corps ſemble ne devoir éprouver aucune réſiſtance de la part d'un fluide où il ſera mu, dans les ſuppoſitions même qui paroiſſent les plus légitimes & les moins précaires, ſur la maniere dont le fluide agit; je prouve dans un autre article du même Mémoire, l'inſuffiſance des équations analytiques pour déterminer la vîteſſe du ſon; & je fais de nouvelles remarques ſur le ſolide de la moindre réſiſtance, ſur la poſition la plus avantageuſe des aîles des moulins à vent, & ſur la réfraction des corps ſolides; trois ſujets que j'avois déja traités en 1744 dans mon Ouvrage ſur *l'Equilibre & le mouvement des Fluides.*

Les recherches ſur différens points du ſyſtême de la gravitation, & principalement ſur le problême des trois corps, ſont la principale matiere de la ſeconde Partie de ce Volume. Dans le premier Mémoire de cette ſeconde Partie, je

je développe une obſervation importante que je n'avois fait qu'indiquer dans le troiſiéme Volume des Mémoires de Turin, ſur la maniere d'intégrer les équations du problême de la Préceſſion des Equinoxes, & ſur les attentions, juſqu'ici négligées, qu'il eſt néceſſaire d'apporter à cette intégration, pour être aſſuré d'avoir une ſolution exacte. J'examine une explication ſpécieuſe, mais peu ſolide, qu'il ſemble qu'on pourroit donner de la diminution annuelle de l'obliquité de l'écliptique ; j'explique comment on peut, au moyen d'une ou de pluſieurs forces initiales imprimées à la terre, expliquer tous les mouvemens dont ſon axe & ſa maſſe ſont ſuſceptibles; enfin, je diſcute les ſolutions que d'habiles Géometres ont données du problême de la Préceſſion des Equinoxes, & je montre la ſource des mépriſes où ils ſont tombés à ce ſujet.

Les quatre Mémoires ſuivans renferment des réfléxions importantes ſur la ſolution du problême des trois Corps. Je détermine la forme la plus ſimple qu'on puiſſe donner à l'équation différentielle de l'orbite lunaire ; je cherche la maniere la plus commode & la plus courte de l'intégrer ; je démontre à cette occaſion, ſi je

ne me trompe, que M. Clairaut, dans ſa Théorie de la Lune, n'a pas fait aſſez d'attention à la double courbure de l'orbite de cette planete; mépriſe qui auroit occaſionné de grandes erreurs dans ſon réſultat, ſi elle n'avoit été compenſée par une autre mépriſe oppoſée, qui détruit à peu près l'effet de la premiere. Cette controverſe eſt la ſuite de celle qui avoit commencé entre nous, du vivant de ce célébre Mathématicien, au ſujet de ſa Théorie de la Lune & de la mienne. J'aurois bien déſiré pouvoir ſoumettre ces nouvelles réfléxions au jugement de celui qui en eſt l'objet, & dont je regarde la mort comme une perte pour la Géométrie; mais j'ai cru que cette triſte circonſtance ne devoit pas m'engager à ſupprimer mes remarques; d'abord, parce qu'elles me paroiſſent encore plus importantes que d'autres difficultés que j'avois propoſées à feu M. Clairaut ſur ſa Théorie, & qu'il a, ce me ſemble, eſſayé vainement de réſoudre (*a*); en ſecond lieu, parce que cette même Théorie a été pluſieurs fois miſe en œuvre par de jeunes Mathématiciens, qui peut-être ne l'ont pas ſuffiſamment étudiée; enfin, parce qu'au défaut de l'Au-

(*a*) Voy. les Journaux Encyclopédiques de Fév. & d'Août 1762.

teur même, il n'eſt aucun Géometre, verſé dans la matiere, qui ne puiſſe me relever à ce ſujet, ſi je me ſuis trompé. Je fais enſuite pluſieurs obſervations nouvelles & intéreſſantes ſur l'équation du mouvement de l'apogée, & ſur la maniere de la réſoudre ; & je montre combien les méthodes d'approximation ſont encore imparfaites, tant ſur cet objet, que ſur d'autres points eſſentiels du problême des trois Corps, & en particulier de la Théorie de la Lune. J'indique le moyen de perfectionner, par deux ou trois corrections légeres, mais eſſentielles, les tables de M. Mayer, déja ſi recommandables par leur commodité & leur exactitude reconnue. J'examine enfin, comment & dans quel cas la gravitation peut produire une altération apparente dans le mouvement moyen des planetes.

Ce dernier objet me conduit à chercher l'effet de la réſiſtance légere que les planetes doivent éprouver dans le fluide très-rare où l'on peut ſuppoſer qu'elles nagent. Je donne une formule très-ſimple, & plus exacte que celles qu'on connoiſſoit, pour comparer l'effet de la réſiſtance des cometes à celle des planetes ; je fais voir comment on peut expliquer, par la

réſiſtance de l'éther, l'équation ſéculaire du mouvement moyen de la lune, & je montre en même-temps que cette réſiſtance ne peut avoir d'effet ſenſible ſur le mouvement des nœuds & l'inclinaiſon de cette planete.

Dans le Mémoire ſuivant, je traite du mouvement des apſides, lorſque la force centrale n'eſt pas exactement en raiſon inverſe du quarré de la diſtance ; j'expoſe les différens moyens analytiques de trouver ce mouvement ; & cette recherche donne encore lieu à de nouvelles remarques ſur l'imperfection des méthodes d'approximation connues, pour réſoudre ces ſortes de queſtions. Je détermine enſuite le mouvement des nœuds d'un ſatellite, dans le cas où le plan de ſon orbite feroit un angle conſidérable avec le plan de l'orbite de la planete principale : & je termine ces recherches par quelques réflexions ſur le calcul des perturbations des cometes.

Le dernier des Mémoires que ce Volume renferme ſur l'Aſtronomie Phyſique, a pour ſujet les loix de la réfraction dans l'hypothèſe Newtonienne ; j'y démontre, principalement ſur le rapport des ſinus, différens paradoxes remarquables qui réſultent de cette hypothèſe,

& dont je m'étois contenté d'indiquer quelques-uns dans le dernier Mémoire du troiſiéme Volume de mes *Opuſcules*.

Tels ſont les principaux objets qui occupent la plus grande partie de cet Ouvrage. On y trouvera cependant encore des recherches ſur quelques autres matieres ; ſur les ſeries infinies, les conditions qui les rendent plus ou moins convergentes, & la maniere d'en trouver la ſomme par approximation en pluſieurs cas ; ſur la maniere de réduire les quantités imaginaires à leur forme la plus ſimple, & à cette occaſion ſur le cas irréductible du troiſiéme degré, dont je prouve, contre l'opinion commune, que les trois racines ſont réellement renfermées dans la formule connue ; ſur les loix du mouvement des reſſorts dans un centre d'équilibre *oiſif* ou *forcé* ; ſur quelques différentielles qui ſe rapportent à des arcs de ſections coniques, & ſur le moyen de faire diſparoître de leurs intégrales finies les quantités infinies qu'elles paroiſſent quelquefois renfermer ; ſur la maniere de trouver certaines fonctions par des conditions données ; ſur la réfraction & la route de la lumiere dans l'œil ; ſur le mouvement d'un corps peſant qui pirouette ſur un

plan horizontal, & ſur quelques autres ſujets qu'on peut voir dans l'Ouvrage même.

Je me ſuis contenté d'expoſer ſommairement dans cette Préface les différentes queſtions que j'ai tâché de traiter dans ce Volume ; j'invite les Géometres à les approfondir de leur côté, à m'indiquer les mépriſes où je puis être tombé dans ces matieres difficiles, à perfectionner ſurtout les méthodes analytiques qui reſtent imparfaites dans la ſolution du problême des trois Corps, & qui, après le travail de tant de Mathématiciens, laiſſent encore un vaſte champ à la ſagacité de leurs Succeſſeurs.

# TABLE
# DES TITRES
Contenus dans ce cinquiéme Volume.

*AVERTISSEMENT.* page v

## *PREMIERE PARTIE,*
*Contenant principalement de nouvelles Recherches ſur la Théorie des Fluides.*

### TRENTIÉME MÉMOIRE.

*Sur l'Equilibre des Fluides.* page 1

### TRENTE-UNIÉME MÉMOIRE.

*Nouvelles réfléxions ſur les Loix du mouvement des Fluides.* 41

### TRENTE-DEUXIÉME MÉMOIRE.
*Suite des mêmes Recherches.*

§. I. *Sur le mouvement d'un Fluide dans un Tuyau Cylindrique.* 68

§. II. *Sur le mouvement d'un Fluide dans un Tuyau quelconque.* 76
§. III. *Des endroits où un Fluide qui coule doit se diviser.* 85
§. IV. *Sur la contraction & la figure de la veine de Fluide.* 88

## TRENTE-TROISIÉME MÉMOIRE.

*Sur l'équation qui exprime la loi du mouvement des Fluides.*

§. I. *Recherches analytiques sur cette équation.* 95
§. II. *Suite des Recherches analytiques sur le mouvement des Fluides.* 101
§. III. *Suite des mêmes Recherches.* 105
§. IV. *Suite des mêmes Recherches.* 111
§. V. *Suite des mêmes Recherches.* 114
§. VI. *Suite & conclusion des Recherches analytiques sur le mouvement des Fluides.* 117

## TRENTE-QUATRIÉME MÉMOIRE.

*Suite des Recherches sur le mouvement des Fluides.*

§. I. *Paradoxe proposé aux Géometres sur la Réſiſtance des Fluides.* 132
§. II. *Sur la Viteſſe du Son.* 138
§. III. *Sur le ſolide de la moindre réſiſtance.* 146
§. IV. *Sur la poſition des Ailes des Moulins à Vent.* 148
§. V. *Sur la réfraction des Corps ſolides.* 161

## TRENTE-CINQUIÉME MÉMOIRE.

*Réfléxions ſur les Suites & ſur les Racines imaginaires.*

§ I. *Réfléxions ſur les ſuites divergentes ou convergentes.* 171
§. II. *Sur l'expreſſion de certaines quantités imaginaires, & à cette occaſion ſur les racines des équations du troiſiéme degré dans le cas irréductible.* 183

## TRENTE-SIXIÉME MÉMOIRE,

*Contenant quelques Ecrits ſur différens Sujets.*

§. I. *Sur la loi de la compreſſion des Reſſorts.* 216
§. II. *Sur un problême concernant les ſinus.* 222
§. III. *Sur les Tables de mortalité.* 228
§. IV. *Sur quelques différentielles réductibles à des arcs de ſections coniques.* 231

# SECONDE PARTIE,

*Contenant principalement de nouvelles Recherches ſur différens points importans d'Aſtronomie Phyſique.*

## TRENTE-SEPTIÉME MÉMOIRE.

*Remarques ſur une difficulté ſinguliere qui ſe rencontre*

*dans la ſolution du problême de la préceſſion des équinoxes ; avec quelques autres réflexions ſur ce problême.* 251

*Avertiſſement ſur les trois Mémoires ſuivans, qui ont pour objet le problême des trois corps, & en particulier la théorie de la lune.* 294

## TRENTE-HUITIÉME MÉMOIRE.

*De la forme la plus avantageuſe qu'on puiſſe donner à l'équation différentielle de l'orbite lunaire.* 295

## TRENTE-NEUVIÉME MÉMOIRE.

*De l'intégration de l'équation de l'orbite lunaire, (& en général du problême des trois Corps) & des difficultés qui s'y rencontrent.*

§. I. *De la meilleure méthode d'intégrer cette équation.* 328

§. II. *Des imperfections qui ſe trouvent encore dans les méthodes connues pour intégrer l'équation de l'orbite lunaire, & principalement des difficultés que renferme la recherche du mouvement de l'apogée.* 333

## QUARANTIÉME MÉMOIRE.

*Examen de quelques autres points importans de la Théorie de la Lune.*

§. I. *Des difficultés que renferme la recherche de certaines équations du lieu de la lune.* 358

§. II. *Sur quelques corrections qu'on propoſe de faire aux tables de la lune de M. Mayer.* 365
§. III. *Sur le calcul de la latitude de la lune.* 372
§. IV. *Sur l'altération du mouvement moyen des planetes, & ſur celui de la lune en particulier.* 377

## QUARANTE-UNIÉME MÉMOIRE.

*De la réſiſtance que les Planetes & les Cometes peuvent éprouver dans leur mouvement.*

§. I. *De la réſiſtance qu'éprouvent les Planetes premieres & les Cometes.* 391
§. II. *De la réſiſtance qu'éprouvent les planetes ſecondaires & principalement la lune.* 402
*Concluſion des Mémoires précédens ſur la Théorie de la Lune & le Problême des trois Corps.* 422

## QUARANTE-DEUXIÉME MÉMOIRE,

*Contenant différens écrits ſur quelques ſujets d'Aſtronomie phyſique.*

§. I. *Du mouvement des apſides quand la force centrale n'eſt pas exactement en raiſon inverſe du quarré de la diſtance.* 425
§. II. *Sur le mouvement des nœuds des Satellites.* 440
§. III. *Sur l'altération du mouvement des Cometes dans le ſyſtême de la gravitation.* 444

## QUARANTE-TROISIÉME MÉMOIRE.

*Des loix de la réfraction de la lumiere à des ſurfaces très-courbes, dans l'hypothèſe de l'attraction Newtonienne.* 452

## QUARANTE-QUATRIÉME MÉMOIRE,

*Contenant pluſieurs écrits ſur différens ſujets.*

§. I. *Qui contient quelques problêmes ſur les fonctions.* 473
§. II. *Sur différentes remarques d'Optique.* 479
§. III. *Sur le mouvement des Corps qui tournent.* 489
§. IV. *Sur le mouvement des reſſorts; addition pour le XXXVI^e Mémoire*, § I, art. 8, p. 222 de ce Vol. 503
§. V. *Sur des problêmes de calcul intégral; addition pour le XXVI^e Mémoire*, Tome IV des *Opuſcules.* 504
§. VI. *Sur les calculs relatifs à l'inoculation; addition au Vingt-ſeptiéme Mémoire.* 508
§. VII. *Sur la maniere d'exprimer certaines fonctions; addition au XXVIII^e Mémoire*, Tom. IV, p. 345. 511
§. VIII. *Sur un problême aſtronomique; addition au §. IV du XXVII^e Mémoire*, art. 2; Tome IV des *Opuſcules*, pag. 358. 512
§. IX. *Sur la libration de la Lune.* 515

Fin de la Table.

# OPUSCULES
## *MATHÉMATIQUES.*

### PREMIERE PARTIE,

*Contenant principalement de nouvelles Recherches ſur la Théorie des Fluides.*

## TRENTIÉME MÉMOIRE.

*Sur l'équilibre des Fluides.*

CE Mémoire & les quatre qui ſuivent, ſerviront de Supplément, non-ſeulement aux Recherches contenues dans mon *Traité des Fluides*, mais encore à celles qui ſont expoſées dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, imprimé en 1752, & dans le premier volume de mes

Opuſcules Mathématiques, troiſiéme & quatriéme Mémoires.

1. J'ai démontré le premier dans mes *Recherches ſur la cauſe des Vents*, art. 86, & enſuite dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, (art. 167) qu'un fluide hétérogène pouvoit être en équilibre, ſans que ſes différentes couches (où l'on ſuppoſe que la denſité ſoit la même) fuſſent de niveau. Un très-habile Géometre avoit penſé le contraire; mais la preuve qu'il en a donnée, ne peut tout au plus être bonne que dans le cas où les couches immédiatement contigues different ſenſiblement de denſité, & où les forces qui les animent ne different outre cela qu'infiniment peu, ſoit dans leur quantité, ſoit dans leur direction (*a*). M. de la Grange, dans le ſecond volume des Mémoires de Turin, a confirmé, par une ſavante théorie qui lui eſt propre, ce que j'avois avancé contre la néceſſité du niveau des couches. Mais ce grand Mathématicien remarque avec raiſon que j'ai étendu trop loin mon principe, quand j'ai prétendu que dans un fluide, dont les parties s'attirent mutuellement, il n'étoit pas néceſſaire que les couches de même denſité fuſſent de niveau.

2. M. de la Grange prouve le contraire dans le ſecond tome des Mémoires de Turin, pour un raiſonnement qui me paroît ſans réplique; ſes objections ſur ce ſujet m'ayant fait revenir ſur mes calculs, je ſuis ar-

(*a*) Voyez la *Théorie de la Figure de la Terre*, par M. Clairaut, pag. 129 & 130.

rivé au même réſultat que lui par le raiſonnement ſuivant.

3. Je prends les deux équations de la page 210 de mon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*; je différencie la premiere (c'eſt-à-dire, $\frac{2c\varrho\int R r dr}{rr} - \frac{2c\int R d(r^5\varrho)}{5r^4} - \frac{2crF}{5} + \frac{2cr\int R d\varrho}{5} - cr\mathcal{A}\varphi = 2Kc$) après l'avoir d'abord multipliée par $\frac{r^4}{2c}$; puis je diviſe la différentielle par $dr$, & j'ai l'équation

$$\left(\frac{r^2 d\varrho + 2\varrho r dr}{dr}\right)\int R r dr - Fr^4 - \frac{5}{2}\mathcal{A}\varphi r^4 + \int R r^4 d\varrho = \frac{r^4 dK}{dr} + 4Kr^3;$$

En ſubſtituant pour $-F - \frac{5}{2}\mathcal{A}\varphi + \int R d\varrho$ ſa valeur $\frac{5K}{r} + \frac{\int R d(r^5\varrho)}{r^5} + \frac{5\varrho\int R r dr}{r^3}$, & réduiſant, j'aurai (en multipliant par $r$) l'équation finale

$$\frac{r^3 d\varrho\int R r dr}{dr} - 3\varrho r^2\int R r dr + \int R d(r^5\varrho) = \frac{r^5 dK}{dr} - Kr^4.$$

Maintenant la ſeconde équation $2\zeta d\zeta d(rRK)\times 2c = 2\zeta d\zeta dr\left[\frac{d(r\varrho)}{dr}\times\frac{2cR\int R r dr}{r^2} - \frac{8cR\varrho\int R r dr}{r^2} + \frac{2cR\int R d(r^5\varrho)}{r^4} + 4cRK\right]$ (même pag. 210 de l'*Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*) donne, après avoir multiplié par $\frac{r^4}{2cR.2\zeta d\zeta}$,

$\frac{r^3 d\varrho \int R r dr}{dr} - 3\varrho r^2 \int R r dr + \int R d(r^5 \varrho) = \frac{r^5 dK}{dr} - K r^4 + \frac{K r^5 dR}{R dr}$.

5. Comparant ces deux équations, il viendra $\frac{K r^5 dR}{R dr} = 0$ ; donc $K = 0$. Donc la force horizontale eſt nulle, & les couches de denſité uniforme ſont de niveau.

6. Nous avions trouvé à la page 210 du même livre, par la comparaiſon des deux équations, l'équation finale $\frac{r^2 K dR}{R} = M dr$, qui ne donne pas néceſſairement $K = 0$ ; mais ſi nous en fuſſions reſtés aux différences premieres, & que nous n'euſſions pas différencié deux fois ſans néceſſité, nous aurions trouvé comme ci-deſſus $\frac{r^5 K dR}{R dr} = 0$, & par conſéquent $K = 0$. Ce n'eſt donc aucune faute de raiſonnement, mais ſimplement une inadvertance de calcul qui nous a induit en erreur à ce ſujet. Quoi qu'il en ſoit, notre aſſertion générale ſubſiſte toujours ; ſçavoir, qu'il n'eſt point néceſſaire que les couches de même denſité ſoient de niveau, ſi ce n'eſt dans quelques loix particulieres d'équilibre ; ce que nous verrons encore ci-deſſous, d'une maniere plus générale.

7. D'après ces remarques, on peut ſimplifier les équations qui ſe trouvent, page 229 & ſuivantes de la troiſiéme partie de nos *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*. Il ſuffira pour cela de faire dans ces équations $K = 0$,

& $M = 0$. On aura donc, en conſervant les mêmes noms que dans l'endroit cité,

$$ddD + dD \times \left(\frac{2r^2\Delta dr}{\int \Delta r r dr}\right) + D \times \left(-\frac{12dr^2}{r^2} + \frac{2\Delta r dr^2}{\int \Delta r r dr}\right) = 0;$$

$$ddC = Cdr^2\left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right) - \frac{2Rrrdrdc}{\int Rrrdr};$$

& enfin $d\left[\frac{-B}{rr}\int \Delta r r dr + \frac{\int \Delta (r^4 B)}{3r^3} + \frac{\int \Delta d(r^4 D)}{5r^3} + \frac{\beta - \int \Delta d(rB)}{3} + \frac{\vartheta - \int \Delta d(rD)}{5}\right] = d\left[\frac{6\int \Delta d(r^6 D)}{5.7r^5} - \frac{3D\int \Delta r r dr}{5r^2}\right]$ en mettant pour $\frac{3r^2}{7}\left[\epsilon - \int \Delta d\left(\frac{D}{r}\right)\right]$ ſa valeur $\frac{3D\int \Delta r r dr}{r^2} - \frac{3\int \Delta d(r^6 D)}{7r^5}$; équation d'où il eſt aiſé de tirer la valeur de $B$, dès que celle de $D$ ſera connue par l'intégration de la premiere équation.

8. Au reſte, il eſt évident, par l'équation $\frac{Kr^5 dR}{Rdr} = 0$, que ſi $dR = 0$, c'eſt-à-dire, ſi le fluide eſt homogene, alors $K$ ne ſera point néceſſairement $= 0$, mais pourra être tout ce qu'on voudra; & pour lors, ſuivant le calcul fait à la page 210 de notre *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, on aura $dd\rho - \rho dr^2 \times \left(\frac{6}{rr} - \frac{2Rr}{\int Rrrdr}\right) + \frac{2Rrrdrd\varrho}{\int Rrrdr} = \frac{r^2}{\int Rrrdr} \times d\left[\frac{d(Kr^4)}{r^4}\right]$; c'eſt-à-dire, égale à une fonction différentielle quelconque de $r$; & par conſéquent $\rho$ ſera tout ce qu'on voudra; ce qui eſt

d'ailleurs évident, puiſque le fluide étant homogène, les couches de même denſité peuvent être ſuppoſés avoir une courbure quelconque & à volonté, l'équilibre ſubſiſtant toujours.

9. J'ai donné, dans l'art. 167 de mon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, les équations néceſſaires pour déterminer la courbure des couches où la denſité eſt ſuppoſée la même, la loi de peſanteur étant donnée. Pour rendre ces équations en même-temps plus générales & plus ſimples, au lieu de prendre la force ſuivant $PC = p' + \alpha p'' Z'$ (*Fig.* 1) comme nous l'avons fait dans l'endroit cité, c'eſt-à-dire, égale à une fonction de $CA = r$, & de $z$, il faut la ſuppoſer égale à une fonction de $CP$ & de $z$; c'eſt-à-dire, de $r + \alpha p Z$ & de $z$; on prendra donc (ſelon les noms donnés dans l'art. 167 de l'Ouvrage cité) la force ſuivant $PC = p' + \frac{dp'}{dr} \times \alpha p Z + \alpha p'' Z'$; & on aura l'équation finale

$$\frac{dZ}{dz} d(\delta p p') - Z'' d(\delta r p''') = \delta p'' dr \cdot \frac{dZ'}{dz} + \delta p dp' \times \frac{dZ}{dz} + \delta p' dp \cdot \frac{dZ}{dz}.$$

Cette équation ſe réduit à

$$\frac{dZ}{dz} p p' d\delta - Z'' d(\delta p''' r) = \delta p'' dr \frac{dZ'}{dz}.$$

10. Si cette équation a lieu quand $\delta$ eſt uniforme, c'eſt-à-dire, quand $d\delta = 0$, alors en ſuppoſant $\delta$ variable à volonté, les couches de même denſité ſeront de niveau. En effet, on aura, par la premiere condition, $Z'' \delta \times$

$d(\rho'''r) + \delta\rho''\frac{dr\,dZ'}{dz} = 0$; & par la seconde $\rho\rho'\frac{dZ}{dz} - r\rho'''Z'' = 0$, ce qui donne (art. 167 de l'Ouvrage cité) la force horizontale $= 0$, & par conséquent les couches de niveau.

11. C'est ce que M. de la Grange a déja remarqué, & ce qu'on peut aussi démontrer d'une autre maniere en cette sorte. Soit $Pp\pi\varpi$ (*Fig.* 2) un canal infiniment petit en équilibre; $\delta$ la densité dans la couche $\pi\varpi$, ainsi que dans les colonnes $P\varpi$, & $p\pi$; $\varphi$ la force suivant $P\varpi$; & $\psi$ la force suivant $\varpi\pi$; enfin, $\delta + d\delta$ la densité en $Pp$; on aura

$\delta\varphi . P\varpi + \delta\psi . \varpi\pi = (\delta + d\delta)(\psi + d\psi) Pp + \delta \times (\varphi + d\varphi) p\pi$.

Or, rendant le fluide homogène & de la densité $n\delta$, & supposant l'équilibre dans le canal $Pp\pi\varpi$, on aura $n\delta\varphi . P\varpi + n\delta\psi . \varpi\pi = n\delta(\psi + d\psi) Pp + n\delta(\varphi + d\varphi) p\pi$; donc multipliant la premiere équation par $n$, & comparant ensuite les deux équations, on aura $\psi d\delta = 0$; & $\psi = 0$; donc, &c.

12. Au reste, d'après notre formule générale de l'article 9, on voit évidemment que les couches de même densité ne sont pas toujours de niveau dans les différentes hypothèses de pesanteur qu'on peut faire; en effet, le niveau des couches n'aura lieu que quand on aura $\rho\rho'\frac{dZ}{dz} - \rho''rZ'' = 0$, d'où résulte (art. 9) $\delta Z''d(\rho''r) + \delta\rho''\frac{dr\,dZ'}{dz} = 0$, c'est-à-dire, $\frac{dZ'}{Z''dz} = -\frac{\rho''dr}{d(\rho''r)}$.

Or comme $z$ & $r$ ſont variables & indépendans l'un de l'autre, les deux membres de cette équation ne peuvent être égaux, à moins qu'ils ne ſoient chacun égaux à une conſtante $A$; donc $dZ'$ doit être $= AZ''dz$, & $d(\rho'''r) = -\frac{\varsigma''dr}{A}$.

13. Soit en général $CP = r + \alpha N$, (*Fig.* 1); la force ſuivant $PC = K + \frac{dK}{dr} \times \alpha N, + \alpha\Delta$ (*a*); la force perpendiculaire à $CP = \alpha M$; $\Delta, N, M$ étant des fonctions de $r$ & de $z$, & $K$ une fonction de $r$; on aura la force ſuivant $P'P = \frac{\alpha K dN}{r dz} - M\alpha$, & la force ſuivant $pP = (K + \frac{\alpha N dK}{dr} + \alpha\Delta) \times (dr + \frac{\alpha dN}{dr} dr$; donc, en regardant $\alpha$ comme très-petite, & négligeant en conſéquence le quarré de $\alpha$, on aura $\frac{d(\delta K \frac{dN}{dz} - \delta Mr)}{dr} = \frac{d(\Delta\delta)}{dz} + \frac{d(\delta N \frac{dK}{dr})}{dz} + \frac{d(K\delta \frac{dN}{dr})}{dz} = \frac{d[\Delta\delta + \delta d \frac{(KN)}{dr}]}{dz}$.

14. Donc faiſant $dK = R\,dr$, $dN = A\,dr + B\,dz$, $dM = C\,dr + D\,dz$, $d\Delta = E\,dr + F\,dz$, $d\delta = R'\,dr$, on aura $R'(KB - Mr) + \delta\left(\frac{K\,dB}{dr} + BR - M - Cr\right) = \delta\left(RB + F + \frac{K\,dA}{dz}\right)$, qui ſe réduit (à cauſe de $\frac{dB}{dr} = \frac{dA}{dz}$) à $R'(KB - Mr) = \delta(F + M + Cr)$;

(*a*) Je ſuppoſe qu'on ait ici ſous les yeux l'endroit cité de l'*Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, art. 167.

ou

ou $\frac{d\delta}{dr}\left(\frac{KdN}{d\zeta}-Mr\right)=\delta\left(\frac{d\Delta}{d\zeta}+M+\frac{rdM}{dr}\right)$ ; ou enfin $\frac{d\delta}{dr}\times\frac{KdN}{d\zeta}-\frac{d(Mr\delta)}{dr}=\frac{\delta d\Delta}{d\zeta}$. C'eſt la forme la plus ſimple, & en même-temps la plus générale ſous laquelle on puiſſe préſenter l'équation néceſſaire pour l'équilibre des couches.

15. Si dans cette équation on a la force horizontale $\frac{\alpha KdN}{rd\zeta}-M\alpha=0$, ou $\frac{KdN}{d\zeta}=Mr$, on aura $-\frac{\delta d(Mr)}{dr}=\frac{\delta d\Delta}{d\zeta}$, ou $-M-\frac{rdM}{dr}=\frac{d\Delta}{d\zeta}$ ; & réciproquement, ſi cette derniere équation a lieu, les couches d'une même denſité ſeront de niveau. De plus il eſt à remarquer, que comme $r$ & $\zeta$ ſont variables & indépendans l'un de l'autre, les équations $\frac{dN}{Md\zeta}=\frac{r}{K}$ & $-M-\frac{rdM}{dr}=\frac{d\Delta}{d\zeta}$ doivent être identiques & indépendantes des valeurs de $r$ & de $\zeta$.

16. Donc $M=\frac{BK}{r}$, & $\frac{dM}{d\zeta}=\frac{K}{r}\times\frac{dB}{d\zeta}$ ; donc $\frac{R}{r}\left(-B-\frac{dB}{d\zeta}\right)=\frac{d\Delta}{d\zeta}$ ; donc $\Delta=-\frac{R}{r}(\int Bd\zeta+B)+\varphi r$ ; donc prenant pour $N$ une fonction quelconque de $r$ & de $\zeta$ telle que $dN=Adr+Bd\zeta$, on aura par les formules précédentes les valeurs qu'il faut donner à $M$ & à $\Delta$ pour que les couches ſoient de niveau.

17. L'équation de l'art. 14, quoique très-générale, peut

cependant le devenir encore davantage, en supposant que les couches $APP'$, $\varpi pp'$, qu'on avoit prises chacune en particulier de densité uniforme, varient en densité dans toute leur étendue, ensorte que $d\delta$ au lieu d'être simplement $R'dr$, soit $R'dr + D'dz$; en ce cas, il faudra, dans l'art. 14, ajouter au second membre $\delta(RB + F + \frac{KdA}{dz})$ la quantité $D'(NR + \Delta + KA)$, ce qui donne $\frac{d\delta}{dr} \times \frac{KdN}{dz} - \frac{d(Mr\delta)}{dr} = \frac{\delta d\Delta}{dz} + \frac{d\delta}{dz}\left(\frac{NdK}{dr} + \Delta + \frac{KdN}{dr}\right) = \frac{\delta d\Delta}{dz} + \frac{d\delta}{dz}\left[\Delta + \frac{d(KN)}{dr}\right] = \frac{d(\Delta\delta)}{dz} + \frac{d\delta}{dz} \times \frac{d(KN)}{dr}$; & il faut observer que dans cette équation, ainsi que dans les précédentes, les deux membres doivent toujours être identiques, parce que l'équation doit être vraie pour quelque valeur que ce soit de $r$ & de $z$.

18. Il ne faut pas non plus oublier de remarquer, que quand le fluide est ainsi composé de couches, d'égale ou de différente densité, il faut que $\int \pi dz = 0$ dans une couche de même densité prise toute entiere, $\pi$ étant la force qui agit dans la direction de la couche même, & $dz$ l'élément de la couche : d'où l'on voit que $\pi$ doit être tel qu'en faisant $z = 360^a$ on ait $\int \pi dz = 0$, & en général $\int \pi \delta dz = 0$, si la densité $\delta$ n'est pas la même dans tous les points de la couche ; ce qui limite un peu les suppositions qu'on peut faire sur la valeur de la force verticale & de la force horizontale, mais non pas jus-

qu'au point de rendre néceſſairement les couches de niveau.

19. Cette derniere remarque ſur la néceſſité de $\int \varpi \, d\zeta = 0$ lorſque $\zeta = 360°$ eſt très-importante ; & faute d'y avoir égard, on pourroit ſouvent tomber en erreur ſur les loix de l'équilibre des fluides. Pour le faire ſentir par un exemple très-ſimple, je ſuppoſe un fluide ſphérique & homogène, renfermé dans un vaſe, & dont les parties peſent vers le centre $C$, (*Fig.* 3) avec une force proportionnelle à une fonction quelconque de la diſtance, & outre cela ſoient animées par des forces perpendiculaires aux rayons $CP$, $Cp$, & réciproquement proportionnelles à ces rayons ; il eſt très-évident que les canaux $PP'$, $pp'$ ſeront en équilibre, ainſi que les canaux $Pp$, $P'p'$, & qu'ainſi le canal quelconque $PP'p'p$ ſera en équilibre ; cependant le canal circulaire total $PP'QP$ ne ſera pas en équilibre, puiſqu'il y aura de $P$ vers $P'$ & $Q$ un courant perpétuel à cauſe de la force conſtante qui agit perpendiculairement à $CP$.

20. De-là on voit encore, que quoique le canal $PP'p'p$ ſoit en équilibre, cependant le canal $PCP'$ aboutiſſant au centre n'eſt pas en équilibre ; ce qui peut paſſer pour une eſpéce de paradoxe. M. Clairaut, dans ſa théorie *de la Figure de la Terre*, pag. 88 & ſuivantes, examinant un cas ſemblable en quelque choſe à celui-ci, paroît conclure de l'équilibre du canal quelconque $PP'p'p$, celui du canal $PCP'$, par la raiſon, dit-il, que la force du canal circulaire $\varpi\varpi'$ dans le ſens $\varpi\varpi'$

ſera toujours la même quelque peu d'étendue qu'ait ce canal, & qu'ainſi elle doit, ſelon lui, être encore la même au point $C$, où l'étendue du canal $= o$. J'avoue que je ne puis admettre cette aſſertion; car quoique M. Clairaut ajoute, pour la confirmer, que la force de la goutte qui eſt en $C$ eſt infinie, étant en raiſon inverſe du rayon, il me ſemble que dès qu'on eſt parvenu au centre $C$, il n'y a plus abſolument aucune force; d'ailleurs, cette force s'exerçant (*hyp.*) perpendiculairement au rayon, s'exerceroit donc au centre $C$ ſuivant tous les ſens poſſibles à-la-fois, puiſque tous les rayons partent du centre; or cette direction infiniment multipliée me paroît choquante. Il ne doit pas au reſte paroître ſurprenant que la force du canal $\varpi\varpi'$ qui eſt conſtante tant que $PP'$ n'eſt pas nul, s'évanouiſſe lorſque $\varpi\varpi' = o$; il arrive la même choſe que dans l'équation de l'hyperbole $xy = aa$, où l'aire $xy$ eſt conſtante tant que $x$ n'eſt pas $= o$, & devient évidemment nulle lorſque $x = o$.

21. Voici encore une autre concluſion non moins importante, qui réſulte de ce que nous venons de remarquer ſur la néceſſité de $\int \pi dz = o$ lorſque $z = 360°$. Soit la force perpendiculaire à $CP$ (*Fig.* 4) $= \frac{A}{CP}$, & ſoient les coordonnés $CQ = y$, $QP = x$: ſoit de plus la force ſuivant $PC =$ à une fonction de $CP = \varphi(\sqrt{[xx+yy]})$; la force ſuivant $PQ$ ſera $\frac{yA}{\sqrt{(xx+yy)}} +$

$\frac{x\phi(\sqrt{[xx+yy]})}{\sqrt{(xx+yy)}}$, & celle suivant $QC = \frac{y\phi(\sqrt{[xx+yy]})}{\sqrt{(xx+yy)}} - \frac{Ax}{\sqrt{(xx+yy)}}$; multipliant la premiere de ces forces par $dx$ & la seconde par $dy$, il est aisé de voir que la somme sera une différentielle complette, & qu'ainsi suivant le principe de M. Clairaut (pag. 37 de l'Ouvrage cité) il devroit y avoir équilibre. Cependant il est évident, par l'art. 19, que l'équilibre n'a pas lieu; donc M. Clairaut a énoncé la régle de l'équilibre trop généralement, quand il a dit que si $P$ est la force parallèle aux $y$, & $Q$ la force parallèle aux $x$, il y aura équilibre quand $Pdy+Qdx$ sera une différentielle complette.

22. Mais, dira-t-on, comment se peut-il que cette régle soit trop générale dans son énoncé? Car dès que $Pdy+Qdx$ est une différentielle complette, le poids d'un canal quelconque $P'P$ ne dépend évidemment que de la position des points $P$, $P'$; par conséquent (*Fig.* 5) tout canal $PP'$, $P\pi P'$, terminé aux points $P$, $P'$, aura le même poids, par conséquent il y aura équilibre dans toute l'étendue du fluide.

23. Je réponds que l'intégrale de $Pdy+Qdx$ peut être telle qu'elle ait plusieurs valeurs qui répondent aux mêmes coordonnées $x$ & $y$; comme il y a dans le cercle plusieurs arcs répondans aux mêmes sinus & cosinus; & qu'en ce cas il pourra arriver que le poids des canaux $PP'$, $P\pi P'$, soit dirigé de maniere que le fluide $PP'$ agisse suivant $PP'$, & le fluide $P'\pi P$ suivant $P'\pi P$,

c'eſt-à-dire, dans le même ſens que $PP'$, enſorte qu'il ne pourra y avoir d'équilibre. Or c'eſt préciſément ce qui arrive ici ; l'intégrale de $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{(xx+yy)}} \times \phi(\sqrt{[xx+yy]}) + \frac{A(ydx-xdy)}{xx+yy}$ eſt $\Delta(\sqrt{[xx+yy]}) + A$ multiplié par l'angle dont la tangente eſt $\frac{y}{x}$ ; donc le poids de $P'P$ (*Fig.* 4) $= A(AP' - AP)$ ou bien $= A(AP' + 360^\circ - AP)$ ; de ces deux quantités, la premiere eſt le poids de l'arc $PP'$, la ſeconde celui de ſon complément à 360 degrés.

24. La même choſe auroit lieu quand même $APB$ ne ſeroit pas un arc de cercle ni $A$ une quantité conſtante, pourvû que la force perpendiculaire à $CP$ fût toujours $= \frac{A}{\sqrt{(xx+yy)}}$, $A$ étant une fonction quelconque de la quantité $\frac{\int(ydx-xdy)}{xx+yy}$, ou, ce qui revient au même, de l'angle dont la tangente eſt $\frac{y}{x}$.

25. Il eſt donc à propos pour l'équilibre, non-ſeulement que $Pdy+Qdx$ ſoit une différentielle complette, mais encore que ſon intégrale ſoit telle qu'elle ne dépende ni de la rectification, ni de la quadrature d'une courbe ovale ; car autrement il pourroit ſe faire qu'un canal quelconque, rentrant en lui-même, ne fût pas en équilibre, & qu'il y eût dans ce canal un courant perpétuel.

26. De-là on doit conclure encore que l'équation $\int Qy\,dx + \int Y\,dy - \frac{fzz}{2r} = A$ donnée par M. Clairaut (pag. 82 de l'Ouvrage cité, pour l'équibre des ſphéroïdes, $y$ repréſentant les rayons qui partent d'un point fixe, & $x$ les angles compris entre ces rayons) doit être telle que $\int Qy\,dx$ ſoit $= 0$, non-ſeulement lorſque l'angle $x = 0$, mais encore lorſque $x = 360°$ pris tant de fois qu'on voudra; ce qui, en effet, eſt d'ailleurs évident, puiſque le rayon $y$ & l'ordonnée $z$ étant toujours les mêmes pour une valeur quelconque de $x$ augmentée de $360°$ tant de fois qu'on voudra, il eſt évident que $\int Qy\,dx$ doit conſerver la même valeur quel que ſoit le nombre de circonférences dont l'angle $x$ ſoit ſuppoſé augmenté. Il faut encore, & pour ainſi dire, à plus forte raiſon, que la valeur de la force $Q$ ſoit la même en augmentant $x$ de tant de fois $360°$ qu'on voudra. Mais il eſt bon de remarquer que cette ſeconde condition pourroit être obſervée ſans que la premiere le fût; ce qui arriveroit, par exemple, ſi $Q$ étoit $= \frac{a + b\,\text{ſin.}\,x}{y}$, & en général, ſi $Q$ eſt l'ordonnée d'une courbe dont $\int y\,dx$ ſoit l'abſciſſe, & qui, comme la cycloïde & une infinité d'autres courbes qu'on peut imaginer, coupe ſon axe en une infinité de points, ſans avoir des branches alternatives au-deſſus & au-deſſous de l'axe. Mais les deux conditions ſeront remplies à-la-fois, ſi $Q$ eſt l'ordonnée d'une courbe dont $\int y\,dx$ ſoit l'abſciſſe, ($y$ étant ſuppoſé

représenter un parametre constant) & qui ait des branches alternatives égales & semblables au-dessus & au-dessous de l'axe. C'est à quoi il est aisé de parvenir, au moyen de la rectification ou de la quadrature d'une courbe rentrante en elle-même, comme dans le problême des cordes vibrantes. Voyez les Mémoires de l'Académie de Berlin de 1747.

27. Au reste, avec cette limitation même, que $\int Qy\,dx$ soit $= 0$ lorsque $x = 360°$, je doute que l'équation $\int Qy\,dx + \int P\,dy - \frac{f\pi}{2r} = A$ puisse indiquer un véritable équilibre, tant que $Qy$ sera $=$ à une fonction de $x$, & $P$ à une fonction de $y$; par la raison qu'alors les canaux rectilignes, aboutissans au centre, ne seroient pas en équilibre; car il résulte de ce que nous avons remarqué ci-dessus, qu'en ce cas $\int Qy\,dx = 0$ dans ces canaux rectilignes, & qu'ainsi on auroit à-la-fois l'équation $\int Qy\,dx + \int P\,dy - \frac{f\pi}{2r} = A$ pour un canal curviligne aboutissant du centre à la surface, & l'équation $\int P\,dy - \frac{f\pi}{2r} = A$ pour les canaux rectilignes terminés au centre.

28. Il faut donc pour l'équilibre, que $\int Qy\,dx$ qui exprime le poids du canal circulaire renfermé entre les canaux rectilignes $CP$, $CP'$, soit $= 0$ lorsque $CP = 0$; c'est-à-dire, que l'intégrale de $\int Qy\,dx$ prise en regardant $x$ comme variable & $y$ comme constante, soit $= 0$ lorsque

que $y = 0$; ou enfin, ce qui revient au même, que $Qy\,dx$ ne contienne aucun terme qui renferme $x$ ſans $y$; d'où il s'enſuit que $Qy\,dx + P\,dy$ aura la même intégrale que $P\,dy$ en faiſant $x$ conſtant dans $P$; il faut donc que $P$ ſoit une fonction de $x$ & de $y$, telle 1°. qu'en intégrant $P\,dy$ & ne faiſant varier que $y$, puis différentiant l'intégrale & ne faiſant varier que $x$, cette différentiation produiſe une quantité égale à $Qy\,dx$. 2°. Que la quantité $Qy\,dx$ ne contienne aucune puiſſance négative de $y$, car autrement $\int Qy\,dx$ ne ſeroit pas $= 0$ quand $y = 0$. 3°. Que cette intégrale ſuppoſée $= 0$ lorſque $x = 0$, ſoit auſſi $= 0$ lorſque $x$ ſera augmentée d'autant de fois 360° qu'on jugera à propos.

29. Soit donc priſe une fonction quelconque de $y$ & de ſinus ou coſinus de $x$, dans laquelle il pourra ſe trouver des termes qui renferment $y$ ſans $x$, mais aucun qui renferme $x$ ſans $y$, & aucun qui contienne des puiſſances négatives de $y$, au moins parmi les termes où ſe trouvera $x$; ſoit enſuite différentiée cette fonction, enſorte que la différentielle ſoit $M\,dx + N\,dy$; on fera $P = M$, & $Q = \frac{N}{y}$. Avec ces conditions, l'équation $\int Qy\,dx + \int P\,dy - \frac{fxx}{2r} = A$ exprimera réellement la loi de l'équilibre.

30. Les équations $P = xxy$, & $Q = xy$, ou $P = \frac{x}{\sqrt{(aa+xy)}}$ & $Q = \frac{1}{\sqrt{(aa+xy)}}$, que M. Clairaut a ſuppoſées, pag. 85 de ſon Ouvrage, ſatisfont bien à la pre-

miere & à la ſeconde des trois conditions de l'art. 28, mais non pas à la troiſiéme ; il falloit prendre, par exemple, $P = y\,(\text{ſin. } x)^2$ & $Q = y\,\text{ſin. } x\,\frac{d\,\text{ſin. } x}{dx}$, ou $P = \frac{\text{ſin. } x}{\sqrt{(aa + y\,\text{ſin. } x)}}$ & $Q = \frac{d(\text{ſin. } x)}{dx\sqrt{(a^2 + y\,\text{ſin. } x)}}$, & ainſi des autres cas.

31. Au reſte, cette troiſiéme condition, que l'intégrale de $\int Qy\,dx$ ſoit également $= 0$, non-ſeulement lorſque $x = 0$, mais encore lorſque $x = 360°$, n'exige pas abſolument, que quand le fluide en équilibre forme un ſolide de révolution, les courbes $APa$, $AQa$, (*Fig. 6*) alors égales, ſemblables & ſemblablement placées par rapport à l'axe de révolution $ACa$ de ce ſolide, appartiennent à la même équation ; il ſuffit, pour que $\int \pi dz = 0$ dans tout le canal $APaQA$, que la force $Q$ ſoit dirigée en ſens contraire dans ces deux courbes. Mais une condition non moins eſſentielle, c'eſt qu'il faut que la valeur de la force $Q$ aux points $A$ & $a$ ſoit égale à 0 ; autrement les points $A$, $a$, ſeroient chacun pouſſés en ſens contraires & perpendiculairement à $ACa$ par deux forces égales & oppoſées ; donc alors la direction des points $A$, $a$ ſeroit rigoureuſement $AC$, tandis que celle d'un point $a$, pris auſſi près qu'on voudroit de $A$, feroit avec $aC$ un angle fini ; ce qui ſeroit choquant.

32. Par une raiſon ſemblable, il n'eſt nullement néceſſaire que les deux parties $AB$, $Ba$ appartiennent à une même courbe, même quand on ſuppoſeroit, ce qui

n'eſt pas néceſſaire, que le poids de $ABa$ fût nul; il ſuffiroit, pour cette condition, que le poids de $APB$ fût égal à celui de $Ba$ & dirigé en ſens contraire, enſorte que l'effort perpendiculaire à $CB$, agiſſant au point $B$, fût $= 0$.

33. Par la même raiſon encore, ſi on prend dans l'arc $AB$ deux parties quelconques $AP$, $PB$, il ſuffira, pour que le poids de $APB$ ſoit nul, que le poids de $AP$ ſoit égal & contraire au poids de $PB$, & que la force perpendiculaire à $CP$ au point $P$ ſoit $= 0$.

34. En général, ſoit $z$ une indéterminée quelconque, & ſoit $Z$ l'ordonnée variable d'une courbe quelconque qui ait $z$ pour abſciſſe, cette courbe pouvant être tracée comme on voudra, & même à la main, ſi l'on veut, ſans aucune eſpéce de régularité; ſoit priſe enſuite une fonction algébrique quelconque de $x$ & de $y$, que j'appelle $\varphi(x,y)$; ſoit cette fonction $= z$, & $Adx+Pdy$ ſa différentielle, on aura $(Adx+Bdy)\frac{d(Z)}{dz} =$ à une différentielle complette; cette différentielle pourra repréſenter le poids d'un arc quelconque $AP$, & ſon intégrale pourra être $= 0$ en tant de points qu'on voudra, pourvû qu'elle le ſoit lorſque l'angle $ACP = 360°$.

35. Il faudra ſeulement obſerver que dans la courbe qui a pour coordonnées $z$ & $Z$, il n'y ait aucun point où les deux parties de la courbe faſſent un angle entr'elles; en effet, $\frac{dZ}{dz}$ auroit deux valeurs en ce point, & par

conſéquent il y auroit un point du fluide où les forces verticale & horizontale, c'eſt-à-dire, les forces ſuivant $PC$ & ſuivant $PP'$, (*Fig.* 1) auroient deux valeurs à-la-fois; ce qu'on ne ſauroit ſuppoſer.

36. Il réſulte de tout ce que nous avons remarqué juſqu'ici, que ſi dans une maſſe fluide en équilibre, on ſuppoſe les couches $APP'$, $app'$ de denſité uniforme, & qu'on nomme $\Delta$ cette denſité, $\varphi$ la force ſuivant $pP$, $\psi$ la force ſuivant $PP'$, il faut que l'intégrale de $\varphi\Delta \times pP$, priſe en ne faiſant varier que $CP$, & laiſſant $z$ conſtant, ſoit la même (à une conſtante près) que celle de $\psi\Delta \times PP'$ priſe en ne faiſant varier que $z$; cette conſtante ſera une fonction de $r$, & repréſentera le poids du canal $CA$.

37. Il eſt bon de remarquer encore que la condition énoncée ci-deſſus, art. 27, que $\int Qy\,dx$ ſoit $= 0$ lorſque $y = 0$, ne ſeroit pas eſſentielle à l'équilibre (les autres conditions étant obſervées) s'il y avoit au centre $C$ une maſſe ſolide de quelque étendue; parce qu'alors l'inconvénient remarqué, art. 19 & 20, n'auroit plus lieu; d'où réſulte cette vérité aſſez ſinguliere, qu'on peut imaginer une loi de peſanteur, ſuivant laquelle une maſſe *totalement fluide* ne ſeroit pas en équilibre, mais y ſeroit infailliblement, en ſuppoſant qu'une partie quelconque de ce fluide, ſi petite qu'on voudroit, ſe durcît autour du centre.

38. Une autre paradoxe, non moins remarquable, c'eſt qu'il peut arriver que dans une maſſe fluide, un canal quelconque rentrant en lui-même, & qui ne ren-

fermeroit point le centre de tendance, fût en équilibre, & que cependant le fluide n'y fût pas; par la ſeule raiſon que $\int Qy\,dx$ (art. 28) peut n'être pas $= 0$ lorſque $x = 360°$; quoique $P\,dy + Qy\,dx$ ſoit d'ailleurs une différentielle complette.

39. Ces réflexions ſuffiſent pour montrer quelles précautions on doit prendre avant d'aſſurer qu'une maſſe fluide, homogene ou non, animée par un ſyſtême de forces données, ſera ou ne ſera pas en équilibre. Nous remarquerons encore que ſi un fluide $ABEF$ (*Fig.* 7) de maſſe finie, eſt renfermé dans un vaſe de figure quelconque, & que les ſurfaces $AB$, $FE$ ſoient parallèles, il peut ſe faire que les forces en $AB$ & $FE$ ſoient parallèles à $CD$, & ne le ſoient point ailleurs. Car ſoit $CP = x$, $PO = y$, $Q$ la force parallèle aux $x$, $P$ la force parallèle aux $y$; il faudra 1°. que $P\,dy + Q\,dx$ ſoit une différentielle complette, enſorte que faiſant $P\,dy + Q\,dx = d\omega$, on ait $P = \frac{d\omega}{dy}$, & $Q = \frac{d\omega}{dx}$; 2°. que $P = 0$ lorſque $x = 0$, & $x = CD = b$, quelle que ſoit $y$; 3°. que $\int Q\,dx = 0$ lorſque $x = 0$, & lorſque $x = CD$. Or il eſt aiſé de ſatisfaire à ces conditions; 1°. en faiſant $P =$ à une fonction de $x$, de $y$ & de $b - x$, qui ſoit $= 0$, quand $x = 0$, & quand $x = b$; ce qui eſt très-facile; 2°. en faiſant $\int Q\,dx =$ à une fonction de $x$, de $y$ & de $b - x$ qui ſoit auſſi $= 0$, lorſque $x = 0$ & $x = b$; 3°. enfin, en prenant $Q$ & $P$ tels que $\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$; or ſoit priſe

une fonction $\omega$ de $x$, de $b-x$ & de $y$, telle 1°. que ſi on la différentie en faiſant varier $y$ ſeulement, la différentielle ſoit $=0$ lorſque $x=0$, & lorſque $x=b$; 2°. que ſi dans la fonction ſuppoſée on fait $x=0$ & $x=b$, elle ſoit $=0$ quelle que ſoit $y$ (conditions très-faciles à remplir, & qui demandent ſeulement que la fonction choiſie renferme des puiſſances de $x$ & de $b-x$ qui ne ſoient pas plus petites que l'unité, & n'ait aucun terme qui ne contienne que la ſeule variable $y$); cette fonction ſatisfera aux trois conditions énoncées ci-deſſus; il ſuffira pour cela de faire $Q=\frac{d\omega}{dx}$, & $dP=\frac{d\omega}{dy}$. Il eſt très-aiſé de voir que $Q$ peut être finie & variable quand $x=0$ & $b-x=0$, quoique $P$ ſoit $=0$ dans ces cas-là; car ſoit, par exemple, $\omega=x(b-x)y$; on aura $Q=(b-x)y-xy$, qui eſt $=by$ quand $x=0$, & $=-by$ quand $x=b$; & on aura $P=x(b-x)$, qui eſt $=0$ lorſque $x=0$ & lorſque $x=b$. Ainſi, lorſque les forces parallèles à $y$ ſont nulles à la ſurface ſupérieure & inférieure du fluide, il n'eſt pas néceſſaire que les forces parallèles à $x$ ſoient égales entr'elles à cette ſurface ſupérieure; ce qui paroît d'abord contraire à la propoſition démontrée, art. 36 de notre *Traité des Fluides*; mais il faut prendre garde que dans cette propoſition on ſuppoſe que la fonction $P$ parallèle aux $y$ eſt égale à zero dans toute l'étendue de la maſſe fluide.

*Appendice sur la Figure de la Terre.*

40. A ces réflexions sur les loix de l'équilibre des fluides, j'en ajouterai par occasion quelques-unes sur la figure de la terre, qui, comme l'on sait, a beaucoup de rapport à ce sujet.

41. J'ai démontré dans mes *Recherches sur le système du Monde*, troisiéme partie, pag. 178 & suivantes, que si on appelle $r$ le demi-axe de la terre, & qu'un rayon quelconque soit $r + \alpha r(A + Bk + Ck^2 + Dk^3)$ $\alpha$ marquant une petite quantité, & $k$ le cosinus de l'angle que le rayon fait avec l'axe, l'attraction perpendiculaire au rayon sera $= \alpha\,(MB\sqrt{(1-kk)} + QD\sqrt{(1-k^2)}$ $NCk\sqrt{(1-kk)} + DPk^2\sqrt{[1-kk]})$ $M, Q, N, P$, étant des constantes qu'on a déterminées à l'endroit cité. Or l'attraction dirigée vers le centre, que nous nommons attraction verticale, étant décomposée en deux forces, l'une perpendiculaire à la surface, l'autre perpendiculaire au rayon, cette derniere est $\frac{4\pi r}{3} \times (B\sqrt{(1-kk)} +$ $2Ck\sqrt{(1-kk)} + 3Dk^2\sqrt{[1-kk]})$ $2\pi$ étant le rapport de la circonférence au rayon; & cette force doit être égale à la précédente, pour que le sphéroïde soit en équilibre. D'où il est aisé de conclure que $D$ doit être $= 0$; car, par l'endroit déja cité, $P$ n'est pas $= 4\pi r$, comme il le devroit être pour que $D$ ne fût pas $= 0$.

42. D'où l'on voit qu'un pareil sphéroïde supposé homogene ne pourroit pas être en équilibre.

43. Mais il pourra y être ſi $D = 0$, ſoit qu'on faſſe $B = 0$ ou non; car on trouve encore, par l'endroit cité, que $M = \frac{4\pi r}{3}$.

44. Dans le cas où $D = 0$, la courbe du méridien eſt une ellipſe; ſi $B$ eſt $= 0$, le point qu'on a appellé le centre du ſphéroïde, eſt celui de l'ellipſe même; ſinon il ne l'eſt pas, & il partage l'axe en deux parties inégales, dont la différence eſt $2\alpha Br$; mais dans les deux cas, l'équilibre a également lieu; ce qui eſt d'ailleurs évident, puiſqu'un ſphéroïde étant une fois en équilibre, cet équilibre doit ſubſiſter à quelque point de l'axe qu'on rapporte les rayons, & la direction des forces relativement à ces mêmes rayons.

45. A l'égard du coefficient $C$, il peut être déterminé dans tous les cas par le moyen de la valeur $\phi kv(1-kk)$ de la force centrifuge, décompoſée perpendiculairement au rayon, & ajoutée à l'attraction horizontale.

46. On voit aſſez par le calcul précédent, qu'un fluide étant ſuppoſé homogene, il y a une infinité de figures à lui ſuppoſer, qui ne pourroient pas conſerver l'équilibre; mais on peut demander s'il y a une autre figure poſſible d'équilibre que la figure elliptique. M. Maclaurin a démontré que l'équilibre avoit lieu dans cette figure, quelque grande qu'on ſuppoſât la différence des axes. On peut démontrer de plus, que ſi une maſſe de fluide homogene eſt d'abord ſuppoſée ſphérique, & qu'enſuite on ſuppoſe qu'elle tourne autour de ſon axe avec

avec une force centrifuge très-petite par rapport à la pesanteur, elle prendra la figure d'une ellipse. Car j'ai démontré dans mes *Recherches sur les Vents*, art. 28, que ce fluide, dans ses oscillations, pouvoit prendre successivement la figure d'une infinité d'ellipses de plus en plus applaties jusqu'à celle qui donne l'équilibre; donc puisqu'il peut prendre toutes ces figures, il s'ensuit qu'il les prendra en effet; car son mouvement est déterminé, & il n'y a pour ce corps qu'une façon possible de se mouvoir.

47. Mais si on suppose que le fluide en mouvement ne parte pas de la figure sphérique, mais qu'il acquerre tout-à-coup la figure nécessaire pour être en équilibre, alors il paroît difficile de démontrer en rigueur que la figure elliptique est la seule avec laquelle l'équilibre puisse subsister. La difficulté sera même à peu près aussi grande si le fluide part de la figure sphérique, & que la force centrifuge ne soit pas très-petite par rapport à la pesanteur. Voici quelques recherches sur ce sujet.

48. Les mêmes noms & la même figure étant supposés que dans *les Recherches sur le système du Monde*, Part. II, art. 390, & Part. III, pag. 200, soit (*Fig.* 8) $QP = \zeta$, $QR = u$, $PR = z$, l'angle $EQR = \Delta$; & soient menées les perpendiculaires $RM$ à $CQ$, & $RB$ à $CP$; on aura $CM = \text{cos.}\, u$; $RM$ (que je suppose la projection de sin. $u$ sur le plan $EPC$) $= \text{sin.}\, u \,\text{cos.}\, \zeta$; $MN = RM \times \frac{\text{sin.}\,\zeta}{\text{cos.}\,\zeta}$; $CB$ ou cos. $PR = CN \times \text{cos.}\,\zeta =$ $(CM - MN)\,\text{cos.}\,\zeta = \text{cos.}\, u \,.\, \text{cos.}\,\zeta - \text{sin.}\, u \,.\, \text{cos.}\,\Delta \,\text{sin.}\,\zeta$;

& l'élément de l'attraction horizontale ſera ( par les principes poſés dans les endroits cités ) $\frac{du}{2^{\frac{1}{2}}(1-\text{cof. } u)^{\frac{1}{2}}} \times d\Delta \text{ ſin. } u \times \text{ſin. } u \text{ cof. } \Delta \times \alpha\varphi(\text{cof. } PR)$.

49. Préſentement ſoit $\varphi(\text{cof. } PR) = A + B \text{ cof. } z + C \text{ cof. } z^2 + D \text{ cof. } z^3$, &c. $+ M \text{ cof. } z^m$ ; je vois d'abord que l'attraction horizontale produira ( *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Part. II, pag. 280 ) pour chacun des termes $M$ cof. $z^m$ une différentielle de cette forme $\frac{M du}{2^{\frac{1}{2}}(1-\text{cof. } u)^{\frac{1}{2}}} \times d\Delta \text{ ſin. } u \times \text{ſin. } u \text{ cof. } \Delta \times (-2m \text{ ſin. } u \text{ cof. } \Delta \text{ ſin. } \mathfrak{C} \text{ cof. } u^{m-1} \text{ cof. } \mathfrak{C}^{m-1} - 2 \text{ ſin. } u^3 \text{ cof. } \Delta^3 \text{ ſin. } \mathfrak{C}^3 \text{ cof. } u^{m-3} \text{ cof. } \mathfrak{C}^{m-3} \times \frac{m.m-1.m-2}{2.3}$, &c.) dont le dernier terme ſera, lorſque $m$ eſt impair, $-2$ ſin. $u^m$ cof. $\Delta^m$ ſin. $\mathfrak{C}^m$, & lorſque $m$ eſt pair, $-2m$ ſin. $u^{m-1}$ cof. $\Delta^{m-1}$ ſin. $\mathfrak{C}^{m-1}$ cof. $u$ cof. $\mathfrak{C}$.

50. Or en mettant pour ſin. $u^2$ ſa valeur $1 - \text{cof. } u^2$, & pour ſin. $\mathfrak{C}^2$ ſa valeur $1 - \text{cof. } \mathfrak{C}^2$, je vois de plus que l'on aura dans la différentielle un terme de cette forme, qui ne pourra être détruit par aucun autre, $\frac{M du \text{ ſin. } u^3}{2^{\frac{1}{2}}(1-\text{cof. } u)^{\frac{1}{2}}} \times \text{ſin. } \mathfrak{C} \text{ cof. } \mathfrak{C}^{m-1} \times \text{cof. } u^{m-1} \times (-2m \text{ cof. } \Delta - \frac{2m.(m-1).(m-2)}{2.3} \text{ cof. } \Delta^3$, &c.) $\times d\Delta \text{ cof. } \Delta$ ; & il eſt viſible auſſi que la quantité qui eſt entre les deux parenthéſes eſt $= (1 - \text{cof. } \Delta)^m - (1 + \text{cof. } \Delta)^m$.

51. Maintenant ſoit $1 - \text{cof. } \Delta = x'$, on aura $d\Delta \text{ cof. }$

$\Delta\times(1-\text{cof.}\Delta)^m=\frac{(1-x')\,dx'.x'^m}{\sqrt{(2x'-x'x')}}$; de plus $\int\frac{x'^m\,dx'}{\sqrt{(2x'-xx'}}=$
$-\frac{1}{m}(x'^{m-1}\sqrt{[2x'-x'x']})+\frac{2m-1}{m}\int\frac{x'^{m-1}\,dx'}{\sqrt{(2x'-x'x')}}$.

52. Donc lorſque $x=2$, on a $\int\frac{x'^m\,dx'}{\sqrt{(2x'-x'x')}}=\frac{2m-1}{m}$
$\times\int\frac{x'^{m-1}\,dx}{\sqrt{(2x'-x'x')}}$; donc $\int\frac{x'^m\,dx'}{\sqrt{(2x'-x'x')}}=\int\frac{dx'}{\sqrt{(2x'-x'x')}}\times$
$\left(\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.\frac{9}{10}.....\frac{2m-1}{m}\right)$; donc $\int\frac{(1-x').dx'.x'^m}{\sqrt{(2x'-x'x')}}=$
$\int\frac{dx'}{\sqrt{(2x'-x'x')}}\times\left[\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.\frac{9}{10}....\frac{2m-1}{m}-\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.\frac{9}{10}....\right.$
$\left.....\frac{2m-1}{m}.\frac{2m+1}{1+m}\right]=\pi\times\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.\frac{9}{10}....\frac{2m-1}{m}$
$\times-\frac{m}{1+m}$.

53. Si on fait de même $1+\text{cof.}\Delta=u$, on trouvera que $\int d\Delta\,\text{cof.}\Delta(1+\text{cof.}\Delta)^m$, ſuppoſé $=0$, lorſque $\text{cof.}\Delta=1$, devient égal, lorſque $\text{cof.}\Delta=-1$, à la même quantité qu'on vient de trouver, avec un ſigne contraire; d'où il s'enſuit que $\int d\Delta\,\text{cof.}\Delta[1-\text{cof.}\Delta]^m-\int d\Delta\,\text{cof.}\Delta(1+\text{cof.}\Delta)^m$ eſt égal lorſque $\text{cof.}\Delta=-1$, à $2\pi.\frac{1}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{8}.\frac{9}{10}.....\frac{2m-1}{m}\times-\frac{m}{1+m}$.

54. C'eſt ce qu'on peut encore prouver de la maniere ſuivante. On remarquera, que dans $d\Delta\,\text{cof.}\Delta(1-\text{cof.}\Delta)^m$, tous les termes impairs, à commencer par le premier, ſont ſucceſſivement $d\Delta\,\text{cof.}\Delta$, $B'\,d\Delta\,\text{cof.}\Delta^3$, $C'd\Delta\,\text{cof.}\Delta^5$, &c. D'où il eſt aiſé de voir que ſi l'intégrale de ces termes eſt ſuppoſée $=0$, lorſque $\text{cof.}\Delta=1$,

elle ſera de même = 0 lorſque cof. $\Delta = -1$. Donc lorſque cof. $\Delta = -1$, l'intégrale totale de $d\Delta$ cof. $\Delta \times (1 - \text{cof. } \Delta)^m$ eſt la même que l'intégrale des termes pairs de cette quantité; d'où il eſt aiſé de conclure que l'intégrale de $d\Delta$ cof. $\Delta\,[(1 - \text{cof. } \Delta)^m - (1 + \text{cof. } \Delta)^m]$ eſt le double de l'intégrale de $d\Delta$ cof. $\Delta (1 - \text{cof. } \Delta)^m$ lorſque cof. $\Delta = -1$.

55. Il faut préſentement intégrer $\frac{du \text{ ſin. } u^3}{(1 - \text{cof. } u)^{\frac{1}{2}}} \times \text{cof. } u^{m-1}$, ou en général $\frac{du \text{ ſin. } u^3 \text{ cof. } u^n}{(1 - \text{cof. } u)^{\frac{1}{2}}}$, ou (en faiſant cof. $u = x$) $-\frac{dx(x^n - x^{n+2})}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{dx(x^n + x^{n+1})}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$; or $\int \frac{dx \cdot x^n}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = x^n (1-x)^{\frac{1}{2}} \times -\frac{2}{2n+1} + \int \frac{dx \cdot x^{n-1}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{2n}{2n+1}$; de plus, $\int \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{-dz}{z^{\frac{1}{2}}}$, en faiſant $1 - x = z$; & cette quantité, lorſque $x = -1$ ou $z = 2$, devient $-2\sqrt{2}$.

56. Donc $\int \frac{x^p dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{x^p (1-x)^{\frac{1}{2}} \times -2}{2p+1} + \frac{2p}{2p+1} \times \frac{x^{p-1}(1-x)^{\frac{1}{2}} \times -2}{2p-1} + \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \times \frac{x^{p-2}(1-x)^{\frac{1}{2}} \times -2}{2p-3} \ldots$ $\ldots + \frac{2p}{2p+1} \cdot \frac{2p-2}{2p-1} \ldots \frac{2}{3} \times (1-x)^{\frac{1}{2}} \times -2$.

57. Donc en ſuppoſant ſucceſſivement $p = 0$, $p = 1$, $p = 2$, &c. on aura pour les valeurs de $\int \frac{x^p dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, lorſque $x = -1$

$$-2\sqrt{2}$$
$$+\frac{2\sqrt{2}}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{2}{1}$$
$$-\frac{2\sqrt{2}}{5}+\frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{2}{1}$$
$$+\frac{2\sqrt{2}}{7}-\frac{2\sqrt{2}.6}{7\cdot5}+\frac{2\sqrt{2}.6}{7\cdot5}\cdot\frac{4}{3}-\frac{2\sqrt{2}.6.4.2}{7\cdot5\cdot3\cdot1}.$$

58. Donc les valeurs de $\int\frac{x^{m-1}dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ feront ſucceſſivement, depuis $m=1$, égales à $2\sqrt{2}$ multiplié par les quantités ſuivantes.

pour $m=1$, $-1$

pour $m=2$, $-\frac{1}{3}$

pour $m=3$, $-\frac{7}{5\cdot3}$

pour $m=4$, $-\frac{27}{7\cdot5\cdot3}$ ou $-\frac{9}{7\cdot5}$

pour $m=5$, $-\frac{107}{9\cdot7\cdot5}$

pour $m=6$, $-\frac{151}{11\cdot9\cdot7}$

pour $m=7$, $-\frac{835}{3\cdot7\cdot11\cdot13}$.

59. Donc $\int\frac{-x^{m-1}dx-x^{m}dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, ou $\int\frac{-x^{p}dx-x^{p+1}dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$, aura ſucceſſivement les valeurs ſuivantes

pour $m=1$, $(1+\frac{1}{3})2\sqrt{2}$

pour $m=2$, $(\frac{1}{3}+\frac{7}{5\cdot3})2\sqrt{2}$

pour $m = 3$, $\left(\frac{7}{5\cdot 3} + \frac{9}{7\cdot 5}\right) 2\sqrt{2}$

pour $m = 4$, $\left(\frac{9}{7\cdot 5} + \frac{107}{9\cdot 7\cdot 5}\right) 2\sqrt{2}$

pour $m = 5$, $\left(\frac{107}{9\cdot 7\cdot 5} + \frac{151}{11\cdot 9\cdot 7}\right) 2\sqrt{2}$

pour $m = 6$, $\left(\frac{151}{11\cdot 9\cdot 7} + \frac{835}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13}\right) 2\sqrt{2}$.

60. Maintenant il faut remarquer 1°. que $\int \frac{-x^p dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} (1-z)^p$ en faisant $1-x=z$; 2°. que si on partage l'intégrale de $\frac{dx(1-z)^p}{\sqrt{z}}$ en deux parties, dont l'une finisse au point où $z=1$, les deux parties de cette intégrale seront telles, que la premiere qui commence à $z=0$, & finit à $z=1$, sera $>$ que l'autre; parce que $\sqrt{z}$ va toujours en croissant, & que $1-z$ a des valeurs égales positives & négatives répondantes aux abscisses $z$ & $2-z$.

61. Cette seconde partie sera négative si $p$ est impair, puisque $(1-z)^p$ est alors négatif. Donc si on appelle ces deux parties $a, a'$, on aura $\int \frac{-x^p dx}{\sqrt{(-x)}} = a \pm a'$; savoir, $+$ si $p$ est pair & $-$ s'il est impair, & dans les deux cas $a > a'$.

62. De plus, il est visible que si on prend l'intégrale de $\int \frac{dz(1-z)^{p+1}}{\sqrt{z}}$, les deux parties de cette intégrale seront, la premiere plus petite que $a$, la seconde plus

petite que $a'$ (abſtraction faite des ſignes) ; par la raiſon que $1-z$ étant ſuppoſé $< 1$, $\frac{dz(1-z)^{p+1}}{\sqrt{z}}$ eſt $< \frac{dz(1-z)^p}{\sqrt{z}}$.

Donc ſi on ſuppoſe $\int \frac{-x^{p+1}dx}{\sqrt{(1-x)}} = b \mp b'$, ſavoir, — ſi $p+1$ eſt impair, & + s'il eſt pair, on aura $a > b$, & $a' > b'$.

63. Donc ſi $p$ eſt pair, on aura $\int \frac{-x^p dx - x^{p+1}dx}{\sqrt{(1-x)}} = a + a' + b - b'$ ; & ſi $p$ eſt impair, ce ſera $a - a' + b + b'$.

64. Dans le premier cas, on aura $a + a' + b - b' > a + b \geq 2b$, & $a + a' + b - b' < a + a' + b < 3a$.

65. Dans le ſecond cas, on aura $a - a' + b + b' < a + b < 2a$ ; & $a - a' + b + b' > b$.

66. Maintenant lorſque $x = 0$ ou $z = 1$, les formules précédentes donnent $a = \frac{2p \cdot 2p-2 \ldots 2 \cdot 2}{2p+1 \cdot 2p-1 \ldots 3} = \frac{2^{p+1}(p \cdot p-1 \ldots 1)}{2p+1 \cdot 2p-1 \ldots 3}$, & $b = \frac{2p+2}{2p+3}a$ ; & (à cauſe de $p = m-1$) $a = \frac{2^m(m-1 \cdot m-2 \ldots 1)}{2m-1 \cdot 2m-3 \ldots 3}$ & $b = \frac{2ma}{2m+1}$.

67. Donc le produit de $\frac{1}{2\sqrt{2}}$ & de $\frac{2\pi \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots 2m-1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots m-1 \cdot m} \times -\frac{m}{1+m}$ (que j'appelle $\omega$) par $a$, ſera $-\frac{2\pi \cdot 2^m}{(1+m)2\sqrt{2}}$ ; & le produit de la même quantité par $b$, ſera égal à $\frac{-2\pi \cdot 2^{m+1} \cdot m}{2\sqrt{2}(2m+1)(1+m)}$. Il faut maintenant que le produit de $M\omega$ par $\int \frac{-x^p dx - x^{p+1}dx}{\sqrt{(1-x)}} = -\frac{4\pi m}{m} \times M$, pour

que le sphéroïde soit en équilibre ; car le terme $M$ cos. $\mathcal{C}^m$, donne $-m$ sin. $\mathcal{C}$ cos. $\mathcal{C}^{m-1} \frac{4\pi}{3} . M$, pour l'action de la pesanteur décomposée horizontalement ; & l'attraction horizontale contient, par ce qui précéde, un terme $= M\varpi \times$ sin. $\mathcal{C}$ cos. $\mathcal{C}^{m-1}$.

68. Donc puisque l'on a, lorsque $p$ est pair ou $m$ impair, $\int \frac{-x^p dx - x^{p+1} dx}{\sqrt{(1-x)}} > 2b$ & $< 3a$ ; & $\int \frac{-x^p dx - x^{p+1} dx}{\sqrt{(1-x)}} < 2a$ & $> b$, lorsque $p$ est impair ou $m$ pair, il s'ensuit que l'on doit avoir les conditions suivantes.

1°. Quand $m$ est impair, $\frac{4\pi m}{3} > \frac{4\pi m . 2^{m+1}}{2\sqrt{2}(2m+1)(1+m)}$, & $\frac{4\pi m}{3} < \frac{4\pi . 2^{m-1} . 3}{2\sqrt{2}(1+m)}$.

2°. Quand $m$ est pair, $\frac{4\pi m}{3} < \frac{4\pi . 2^m}{2\sqrt{2}(1+m)}$, & $\frac{4\pi m}{3} > \frac{4\pi m . 2^m}{2\sqrt{2}(2m+1)(1+m)}$.

69. Or quand $m$ est impair, il faut, pour que la premiere condition soit remplie, que 1 soit $> \frac{3 . 2^{m-\frac{1}{2}}}{(2m+1)(1+m)}$, c'est-à-dire $> \frac{3 . 2^{m-\frac{1}{2}}}{(1+m)(m+\frac{1}{2})}$, & par conséquent $\frac{3 . 2^{m-\frac{1}{2}}}{(1+m)(\frac{1}{2}+m)} < 1$.

70. Or $\frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(1+m)(\frac{1}{2}+m)}$ est $> \frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(1+m)^2}$. Donc la condition

condition dont il s'agit, n'aura pas lieu ſi $\frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(1+m)^2}$ eſt $> 1$. C'eſt ce qui arrivera ſi $m = 7$; car alors on a $\frac{3.2^{\frac{11}{2}}}{64}$ ou $\frac{3.32.\sqrt{2}}{64}$ ou $\frac{3\sqrt{2}}{2} > 1$.

71. Je dis à préſent que depuis $m = 7$, juſqu'à $m = \infty$, on aura toujours $\frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(1+m)^2} > 1$. Car dès qu'une fois on aura une valeur de $m$ telle que $\frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(1+m)^2} > 1$, il eſt aiſé de faire voir que $\frac{3(2^{m-\frac{1}{2}+1})}{(1+m+1)^2}$ eſt plus grand que 1. Pour cela il ſuffit de prouver que $3(2^{m-\frac{1}{2}})$ eſt $> 2(1+m)+1$ : or $3(2^{m-\frac{1}{2}})$ (*hyp.*) eſt $> (1+m)^2$ & $(1+m)^2$ eſt $> 2(m+1)+1$, tant que $m^2$ eſt $> 2$.

72. Donc quand $m$ eſt impair & $> 5$, le ſphéroïde ne ſauroit être en équilibre, puiſqu'il réſulte des art. 70 & 71, qu'il n'y a plus d'équilibre dès que $m = 7$ ou $> 7$.

73. Maintenant quand $m$ eſt pair, on trouvera de la même maniere que la condition que $\frac{4\pi m}{8}$ ſoit $> \frac{4\pi m.2^m}{(2m+1)(1+m)2\sqrt{2}}$ demande que $\frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(2m+1)(1+m)}$ ſoit $< 1$; ce qui n'aura pas lieu ſi $m = 8$; car $\frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(2m+1)(1+m)} = \frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(m+\frac{1}{2})(1+m)} > \frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(1+m)^2}$. Or quand $m = 8$, $\frac{3(2^{m-\frac{1}{2}})}{(1+m)^2}$ eſt $= \frac{3.2^{\frac{11}{2}}}{81} = \frac{3.32.\sqrt{2}}{81} > 1$. Donc, &c.

74. Donc lorſque $m$ eſt impair & $> 5$, ou pair & $> 6$, le ſphéroïde ne ſauroit être en équilibre.

75. On ſait déja (art. 43) que ſi $m = 1$, il y aura équilibre; & on peut remarquer qu'en effet la figure du ſolide eſt alors ſphérique; car $r' = r + a(A + B\cos.z)$ ou $r' = r + a(1 - \cos.z)$ eſt l'équation d'un cercle, où le foyer des rayons $r'$ eſt éloigné du centre d'une quantité $= a$.

76. Il ne s'agit plus que de voir ſi dans les cas de $m = 2$, $m = 3$, &c. juſqu'à 6 incluſivement, on a $\frac{4\pi m}{3} = \omega \times \int \frac{-x^p dx - x^{p+1} dx}{\sqrt{(1-x)}}$; c'eſt ſur quoi il eſt facile de s'éclaircir par les formules & par la petite table qu'on a données ci-deſſus (article 59) de la valeur de $\int \frac{-x^{m-1} dx - x^m dx}{\sqrt{(1-x)}}$ depuis $m = 2$, juſqu'à $m = 6$. En effet, la valeur de $\omega \times \int \frac{-x^{m-1} dx - x^m dx}{\sqrt{(1-x)}}$ ſera ſucceſſivement,

lorſque $m = 2$, $\frac{2\pi}{2\sqrt{2}} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times 2\sqrt{2}\left(\frac{1}{3} + \frac{7}{5 \cdot 3}\right)$

lorſque $m = 3$, $\frac{2\pi}{2\sqrt{2}} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{3}{4} \times 2\sqrt{2}\left(\frac{7}{5 \cdot 3} + \frac{9}{7 \cdot 5}\right)$

lorſque $m = 4$, $\frac{2\pi}{2\sqrt{2}} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{4} \times \frac{4}{5} \times 2\sqrt{2}\left(\frac{9}{7 \cdot 5} + \frac{107}{9 \cdot 7 \cdot 5}\right)$

lorſque $m = 5$, $\frac{2\pi}{2\sqrt{2}} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{4} \times \frac{9}{5} \times \frac{5}{6} \times 2\sqrt{2}\left(\frac{107}{9 \cdot 7 \cdot 5} + \frac{151}{11 \cdot 9 \cdot 7}\right)$

lorſque $m = 6$, $\frac{2\pi}{2\sqrt{2}} \times \frac{3}{2} \times \frac{5}{3} \times \frac{7}{4} \times \frac{9}{5} \times \frac{11}{6} \times \frac{6}{7} \times 2\sqrt{2}\left(\frac{151}{11 \cdot 9 \cdot 7} + \frac{835}{13 \cdot 11 \cdot 9 \cdot 7}\right)$;

& la quantité $\frac{4\pi m}{3}$ eſt ſucceſſivement dans ces mêmes hypothèſes

$$\frac{4\pi.2}{3}$$
$$\frac{4\pi.3}{3}$$
$$\frac{4\pi.4}{3}$$
$$\frac{4\pi.5}{3}$$
$$\frac{4\pi.6}{3};$$

d'où il eſt aiſé de voir que dans aucune de ces hypothéſes $\frac{4\pi m}{3}$ ne ſera $= \omega \times \int \frac{-x^p dx - x^{p+1} dx}{\sqrt{(1-x)}}$.

77. De-là il réſulte que ſi on ſuppoſe $\alpha$ très-petit, il n'y a d'équilibre poſſible, lorſque le fluide eſt homogene & ne tourne pas autour de ſon axe, que dans le cas de $C = 0$, $D = 0$, &c. c'eſt-à-dire, (art. 75) quand le fluide forme une maſſe ſphérique; & que ſi le fluide tourne autour de ſon axe, & que $\alpha$ ſoit encore très-petit, il n'y a d'équilibre que quand $D = 0$, & ainſi de ſuite à l'infini, c'eſt-à-dire, quand le fluide forme une maſſe elliptique. Je laiſſe à d'autres à examiner ſi quand $\alpha$ n'eſt pas très-petit, l'équilibre eſt poſſible dans d'autres figures, que la figure ſphérique ou elliptique, le fluide étant ſuppoſé homogene.

78. Si on ſuppoſe $r' = r + \alpha (A + B \text{ cof. } z + C \text{ cof. } z^2 + D \text{ cof. } z^3 \ldots + M \text{ cof. } z^m)$ on pourra mettre

le ſphéroïde en équilibre, en ſuppoſant un noyau ſphérique au centre, d'un rayon quelconque $f$ & de denſité convenable $\Delta$; par-là on déterminera $M$, qui, ſans cela, ſeroit impoſſible à déterminer; car on aura $\frac{4\pi f^2(\Delta-1)}{3} + \frac{4\pi m}{3} = M \times K$, $K$ étant un coefficient égal à $\omega \times \int \frac{-x^p dx - x^{p+1} dx}{\sqrt{(1-x)}}$. A l'égard des autres coefficiens, ils ſe détermineront par les équations particulieres qu'on trouvera entr'eux & le coefficient $M$.

79. Soit (*Fig.* 9) $PME$ le quart d'une ellipſe, formant autour de $CP$ un ſphéroïde; d'un point $M$ quelconque tirant les perpendiculaires $MN$, $MQ$ aux deux axes, l'attraction en $M$ ſuivant $MQ$ ſera égale (comme l'a démontré M. Maclaurin) à l'attraction en $N$ ſuivant $NC$, & l'attraction en $M$ ſuivant $MN$, ſera égale à l'attraction en $Q$ ſuivant $QC$. Soit à préſent $CP = 1$, $CE = 1 + \alpha$, $2\pi$ le rapport de la circonférence au rayon, l'attraction en $P$ ſera $\frac{4\pi}{3}(1 + \Delta\alpha)$; & l'attraction en $E$, $\frac{4\pi}{3}(1 + \Gamma\alpha)$; donc faiſant $CN = x$, $NM = y$, l'attraction ſuivant $MQ$ ſera $= x \times \frac{4\pi}{3} \times (1 + \Delta\alpha)$; & l'attraction ſuivant $MN = \frac{y}{1+\alpha} \times \frac{4\pi}{3} \times (1 + \Gamma\alpha)$.

80. Si on ſuppoſe à préſent un noyau ſphérique $KSL$, dont le rayon ſoit $= r$ & la denſité $\Lambda$, & qu'on faſſe

$CM = \zeta$, on aura de plus une attraction ſuivant $MC = \frac{4\pi r^3}{3\zeta^2} \times (\delta - 1)$; & par conſéquent la force ſuivant $MN$ ſera $= \frac{4\pi}{3}\left[\frac{y + y\Gamma\alpha}{1+\alpha} + \frac{r^3 y}{\zeta^3}(\delta - 1)\right]$, & la force ſuivant $MQ = \frac{4\pi}{3}\left[x(1 + \Delta\alpha) + \frac{r^3 x}{\zeta^3} \times (\delta - 1)\right]$.

81. De plus, nommant $\varphi$ la force centrifuge en $E$, la force ſuivant $MN$ devra être diminuée de la quantité $\varphi y$.

82. Maintenant, pour que le ſphéroïde ſoit en équilibre, il faut que la force ſuivant $MN$ ſoit à la force ſuivant $MQ$, comme $MN$ à $NR$, $MR$ étant perpendiculaire à la courbe en $M$; donc à cauſe de $NR = x(1+\alpha)^2$, il faut que $\frac{1+\Gamma\alpha}{1+\alpha} + \frac{r^3}{\zeta^3}(\delta - 1) - \varphi$ ſoit à $1 + \Delta\alpha + \frac{r^3}{\zeta^3}(\delta - 1)$ comme 1 eſt à $(1+\alpha)^2$.

83. Or comme $\zeta$ eſt variable dans cette proportion, & que tout le reſte y eſt conſtant, il eſt aiſé de voir que cette proportion ne ſauroit jamais avoir lieu en toute rigueur. D'où il s'enſuit qu'un ſphéroïde elliptique fluide & homogene, ayant à ſon centre un noyau ſphérique d'une autre denſité que la ſienne, ne ſauroit être rigoureuſement en équilibre.

84. Mais ſi $\alpha$ eſt fort petit, & par conſéquent $\zeta$ preſque $= 1$, alors l'équation pourra avoir lieu à peu près; & la figure qui donneroit l'équilibre rigoureux ne différera pas ſenſiblement de la figure elliptique.

85. J'ai même démontré ailleurs que si $\delta = \frac{1}{5}$, & que $\alpha$ ſoit ſuppoſé fort petit & $\varphi = 0$, $\alpha$ pourra être d'ailleurs tout ce qu'on voudra, le ſphéroïde ayant la figure à très-peu près elliptique.

86. Il eſt évident que quoique la figure ne ſoit pas rigoureuſement elliptique dans cette hypothéſe (art. 83) il n'en eſt pas moins vrai que le problême a une infinité de ſolutions; car faiſant $\alpha$ très-petit & tel qu'on voudra, & ſuppoſant la figure elliptique, il eſt clair qu'il ne s'en faudra que d'une quantité de l'ordre de $\alpha^2$ que l'équilibre n'ait lieu; donc l'erreur dans la valeur de $\alpha$, ou la correction de $\alpha$, ne peut être que de l'ordre de $\alpha^2$; donc faiſant $\alpha$ indéterminé & arbitraire, mais très-petit, & ſuppoſant le ſphéroïde elliptique, il n'y aura jamais qu'une correction infiniment petite de l'ordre de $\alpha^2$ à faire à la figure de ce ſphéroïde, pour que l'équilibre y ſoit rigoureux. Donc le problême aura une infinité de ſolutions ſi $\delta = \frac{1}{5}$ & que $\alpha$ ſoit fort petit.

87. Si on a un noyau elliptique ſolide, compoſé de couches hétérogenes, dont l'axe variable ſoit $r'$, la denſité variable $\Delta$, & le rayon de l'équateur $r' + \alpha' r' (1 + C'' k k)$, $r$ étant l'axe de la couche ſupérieure de ce noyau, & $r + \alpha r (1 + C' k k)$ l'axe de l'équateur; l'attraction horizontale exercée par ce ſphéroïde ſera, comme je l'ai fait voir ailleurs, (*Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Part. III) égale à $\pi \alpha' \times - k \sqrt{(1 - k k)} \times \frac{8}{7} \times \int \Delta d (r'^5 C'')$; & l'attraction horizontale exercée par le ſphéroïde homogene fluide de la denſité $\delta$, qu'on ſup-

poſe couvrir ce noyau, ſera égale à $\pi a \times - k(1-kk) \times \frac{8\delta C}{5} - \pi a' C' \times - kV(1-kk) \times \frac{8 r^5 \delta}{5} - \frac{8\pi a'}{5} \int \Delta d(r'^5 C'')$, le demi-axe du ſphéroïde fluide étant ſuppoſé $= 1$.

88. Or la force verticale eſt $(4\pi - 4\pi r^3)\frac{\delta}{3} + 4\pi \int \Delta r' r' dr'$; & pour que le ſphéroïde ſoit en équilibre, il faut que cette derniere force multipliée par $-2aCkV(1-kk)$ ſoit égale à la force horizontale, à laquelle il faut ajouter le terme $+\varphi kV(1-kk)$ venant de la force centrifuge.

89. On aura donc, en ſuppoſant $C=1$ & $C'=1$, pour ſimplifier le calcul, l'équation ſuivante; $-\pi a \times \frac{8\delta}{5} + \pi a' \times \frac{8 r'^5 \delta}{5} - \frac{8\pi a' \int \Delta d(r^5 C'')}{5} + \varphi = -2a \times (4\pi - 4\pi r^3)\frac{\delta}{3} - 8a\pi \int \Delta r' r' dr'$.

90. D'où l'on tire $a = \left(\frac{\pi a' . 8 r^5 \delta}{5} - \frac{8\pi a' \int \Delta d(r^5 C'')}{5} + \varphi\right) : \left[\frac{8\pi\delta}{5} - \frac{8\pi\delta}{3} + \frac{8\pi r^3 \delta}{3} - 8\pi \int \Delta r' r' dr'\right]$.

91. Donc lorſque le dénominateur & le numérateur de cette formule ſeront en même-temps égaux à zero, c'eſt-à-dire, lorſqu'on aura $\frac{\delta}{5} - \frac{\delta}{3} + \frac{r^3 \delta}{3} - \int \Delta r' r' dr' = 0$, & $\varphi + \frac{\pi a' . 8 r^5 \delta}{5} - \frac{\pi a' . 8 \int \Delta d(r^5 C')}{5} = 0$, $a$ pourra être tout ce qu'on voudra, pourvû

que $\alpha$ ſoit ſuppoſé très-petit, & le ſphéroïde elliptique.

92. Donc (art. 86) dans le cas des deux équations précédentes, le ſphéroïde en équilibre ſera à très-peu près elliptique, & la différence des axes pourra être ſuppoſée telle qu'on voudra, pourvû qu'elle ſoit très-petite.

*Fin du trentième Mémoire.*

TRENTE-UNIÉME

# TRENTE-UNIE^ME MÉMOIRE.

## *Nouvelles Réflexions ſur les Loix du mouvement des Fluides.*

1. SUPPOSONS, comme dans le quatriéme Mémoire de nos Opuſcules, une maſſe de fluide *ABFE* (*Fig.* 7) renfermée dans un vaſe, laquelle j'imagine d'abord ſans peſanteur, & recevant à une de ſes ſurfaces *AB* ou *FE* une impulſion quelconque; on demande la vîteſſe de chaque particule du fluide au premier inſtant. Soit $CP=x$, $PM=y$, $PO=z$, $Q$ la viteſſe parallèle à $x$, $P$ la viteſſe parallèle à $y$; il eſt clair que comme le temps n'entre point dans l'expreſſion de la vîteſſe au premier inſtant, on aura pour ce premier inſtant, 1°. $Q=\varphi(x,z)$, & $P=\downarrow(x,z)$; 2°. que les particules du fluide animées des vîteſſes $Q$, $P$ en ſens contraire, doivent être en équilibre, d'où l'on tire $\frac{dQ}{dz}=\frac{dP}{dx}$; de plus, l'incompreſſibilité du fluide donnera, comme dans le Mémoire cité, $\frac{dQ}{dx}=-\frac{dP}{dz}$.

2. On aura donc, comme dans ce même Mémoire;

$P = \frac{\phi(x+z\sqrt{-1})+\Delta(x-z\sqrt{-1})}{2}$ ; & $Q = \frac{\phi(x+z\sqrt{-1})-\Delta(x-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$ ; formules d'où l'on tirera abſolument les mêmes concluſions que dans le Mémoire cité ; ſavoir, que le vaſe doit avoir une certaine figure pour que le mouvement du fluide puiſſe être repréſenté par une formule analytique. C'eſt ce qui ſera confirmé par de nouvelles preuves dans la ſuite de ces Recherches.

3. On peut faire encore ſur cette formule les remarques ſuivantes. En premier lieu, pour que $Q$ & $P$ ſoient réels, il eſt néceſſaire que $\phi(x+z\sqrt{-1})$ & $\Delta(x-z\sqrt{-1})$ ſoient des fonctions ſemblables de $x+z\sqrt{-1}$ & $x-z\sqrt{-1}$, de même ou de différens ſignes ; l'une $= A(x+z\sqrt{-1})^m + B(x+z\sqrt{-1})^p + C(x+z\sqrt{-1})^q$, &c. l'autre $= +A(x-z\sqrt{-1})^m + B(x-z\sqrt{-1})^p + C(x-z\sqrt{-1})^q$ ; &c. ou bien l'une $= A\sqrt{-1}(x+z\sqrt{-1})^m + B\sqrt{-1}(x+z\sqrt{-1})^p + C\sqrt{-1}(x+z\sqrt{-1})^q$, &c. & l'autre $= -A\sqrt{-1}(x-z\sqrt{-1})^m - B\sqrt{-1}(x-z\sqrt{-1})^p - C\sqrt{-1}(x-z\sqrt{-1})^q$, &c.

4. On aura donc $Q = \frac{\phi(x+z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} - \frac{\phi(x-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$ ;

& $P = \frac{\phi(x+z\sqrt{-1})+\phi(x-z\sqrt{-1})}{2}$ ;

ou $P = \frac{(\sqrt{-1})\phi(x+z\sqrt{-1})-(\sqrt{-1})\phi(x-z\sqrt{-1})}{2}$ ;

& $Q = \frac{(\sqrt{-1})\phi(x+z\sqrt{-1})+(\sqrt{-1})\phi(x-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$ ;

5. Donc en général la figure du vaſe doit être telle que quand $z = y$, on ait l'équation $\frac{dx}{dy} = \frac{Q}{P} =$ $\frac{\phi(x+y\sqrt{-1}) - \phi(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}[\phi(x+y\sqrt{-1})+\phi(x-y\sqrt{-1})]}$; ou $\frac{dx}{dy} = \frac{\phi(x+y\sqrt{-1})+\phi(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}[\phi(x+y\sqrt{-1})-\phi(x-y\sqrt{-1})]}$; dont l'intégrale eſt $\psi(x+y\sqrt{-1})+\psi(x-y\sqrt{-1}) =$ à une conſtante, où $\sqrt{-1}[\psi(x+y\sqrt{-1}) - \psi(x-y\sqrt{-1})] =$ à une conſtante; c'eſt-à-dire, en général $\psi(x+y\sqrt{-1})+\psi(x-y\sqrt{-1}) =$ à une conſtante réelle, où $\psi(x+y\sqrt{-1})-\psi(x-y\sqrt{-1}) =$ à une conſtante imaginaire.

6. C'eſt cette derniere équation qui a lieu pour le mouvement des fluides dans des vaſes dont les deux parties ſont égales & ſemblables; car dans ces vaſes $z = 0$, doit rendre $P = 0$, donc en ce cas il ne faut point prendre la premiere des deux valeurs de $P$, ſavoir $\frac{\phi(x+z\sqrt{-1})+\phi(x-z\sqrt{-1})}{2}$; mais la ſeconde, ſavoir $\frac{\sqrt{-1}[\phi(x+z\sqrt{-1})-\phi(x-z\sqrt{-1})]}{2}$; d'où réſulte $\psi(x+z\sqrt{-1}) - \psi(x-z\sqrt{-1}) =$ à une conſtante imaginaire.

7. Soit $K$ la force motrice qu'on ſuppoſe agir ſur la ſurface $AB$, pour mouvoir le fluide au premier inſtant; par exemple, la force d'un piſton qui s'exerce ſur toute l'étendue de la ſurface $AB$; il eſt clair que $AB \times K$ ſera = à la denſité du fluide multipliée par la preſſion

que les forces — $Q$ exercent sur la surface $AB$. Donc, nommant $\Delta$ la densité du fluide, on aura $\frac{AB \times K}{\Delta} = \int dz \int Q\,dx$, en ne faisant varier que $x$ dans $\int Q\,dx$, & ensuite ne faisant varier que $z$ dans $\int dz \int Q\,dx$; après quoi il faudra prendre l'intégrale telle qu'elle soit $= 0$ quand $x = 0$, & complette quand $x = CD$. De plus, comme on peut supposer la force motrice $K$, représentée par une masse donnée $= h.\Delta$, animée de la vîtesse donnée $V$, on aura $AB.h.V = \int dz \int Q\,dx$; ou plutôt $CB.h.V = \int dz \int Q\,dx$, en supposant les deux parois $ANE$, $BMF$, semblables & égales.

8. Soit donc, par exemple, l'équation du vase représentée par $\frac{dx}{dy} = \frac{A(x+y\sqrt{-1})^m - A(x-y\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}} \times \frac{1}{A(x+y\sqrt{-1})^m + A(x-y\sqrt{-1})^m}$; on aura ($m$ étant supposé un nombre impair) $CB.h.V = \int dz \times \left[\frac{A(x+z\sqrt{-1})^{m+1}}{(m+1)\sqrt{-1}} - \frac{A(x-z\sqrt{-1})^{m+1}}{(m+1)\sqrt{-1}}\right] =$ (en supposant $CD = a$, & $CB = c$) $- \frac{A(a+c\sqrt{-1})^{m+2}}{(m+1)(m+2)} - \frac{A(a-c\sqrt{-1})^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{2Aa^{m+2}}{(m+1)(m+2)}$.

9. De-là on tire la valeur de $A$, exprimée en quantités connues $h$, $V$, $CB$, $CD$; & ainsi des autres cas.

10. Il faut remarquer de plus qu'il n'y aura jamais qu'une inconnue $A$ à déterminer; car soit, par exemple, $P = A(x+z\sqrt{-1})^m + A(x-z\sqrt{-1})^m + n\,A(x+$

$z\sqrt{-1})^p + nA(x - z\sqrt{-1})^p + rA(x + z\sqrt{-1})^q + rA(x - z\sqrt{-1})^q +$, &c. les quantités $n$, $r$, &c. seront connues par l'équation de la courbe du vase, qui sera $\frac{dx}{dy} = \left[\frac{(x+y\sqrt{-1})^m - (x-y\sqrt{-1})^m}{\sqrt{-1}} + \frac{n(x+y\sqrt{-1})^p - n(x-y\sqrt{-1})^p}{\sqrt{-1}} + ;\ \&c.\right] : \left[(x + y\sqrt{-1})^m + (x - y\sqrt{-1})^m + n(x+y\sqrt{-1})^p + n(x-y\sqrt{-1})^p, \&c.\right]$

11. De plus, comme la surface $EF$ n'est point soutenue, il est nécessaire que les forces qui sont détruites le long de cette surface au premier instant, lui soient perpendiculaires ; d'où l'on voit que $P$ doit être $= 0$, quel que soit $z$, lorsque $x = a$. Enfin, comme l'équilibre demande que les forces détruites soient aussi perpendiculaires à la surface $AB$, il s'ensuit que $P$ devra être aussi $= 0$ quand $x = 0$, quel que soit $z$. Nouvelles conditions qui limitent encore l'équation du vase, & dont nous parlerons ci-après plus en détail.

12. Si on supposoit que les particules du fluide eussent reçu chacune une impulsion primitive à volonté ; soient $M$ & $N$ les vîtesses primitives d'impulsion verticale & horizontale, $M$ & $N$ seront données en $x$ & en $z$, & on aura par la loi de l'équilibre $\frac{dM}{dz} - \frac{dQ}{dz} = \frac{dN}{dx} - \frac{dP}{dx}$ ; de plus, on aura toujours $\frac{dQ}{dx} = -\frac{dP}{dz}$, à cause de l'incompressibilité du fluide ; donc $Q\,dz - P\,dx$, & $M\,dx + N\,dz - Q\,dx - P\,dz$ doivent

être des différentielles complettes.

13. J'ai donné dans mes *Recherches ſur la cauſe des Vents* (art. 87) à l'occaſion d'une condition ſemblable à celle-ci, & à laquelle j'étois arrivé dans ces *Recherches*, la méthode de trouver $P$ & $Q$ lorſque $M$ & $N$ ſont données. On pourra ſe ſervir ici de cette méthode, dont je ſupprime le détail, parce que la ſuppoſition que les particules du fluide ayent reçu chacune au premier inſtant une impulſion à volonté, eſt plus mathématique que conforme à ce qui ſe paſſe dans la nature.

14. Suppoſons préſentement le fluide animé par la ſeule force de la peſanteur, ou par des forces accélératrices quelconques; il eſt d'abord très-clair qu'au commencement du mouvement, lorſque $t$ eſt infiniment petit, on aura $Q = q\theta$, $q$ étant une fonction de $x$ & de $z$, & $\theta$ exprimant une puiſſance de $t$; car les autres termes s'évanouiſſent par rapport à celui-là; on aura de même $P = p\theta'$, $\theta'$ étant une puiſſance de $t$, & $p$ une fonction de $x$ & de $z$. Donc 1°. $\theta = \theta'$, puiſque $\frac{dy}{dx}$ doit être $= \frac{q}{p}$, en mettant $y$ pour $z$ dans $q$ & dans $p$; 2°. ſi on fait le même raiſonnement que dans les *Opuſcules Mathématiques*, tome 1, page 138, il eſt évident qu'on trouvera, pour ce premier inſtant, $B' = -A$ & $B = A'$; en ſuppoſant $dq = Adx + Bdz$, & $dp = A'dx + B'dz$.

15. Pour rendre cette vérité encore plus ſenſible, on

remarquera qu'au commencement du mouvement, on a dans le cas préſent $Q = q\,t^n$, & $P = p\,t^n$, & que ces viteſſes imprimées en ſens contraire doivent faire équilibre avec la peſanteur ; c'eſt-à-dire que les particules du fluide, animées des viteſſes $g - q\,t^n$, & $-q\,t^n$, doivent être en équilibre ; donc $\frac{d(g-q\,t^n)}{dz} = \frac{d(-p\,t^n)}{dx}$ ; donc $B = A'$ ; de plus, la condition $\frac{dq}{dx} = -\frac{dp}{dz}$, ou $A = -B'$ ſubſiſte toujours ; il eſt donc viſible que tout ce qui a été démontré dans le quatriéme Mémoire des *Opuſcules Mathématiques* ſubſiſte dans ce premier inſtant. Donc on ne peut trouver la loi du mouvement du fluide au premier inſtant, à moins que le vaſe ne ſoit aſſujetti à une figure telle qu'elle a été déterminée dans le Mémoire déja cité, & dans l'art. 5 ci-deſſus.

16. On peut remarquer que la puiſſance $t^n$ doit être $= t$ au commencement du mouvement. Cette propoſition eſt démontrée dans mon *Eſſai ſur la réſiſtance des Fluides*, art. 150. On peut remarquer de plus, qu'au commencement du mouvement, on a (art. 7) $\frac{CB \times p\Delta dt}{\Delta} = \int dz \int Q\,dx$ ; ou $CB \times p\,dt = \int dz \int q\,dt\,dx$, ou enfin $p \times CB = \int dz \int q\,dx$ ; d'où l'on tire la valeur de $q$ au premier inſtant, & par conſéquent celle de $p$, puiſque $\frac{dx}{dy} = \frac{p}{q}$.

17. Quand le fluide eſt indéfini, & qu'on a d'ailleurs $B = A'$ & $B' = -A$, équations qui ont toujours lieu

(au moins dans le premier instant) alors supposant $Q = \theta q, p = \theta p$, & $d\theta = T dt$, on satisfera toujours (quelle que soit la fonction $\theta$) à l'équation $\frac{d(g - B\theta^2 p - A\theta^2 q - qT)}{dx} = \frac{d(-\theta^2 q A' - \theta^2 p B' - pT)}{dx}$. M. de la Grange a remarqué, avec raison, que j'avois écrit dans cette formule $\theta$ au lieu de $\theta^2$, par une légere mépriſe de calcul qui n'influe en rien ſur le reſte de mes Recherches. Il faut obſerver de plus, 1°. qu'au commencement du mouvement, c'eſt-à-dire, lorſque $t = 0$, l'équation eſt plus ſimple, & ſe réduit à $\frac{d(g - q\theta)}{dx} = \frac{d(-p\theta)}{dx}$ : 2°. que la fonction $\theta$ doit être $= t$ ou $dt$ (art. 16) : 3°. que comme $CD$ eſt indéfinie, dans le cas dont il eſt queſtion, on ne peut déterminer la quantité $q$ au premier inſtant par l'équation de l'art. 16. Le problême reſte donc indéterminé & comme inſoluble ; &, en effet, en conſidérant la choſe de plus près, il ſaute aux yeux qu'un fluide abſolument & rigoureuſement *indéfini*, tel que nous le ſuppoſons, ne ſauroit être mis en mouvement par la ſeule action de ſa peſanteur, qui ne peut en effet donner de mouvement progreſſif qu'à une maſſe finie. Ce que nous diſons ici de la peſanteur, aura lieu de même, quelle que ſoit la force initiale qu'on ſuppoſe imprimée aux parties du fluide. C'eſt pourquoi nous ſupposerons dans les recherches ſuivantes un fluide d'une étendue finie, à moins qu'on ne veuille ſuppoſer (ce qui eſt permis) que le fluide eſt indéfini, & que par quelque

que cauſe que ce ſoit, ſon mouvement ſoit parvenu à un état conſtant, enſorte qu'aux mêmes coordonnées $x$ & $y$, il réponde toujours la même valeur de $p$ & de $q$.

18. Au commencement du mouvement, les deux ſurfaces étant ſuppoſées horizontales, & le fluide étant ſuppoſé ne recevoir d'impulſion que par la peſanteur, il faut que la force horizontale ſoit nulle dans chacune de ces ſurfaces, afin que la force perdue y ſoit perpendiculaire (art. 11) comme elle le doit être alors. Donc en faiſant $x = 0$, & $x = CD = a$, $P$ doit être $= 0$; c'eſt-à-dire, que $P$ doit être tel qu'en faiſant $z$ quelconque, on ait cette fonction $= 0$, ſi $x = 0$ & ſi $x = a$. Il faut de plus, que la force perdue au commencement du mouvement, ſavoir $gdt - qdt$, ſoit dirigée de haut en bas pour la ſurface ſupérieure, & de bas en haut pour l'inférieure, ſans quoi il ne pourroit y avoir d'équilibre (*Traité des Fluides*, livre premier, art. 99).

19. Enfin, comme la direction du fluide en $A, B, E, F$, doit être néceſſairement le long des parois du vaſe, ſi le fluide en ces points a du mouvement, il réſulte de ce que $P = 0$ en $A, B, E, F$, ou que les parois en $A, B, E, F$, doivent être perpendiculaires aux ſurfaces $AB, EF$, dans la ſituation primitive du fluide; ou que la vîteſſe des particules $A, B, E, F$, doit être abſolument nulle, c'eſt-à-dire, que $q$ & $p$ doivent être l'une & l'autre $= 0$, lorſque $y = 0$. Or de-là il s'enſuit, & on le verra encore dans la ſuite, qu'il eſt abſolument néceſſaire

que le vaſe ait une certaine figure, pour que la ſolution analytique ſoit poſſible.

20. Puiſque $P = A\varphi(x+z\sqrt{-1}) \pm A\varphi(x-z\sqrt{-1})$ (ſavoir + ſi $A$ eſt réel, & − ſi $A$ eſt imaginaire), & qu'en faiſant $x = 0$, on doit avoir $p = 0$, quel que ſoit $z$; il eſt aiſé de voir, 1°. que $\varphi$ doit être une fonction impaire dans le cas de $+A$, & une fonction paire dans le cas de $-A$, afin que $x$ ſe trouve à tous les termes; 2°. que par conſéquent lorſque $x = a$, on aura $p = A\varphi(a+z\sqrt{-1}) \pm A\varphi(a-z\sqrt{-1})$; $\varphi$ étant une fonction impaire ou paire, ſelon que $A$ eſt poſitif ou négatif dans le ſecond membre.

21. Soit $A\varphi(x+u)+A\varphi(x-u)$ une fonction qui doit être $= 0$, lorſque $x$ a deux valeurs différentes $a$ & $b$; ſoit (*Fig.* 10) $MA = b$, $MB = a$, & ſoit tracée une courbe $BACDO$ indéfinie, à branches égales & alternatives, c'eſt-à-dire de maniere que la partie $BA$ ſoit égale & ſemblable à la partie $AC$, ſituée en ſens contraire, la partie $CD$ à la partie $CA$, & ainſi de ſuite; il eſt clair qu'en plaçant l'origine des $u$ en $A$, & ſuppoſant les coordonnées de cette courbe = à une fonction $\varphi(MR)$ des abſciſſes $MR$, on aura 1°. $\varphi(b+u)+\varphi(b-u) = 0$; 2°. $\varphi(a+u)+\varphi(a-u) = 0$.

22. Donc, par exemple, ſi on prend pour plus de ſimplicité, l'origine $M$ des $x$ en $A$, c'eſt-à-dire, $b = 0$, alors la quantité $A$ ſin. $(x+u)+A$ ſin. $(x-u)+B$ ſin. $(x+u)^3+C$ ſin. $(x-u)^3$, &c. & ainſi de ſuite par expoſans impairs, ſatisfera à la condition propoſée,

pourvû que ſin. $a = 0$ ; & ſi l'origine des $M$ étoit ailleurs qu'en $A$, enſorte que $AM$ fût $= b$, & $AB = a$, il faudroit mettre au lieu de $x$ la quantité $x - b$, & ſuppoſer le ſinus de $a - b = 0$.

23. Donc ſi on a $u = z\sqrt{-1}$, il eſt clair que $\varphi(x + z\sqrt{-1}) + \varphi(x - z\sqrt{-1}) = A$ ſin. $(x + z\sqrt{-1}) + A$ ſin. $(x - z\sqrt{-1}) + B$ ſin. $(x + z\sqrt{-1})^3 + B$ ſin. $(x - z\sqrt{-1})^3$ ; &c. & il eſt aiſé de voir que cette quantité ſera toujours réelle, puiſque l'expreſſion du ſinus d'un arc quelconque ne contient que des puiſſances impaires de cet arc.

24. On peut remarquer encore que ſin. $(x + z\sqrt{-1}) =$ ſin. $x$ cof. $z\sqrt{-1} +$ cof. $x$ ſin. $z\sqrt{-1} =$ ſin. $x \times \left(\frac{c^{-t} + c^{t}}{2}\right) +$ cof. $x \left(\frac{c^{-t} - c^{t}}{2\sqrt{-1}}\right)$ ; & qu'ainſi $E$ ſin. $(x + z\sqrt{-1})^p + E$ ſin. $(x - z\sqrt{-1})^p = E \times \left[\left(\frac{c^{-t} + c^{t}}{2}\right)\text{ſin. } x + \text{cof. } x \left(\frac{c^{-t} - c^{t}}{2\sqrt{-1}}\right)\right]^p + E \times \left[\left(\frac{c^{-t} + c^{t}}{2}\right)\text{ſin. } x - \text{cof. } x \left(\frac{c^{-t} - c^{t}}{2\sqrt{-1}}\right)\right]^p$ ; quantité dans laquelle il eſt évident que les imaginaires ſe détruiront, & qui ſera de plus évidemment égale à zero, ſi $x$ eſt telle que ſin. $x = 0$, & cof. $x = \pm 1$, c'eſt-à-dire ſi $x$ eſt $=$ à la demi-circonférence ou à la circonférence, priſe tant de fois qu'on voudra.

25. Soit préſentement $A\varphi(x + u) - A\varphi(x - u)$ une fonction qui doive être $= 0$ lorſque $x = b$, & lorſque $x = a$ ; faiſant donc $MA = b$, $MB = a$, ſoit tracée (*Fig.* 11) une courbe continue $BACD$, dont toutes

les parties ſoient égales, ſemblables, & conſécutives comme dans la cycloïde; il eſt aiſé de voir qu'on aura $\varphi(b+u)-\varphi(b-u)=0$, & $\varphi(a+u)-\varphi(a-u)=0$.

26. Donc ſi on fait, par exemple, $\varphi(x+u)-\varphi(x-u)=A$ ſin. $(x+u)^2-A$ ſin. $(x-u)^2+B\times$ ſin. $(x+u)^4-B$ ſin. $(x-u)^4$, &c. & ainſi de ſuite par les puiſſances paires, en ſuppoſant l'origine $M$ des $x$ en $A$; cette fonction ſatisfera à la condition propoſée.

27. On peut ſuppoſer auſſi $\varphi(x+u)-\varphi(x-u)=A$ cof. $(x+u)-A$ cof. $(x-u)+B$ cof. $(x+u)^2-B$ cof. $(x-u)^2+C$ cof. $(x+u)^3-C$ cof. $(x-u)^3$; & cette quantité ſatisfera à la condition propoſée, pourvû que cof. $a$ ſoit égal au ſinus total..

28. En général, ſi on joint deux à deux les coordonnées correſpondantes de chacune des deux figures 10 & 11, on formera une courbe qui ſera telle que l'on aura $\varphi(x+u)+\Delta(x-u)=0$ quand $x=b$, & quand $x=a$; $\varphi(x+u)$ étant ſuppoſée $=\downarrow(x+u)+\Gamma(x+u)$, & $\Delta(x-u)=\downarrow(x-u)-\Gamma(x-u)$.

29. Il eſt aiſé de tirer de-là, dans l'hypothèſe de $u=z\sqrt{-1}$, une conſtruction qui pourra ſatisfaire au moins à un très-grand nombre de cas, en ſuppoſant $\varphi(x+z\sqrt{-1})+\Delta(x-z\sqrt{-1})=A$ ſin. $(x+z\sqrt{-1})+A$ ſin. $(x-z\sqrt{-1})+B$ ſin. $(2x+2z\sqrt{-1})+B$ ſin. $(2x-2z\sqrt{-1})+C$ ſin. $(3x+3z\sqrt{-1})+C$ ſin. $(3x-3z\sqrt{-1})$, &c. & ainſi de ſuite, ſin. $a$ étant $=0$, c'eſt-à-dire $a$ égal à la demi-circonférence priſe

tant de fois qu'on voudra ; formule de laquelle il eſt aiſé de faire diſparoître les imaginaires par le calcul de l'art. 24 ci-deſſus.

30. On pourra ſuppoſer encore $\varphi(x+z\sqrt{-1})+\Delta(x-z\sqrt{-1})=A\cos.(x+z\sqrt{-1})-A\cos.(x-z\sqrt{-1})+B\cos.(2x+2z\sqrt{-1})-B\cos.(2x-2z\sqrt{-1})+C\cos.(3x+3z\sqrt{-1})-C\cos.(3x-3z\sqrt{-1})$, &c. en ſuppoſant $a$ égal à la demi-circonférence priſe tant de fois qu'on voudra ; quantité dont on fera auſſi diſparoître très-aiſément les imaginaires, en remarquant que $\cos.(px+pz\sqrt{-1})=\cos.px\left(\frac{e^{-pz}+e^{pz}}{2}\right)-\sin.px\left(\frac{e^{-pz}-e^{pz}}{2\sqrt{-1}}\right)$. Au reſte, cette recherche étant purement algébrique, nous nous propoſons de la pouſſer plus loin dans un des Mémoires ſuivans, pour ne point trop nous écarter ici de notre ſujet.

31. Si au lieu de la peſanteur $g$, on ſuppoſe dans toutes les particules du fluide une force primitive, tant verticale qu'horizontale, égale à une fonction de $x, z$ ; il eſt d'abord évident qu'au premier inſtant du mouvement, on aura comme ci-deſſus $Q=qT$, $P=pT$, $T$ étant une fonction ou plutôt une puiſſance de $t$ ; de plus, en nommant $M$ & $N$ les forces verticale & horizontale, on aura l'une de ces deux conditions ; 1°. ou bien $\frac{dM}{dz}=\frac{dN}{dx}$, ſi $T$ n'eſt pas $=t$ ; 2°. ou bien $\frac{dM}{dz}-\frac{dq}{dz}=\frac{dN}{dx}-\frac{dp}{dx}$, ſi $T=t$ ; ſuppoſition qui doit

en effet avoir lieu, comme il eſt aiſé de le prouver par la démonſtration qui a été rappellée dans l'art. 16.

32. On a de plus $\frac{dp}{dz} = -\frac{dq}{dx}$ ; donc $q\,dz - p\,dx$ & $q\,dx + p\,dz + M\,dx + N\,dz$ doivent être des différentielles complettes ; ſur quoi voyez l'art. 12 ci-deſſus.

33. Il eſt à remarquer que ſi on ſuppoſe $M\,dx + N\,dz$ une différentielle complette, c'eſt-à-dire, $\frac{dM}{dz} = \frac{dN}{dx}$, on pourra ſuppoſer, comme dans le quatriéme Mémoire de nos Opuſcules, $Q = q\theta$, $P = p\theta$, $\theta$ étant une fonction de $\theta$ déterminable par la figure du vaſe ; mais ſi $\frac{dM}{dz}$ n'eſt pas $= \frac{dN}{dx}$, alors $\theta$ ne pourra être ſuppoſé égal qu'à $t$, non-ſeulement dans le premier inſtant du mouvement, mais encore dans tous les autres.

34. Mais on peut demander ſi la ſuppoſition de $Q = q\theta$, $P = p\theta$ eſt exacte & aſſez générale ; la preuve que nous en avons donnée dans le quatriéme Mémoire de nos Opuſcules peut d'abord ne pas paroître ſuffiſante ; car ſoit $Q = q\theta + q'\theta' + q''\theta''$, &c. $P = p\theta + p'\vartheta' + p''\vartheta''$, &c. $q'$, $q''$, &c. & $p'$, $p''$, &c. étant des fonctions de $x$ & de $z$, qui ſoient $= 0$ quand $z = y$ ; on aura évidemment $\frac{dx}{dy} = -\frac{q}{p}$ ; équation d'où la variable $t$ a diſparu.

35. Or ſoit $\varphi(x, y) = 0$, l'équation de la courbe du

vaſe ; il eſt viſible qu'on ſatisfera à la condition exigée pour $q', q'', p', p''$, en prenant ces quantités égales à des fonctions quelconques de $\varphi(x, z)$ leſquelles ſoient $= o$ en faiſant $\varphi(x, z) = o$, c'eſt-à-dire, en faiſant $z = y$ ; ou encore en les prenant égales à $(\varphi x, z)^p$ ($p$ étant poſitif) multiplié par une fonction quelconque de $x$ & de $z$. Il y a donc une infinité de manieres de faire enſorte que $Q$ ne ſoit point néceſſairement $= q\theta$, ni $P = p\theta$.

36. Mais d'autres conſidérations vont nous aſſurer que la ſuppoſition de $Q = q\theta$, & de $P = p\theta$, pour le mouvement des fluides, eſt une ſuppoſition légitime, & auſſi générale que la nature de la queſtion le comporte.

37. Imaginons un point $\mathfrak{G}$ (*Fig.* 12) placé infiniment près des parois du vaſe & à la diſtance infiniment petite $\alpha$, priſe ſur la ligne des $y$ ; donc puiſque $Q = q\theta$, & $P = p\theta$ quand $\alpha = o$, & que $\alpha$ eſt ici infiniment petit, il eſt viſible qu'on aura, en ce point $\mathfrak{G}$,

$$Q = q\theta + \alpha R,$$
$$P = \theta p + \alpha S,$$

$R$ & $S$ étant des fonctions de $x, z, t$.

38. De plus, nommant $\alpha\delta$, $\mathfrak{G}$, & $\alpha\mathfrak{G}, \delta$, l'incompreſſibilité du fluide donnera $[\mathfrak{G}(1 + \frac{d(q\theta)dt}{dx}) + \delta\omega.Rdt] \times [\delta(1 + \frac{d(p\theta)dt}{dy}) + \alpha\mathfrak{G}.Sdt] = \mathfrak{G}\delta$.

39. Donc puiſque $\delta\omega$ eſt ici $= \frac{\alpha\delta \times P}{Q} = \frac{\mathfrak{G}P}{Q}$, on aura $\frac{\delta\mathfrak{G}d(q\theta)}{dx} + \frac{\delta\mathfrak{G}PR}{Q} + \frac{\mathfrak{G}\delta d(p\theta)}{dy} + \mathfrak{G}\delta S$

$= 0$ ; ou $\frac{d(q\delta)}{dx} + \frac{Rp}{q} + \frac{d(p\delta)}{dy} + S = 0$.

40. On peut remarquer de plus, que la force perdue verticalement pour les points qui ſont à la diſtance $\alpha\zeta$ ou $\delta$ du vaſe, eſt $g - \frac{dQ}{dt} - \frac{dQ.dx}{dx.dt} - \frac{dQ.dy}{dy.dt} - \frac{\delta dR}{dt} - \frac{\delta dR.dx}{dx.dt} - \frac{\delta dR.dy}{dy.dt}$ ; & la force perdue horizontalement pour les points qui ſont à la diſtance $\delta\varpi = \alpha'$ des parois du vaſe, eſt $- \frac{dP}{dt} - \frac{dP.dx}{dx.dt} - \frac{dP.dy}{dy.dt} - \frac{\alpha' dS}{dt} - \frac{\alpha' dS.dx}{dx.dt} - \frac{\alpha' dS.dy}{dy.dt}$.

41. Donc en mettant dans les numérateurs des fractions, pour $dx$ ſa valeur $Q\,dt + \delta R\,dt$, & pour $dy$ ſa valeur $P\,dt + \delta S\,dt$, dans l'expreſſion de la force verticale ; & dans celle de la force horizontale $Q\,dt + \alpha' R\,dt$ au lieu de $dx$, & $P\,dt + \alpha' S\,dt$ au lieu de $dy$, & négligeant le quarré de $\delta$ & celui de $\alpha'$, les deux forces perdues ſeront $g - \frac{dQ}{dt} - \frac{dQ.Q}{dx} - \frac{dQ.P}{dy} - \frac{\delta dQ.R}{dx} - \frac{\delta dQ.S}{dy} - \frac{\delta dR}{dt} - \frac{\delta QdR}{dx} - \frac{\delta PdR}{dy}$ ; & $- \frac{dP}{dt} - \frac{dP.Q}{dx} - \frac{dP.P}{dy} - \frac{\alpha' dP.R}{dx} - \frac{\alpha' dP.S}{dy} - \frac{\alpha' dS}{dt} - \frac{\alpha' QdS}{dt} - \frac{\alpha' PdS}{dy}$.

42. Les mêmes forces dans les points adhérens aux parois du vaſe, ſont $g - \frac{dQ}{dt} - \frac{QdQ}{dx} - \frac{PdQ}{dy}$ ,

&

& $-\frac{dP}{dt}-\frac{QdP}{dx}-\frac{PdP}{dy}$.

43. Donc le poids de la colonne $\alpha\delta$, moins le poids de la colonne $\zeta\gamma = \left(g-\frac{dQ}{dt}-\frac{QdQ}{dx}-\frac{PdQ}{dy}\right)\times\alpha\delta$, moins $\left(g-\frac{dQ}{dt}-\frac{QdQ}{dx}-\frac{PdQ}{dy}-\frac{\delta dQ.R}{dx}-\frac{\delta SdQ}{dy}-\frac{\delta dR}{dt}-\frac{\delta QdR}{dx}-\frac{\delta PdR}{dy}\right)\times\zeta'\gamma$; & le poids de la colonne $\zeta\alpha$ moins celui de la colonne $\gamma\delta = \left(-\frac{dP}{dt}-\frac{QdP}{dx}-\frac{PdP}{dy}\right)\times\zeta$, moins $\left(-\frac{dP}{dt}-\frac{QdP}{dx}-\frac{PdP}{dy}-\frac{\alpha'RdP}{dx}-\frac{\alpha'SdP}{dy}-\frac{\alpha'dS}{dt}-\frac{\alpha'QdS}{dx}-\frac{\alpha'PdS}{dy}\right)\gamma\delta$.

44. Or, par la loi de l'équilibre, ces deux quantités doivent être égales; on aura donc $\frac{d\left(g-\frac{dQ}{dt}-\frac{QdQ}{dx}-\frac{PdQ}{dy}\right)}{dy}\times\zeta\delta-\left(\frac{\delta dQ.R}{dx}+\frac{\delta SdQ}{dy}+\frac{\delta dR}{dt}+\frac{\delta QdR}{dx}+\frac{\delta PdR}{dy}\right)\times\zeta = \frac{d\left(-\frac{dP}{dt}-\frac{QdP}{dx}-\frac{PdP}{dy}\right)}{dy}\times\zeta\delta-\left(\frac{\alpha'dP.R}{dx}+\frac{\alpha'dP.S}{dy}+\frac{\alpha'dS}{dt}+\frac{\alpha'QdS}{dx}+\frac{\alpha'PdS}{dy}\right)\times\delta$.

45. Donc mettant pour $\alpha'$ sa valeur $\frac{\zeta P}{Q}$, & pour $S$ sa valeur $-\frac{R.P.}{Q}-\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}$ (art. 39); on aura

une équation d'où $S$ disparoîtra; & qui, en substituant pour $Q$ & $P$ leurs valeurs $\theta q$ & $\theta p$, & pour $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dQ}{dy}$, & $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP}{dy}$, leurs valeurs $\theta A$, $\theta B$, & $\theta A'$, $\theta B'$, sera de la forme suivante

$$\frac{d(-B\theta^2 p - A\theta^2 q - qT)}{dy} - (R\theta A + \frac{dR}{dt} + \frac{\theta q\, dR}{dx} + \frac{\theta p\, dR}{dy} - \frac{Rp\theta B}{q} - \theta^2 BA - \theta^2 BB') = \frac{d(-pT - \theta^2 pB' - \theta^2 qA')}{dx}$$

$$- \left[ \frac{Rp\theta A'}{q} + \frac{\theta B' p}{q}\left(-\frac{Rp}{q} - A\theta - B'\theta\right) + \frac{p}{q} \times \frac{d(-\frac{Rp}{q})}{dt} + \frac{p}{q}\left(-AT - B'T + p\theta \times \frac{d(-\frac{Rp}{q} - A\theta - B'\theta)}{dx}\right) + \frac{\theta p^2}{q} \times \frac{d(-\frac{Rp}{q} - A\theta - B'\theta)}{dy} \right].$$

46. Or je vais prouver qu'on ne peut satisfaire à cette équation (dont les deux membres doivent être identiques) par aucune autre supposition que par celle de $R = \theta\Lambda$; $\Lambda$ étant une fonction de $x$ & de $z$.

47. Car en premier lieu, $\alpha R$ ou $R\,dy$ est la différentielle d'une fonction qui doit être $= 0$ lorsque $z = y$, quel que soit $t$; donc $\int R\,dy$ prise en ne faisant varier que $y$, doit être $= 0$ quel que soit $t$, lorsque $z = y$; d'où il s'ensuit que $R$ sera nécessairement de cette forme $R = \vartheta\lambda + \vartheta'\lambda' + \vartheta''\lambda''$, &c. $\vartheta$, $\vartheta'$, $\vartheta''$ désignant des fonctions de $t$, & $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ des fonctions de $x$ & de $z$, qui soient telles que $\int \lambda\, dy$, $\int \lambda'\, dy$, $\int \lambda''\, dy$, deviennent $= 0$ quand $z = y$.

48. Donc si $R$ n'est pas $= \theta A$, c'est-à-dire si $\vartheta$, $\vartheta'$, $\vartheta''$ sont différens entr'eux & différens de $\theta$, il est aisé de voir qu'on ne pourra satisfaire à l'équation générale de l'art. 45, qu'en supposant $\vartheta = M e^{\int N \theta dt}$, $\vartheta' = M' e^{\int N' \theta dt}$, $\vartheta'' = M'' e^{\int N'' \theta dt}$; &c. $M, N, M', N'$, &c. étant des constantes; car ce n'est que par cette supposition qu'on pourra rendre les membres de l'équation identiques, & avoir des équations de condition indépendantes des valeurs particulieres de $x$, $z$ & $t$. Si on donnoit à $\vartheta$, $\vartheta'$, $\vartheta''$, &c. d'autres valeurs, on auroit plus d'équations de condition qu'on n'a d'inconnues $p$, $q$, à déterminer.

49. Cela posé, on auroit, lorsque $t$ est infiniment petit, $\vartheta = M(1 + \int N \theta dt)$; $\vartheta' = M'(1 + \int N' \theta dt)$; $\vartheta'' = M''(1 + \int N'' \theta dt)$, &c.

50. De plus, il est visible que quand $t$ est infiniment petit & $z = y$, on a $Q = q\theta$, & $P = p\theta$, & qu'alors $\theta = t$ (art. 16).

51. Donc $t$ étant infiniment petit, on auroit $\vartheta = M\left(1 + \frac{Nt^2}{2}\right)$, $\vartheta' = M'\left(1 + \frac{N't^2}{2}\right)$, $\vartheta'' = M''\left(1 + \frac{N''t^2}{2}\right)$, &c.

52. Donc lorsque $t$ est infiniment petit, on auroit $Q = qt + \alpha\lambda\left(M + \frac{MNt^2}{2}\right) + \alpha\lambda'\left(M' + \frac{M'N't^2}{2}\right) +$ ; &c. quantité dans laquelle les termes $\alpha M\lambda$, $\alpha M'\lambda'$, &c. ne renferment point $t$.

53. Or quand $t$ est égal à zero, on doit avoir $Q = 0$,

& par conſéquent $\theta q = 0$, $q$ exprimant une fonction de $x$ & de $z$. Donc dans les autres termes de l'expreſſion de $Q$, & par conſéquent dans celle de $\vartheta$, les termes où $t$ ne ſe trouve point doivent diſparoître ; d'où il eſt clair que $\lambda M + \lambda' M' + \lambda'' M'' = 0$. Donc puiſque (*hyp.*) $M$, $M'$, &c. ſont des conſtantes arbitraires, & $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, &c. différentes fonctions de $x$ & de $z$, on aura $\lambda M = 0$, $\lambda' M' = 0$, $\lambda'' M'' = 0$. Donc ſi $R$ n'eſt pas $= \theta \Lambda$, on aura $\vartheta = 0$, $\vartheta' = 0$, $\vartheta'' = 0$.

54. Maintenant ſi $R = \theta \Lambda$, il eſt viſible qu'on aura $Q = q\theta + \theta \Lambda$, ou plus ſimplement $Q = \theta q'$, $q'$ étant une fonction de $x$ & $z$, comme on l'a ſuppoſé ; donc auſſi à cauſe de $S = -\frac{Rp}{q} - \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}$, on aura $P = p'\theta$.

55. Donc la ſuppoſition de $Q = q\theta$ & $P = p\theta$ eſt légitime dans tous les cas.

56. On peut ajouter (en confirmation de la démonſtration précédente) que ſi $R$ n'étoit pas $= \theta \Lambda$, alors ſubſtituant pour $R$ la valeur $M\lambda c^{N\int dt} + M'\lambda' c^{\int N' dt} + M''\lambda'' c^{\int N'' dt} +$, &c. on auroit différentes équations pour $\lambda$ & $\lambda'$, $\lambda''$, &c. dont chacune ſeroit de la forme ſuivante, $\lambda MA + MN\lambda + \frac{qMd\lambda}{dx} + \frac{Mpd\lambda}{dy} - \frac{MpB\lambda}{q} = \frac{MpA'\lambda}{q} - \frac{MppB'\lambda}{qq} - \frac{MNpp\lambda}{qq} - \frac{pMd\left(\frac{p\lambda}{q}\right)}{dx} - \frac{ppM}{q}\frac{d\left(\frac{p\lambda}{q}\right)}{dy} = 0$ ; d'où l'on tire

roit la valeur de $\lambda$ en $p$ & en $q$, $dp$ & $dq$. Or $R\,dy$ ou $\alpha R$ eſt la différence d'une fonction de $x$ & de $y$, laquelle eſt $= 0$. Donc $\int R\,dy + X = 0$. Donc mettant dans cette équation pour $R$ ſa valeur $\vartheta\lambda + \vartheta'\lambda' + \vartheta''\lambda''$, &c. & au lieu de $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, &c. leurs valeurs en $p$ & en $q$, on auroit une équation de condition entre $p$ & $q$, ce qui limiteroit encore plus la nature des fonctions $p$ & $q$, que ne font les équations $dq = A\,dx + B\,dz$, & $dp = B\,dx - A\,dz$, tirées de la condition $Q = q\theta$, & $P = p\theta$. Donc les ſuppoſitions de $Q = q\theta$, & $P = p\theta$, ſont légitimes, ainſi que les conſéquences qu'on en a tirées.

57. On voit donc que dans l'hypothèſe même d'un fluide homogene, il y a une infinité de cas où le problême eſt inſoluble. Suppoſons maintenant que le fluide ſoit hétérogene, la denſité $\Delta$ de chaque particule ne pourra être repréſentée algébriquement, que par une fonction de $x$ & de $z$. Or il eſt viſible que cette maniere de repréſenter la denſité ſeroit illuſoire, puiſque les parties du fluide, en changeant de place, conſervent toujours leur même denſité. Ainſi l'inſolubilité du problême eſt, pour ainſi dire, encore plus grande dans ce cas que dans celui de l'homogenéité du fluide.

58. Dans l'art. 110 de notre *Traité des Fluides*, nouvelle édition (*a*), & dans l'appendice de la premiere édition, pag. 452 & ſuivantes, nous avons taché d'expliquer, pourquoi un fluide qui ſe meut dans un vaſe en

(*a*) Cette nouvelle édition eſt ſous preſſe.

vertu de ſa peſanteur, conſerve ſenſiblement ſa ſurface ſupérieure horizontale. La raiſon que nous en avons donnée eſt fondée ſur ce que les forces verticales $Q$ ſont égales ou à peu près égales à tous les points de la ſurface ſupérieure, & cette égalité eſt fondée ſur ce que les forces $P$, s'il y en avoit, ſeroient détruites à la ſurface par la force d'adhérence des parties du fluide. Or, pour l'exactitude de la démonſtration, il eſt néceſſaire (Mémoire 30 précédent, art. 39) que la force d'adhérence détruiſe les forces $P$, non-ſeulement à la ſurface, mais dans l'intérieur du fluide; ſuppoſition qui n'a rien en ſoi que de fort naturel; car dès qu'on ſuppoſe que la force d'adhérence détruit à la ſurface les forces $P$, pourquoi ne les détruiroit-elle pas de même dans l'intérieur du fluide? D'ailleurs, l'expérience confirme cette ſuppoſition; car puiſqu'elle nous fait voir qu'en effet toutes les tranches du fluide deſcendent horizontalement, il s'enſuit que la force verticale $Q$ eſt la même dans tous les points de chaque tranche horizontale, & que par conſéquent la force horizontale $P$ eſt $= 0$. Si on n'a point d'égard à l'adhérence, ni à aucune cauſe qui détruiſe les forces $P$, & que les parois du vaſe ne ſoient pas parallèles à $CD$ (*Fig.* 7) en $A, B, F, E$, en ce cas il faudra néceſſairement (art. 19) que $P$ & $Q$ ſoient $= 0$ en ces quatre points, afin que la force perdue, qui eſt ici la peſanteur, ſoit dirigée verticalement. Donc en ſuppoſant $P = \frac{\phi(x+2V-z)-\phi(x-2V-z)}{2V-1}$,

& $Q = \frac{\varphi(x+z\sqrt{-1})+\varphi(x-z\sqrt{-1})}{2}$, il faudra qu'en faisant $x = 0, z = CB$, & $x = CD, z = DF$, on ait $P$ & $Q = 0$. Or je vois d'abord qu'en $E$ & qu'en $F$, la force perdue $g$, égale à la pesanteur, seroit dans cette supposition dirigée de haut en bas, au lieu que pour l'équilibre, elle doit être dirigée de bas en haut; d'où il s'enfuit que les parois du vase doivent être nécessairement parallèles à $CD$ aux points $E$, $F$, pour que le mouvement du fluide puisse être représenté (même au premier instant) par une formule analytique. Il suffira donc que $x = 0$ donne $P = 0$; & de plus, $Q = 0$ lorsque $z = CB$. Il faut donc 1°. que $\varphi(x+z\sqrt{-1})$ & $\varphi(x-z\sqrt{-1})$ soient $= 0$ quand $x = 0$ & quand $z = CB$; il faut de plus, 2°. que $\varphi(x+z\sqrt{-1})$ soit $= \varphi(x-z\sqrt{-1})$ quand $x = 0$, quelle que soit $z$. 3°. Enfin, il faut que quand $x = CD$, $\varphi(x+z\sqrt{-1})$ soit $= \varphi(x-z\sqrt{-1})$, quel que soit $z$. Nous avons déja donné, & nous donnerons encore plus bas, des méthodes pour trouver les valeurs de $\varphi x$, qui satisfont à la seconde & à la troisiéme de ces conditions; il faudra de plus prendre $\varphi x$ telle qu'elle satisfasse à la premiere. Nouvel objet de recherche pour les Géometres, & qui limite encore la solution du problême, en diminuant le nombre des cas où le mouvement du fluide peut être représenté par une formule analytique.

59. Nous terminerons ces remarques par une considération plus approfondie des loix du mouvement des

fluides, & par une maniere plus générale de parvenir à l'équation $B' = -A$, qui renferme une de ces loix. Soient (*Fig.* 12) les lignes $AD$, $BF$, $CH$ perpendiculaires à $AC$; $DE$, $FG$ parallèles à $AC$; $AB = a$, $BC = b$, $EF = \delta$, $GH = e$; il eſt viſible que le triangle $DFH$ eſt égal à $ABFD + BFHC - ACHD = DEF + EFHO - DOH = \frac{a\delta}{2} + b\left(\delta + \frac{e}{2}\right) - (a+b)\left(\frac{\delta+e}{2}\right) = \frac{b\delta}{2} - \frac{ae}{2}$.

6o. Or, en ſuppoſant $AD$ parallèle à la ligne des $x$, & $AC$ à celle des $y$, il eſt viſible qu'après l'inſtant $dt$, la quantité $a$ devient $a + \frac{adt.dp}{dy} + \frac{\delta dt.dp}{dx}$; que la quantité $b$ devient de même $b + \frac{bdt.dp}{dy} + \frac{edt.dp}{dx}$; que la quantité $\delta$ devient $\delta + \frac{\delta dt.dq}{dx} + \frac{qdt.dq}{dy}$; & que la quantité $e$ devient $e + \frac{edt.dq}{dx} + \frac{bdt.dq}{dy}$; donc en mettant pour $\frac{dq}{dx}$, $\frac{dq}{dy}$, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{dp}{dy}$, leurs valeurs $A$, $B$, $A'$, $B'$, il faudra, à cauſe de l'incompreſſibilité du fluide, que l'on ait $b\delta - ae = (b + bdt \times B' + edt.A')\times(\delta + \delta dt.A + adt.B) - (a + adt \times B' + \delta dt.A')\times(e + edt.A + bdt.B)$; ou en négligeant le quarré de $dt$, $\delta bB' + e\delta A' + Ab\delta + Bba - B'ae - A'\delta e - Aea - Bba = 0$; ou $A(\delta b - ea) + B'(\delta b - ea) = 0$. Donc $B' = -A$, ou $\delta b - ea = 0$; or l'équation $\delta b - ea = 0$ donneroit $\frac{\delta}{a} = \frac{e}{b}$;

ou

ou $\frac{EF}{ED} = \frac{GH}{FG}$, & par conſéquent les points $D, F, H$ ſeroient en ligne droite. Mais on ſuppoſe que les points $D, F, H$, ſont diſpoſés entr'eux d'une maniere quelconque ; il s'enſuit donc qu'on doit avoir néceſſairement $B' = -A$.

61. Si $GH(e)$ eſt $= 0$, c'eſt-à-dire, ſi $FH$ eſt parallèle à l'axe des $y$, la quantité $b\Pi - ae$ ou $b\Pi$, devient dans le ſecond inſtant $(b + bdt.B') \times (\Pi + \Pi dt.A + adt.B) - aBbdt$ ; & cette derniere quantité $-abBdt$ n'eſt $= 0$ que dans le cas où $a = 0$, c'eſt-à-dire où $DF$ eſt parallèle à l'axe des $x$, comme $FH$ l'eſt ſuppoſé à l'axe des $y$ ; nous diſons dans le cas où $a = 0$ ; car $e$ étant $= 0$, & $FH = b$, on ne pourroit ſuppoſer $b = 0$ dans la quantité $-abBdt$, ſans anéantir le triangle $DFH$, qui ne doit point ici être ſuppoſé nul.

62. On voit donc que la quantité $b\Pi$ ne devient $(b + bB'dt) \times (\Pi + \Pi Adt)$ après l'inſtant $dt$, que dans le cas où $a = 0$, c'eſt-à-dire, où $DFH$ eſt un triangle rectangle en $F$. Lorſque l'angle $F$ n'eſt pas droit, alors $\Pi$ devient après l'inſtant $dt$, $\Pi + A\Pi dt + Badt$, comme il eſt d'ailleurs aiſé de le voir ; mais, en ce cas, il faut retrancher la quantité $aBbdt$ du produit $(b + B'bdt) \times (\Pi + A\Pi dt + Badt)$, pour parvenir dans tous les cas à la même équation $B' = -A$.

63. Cette remarque nous a paru néceſſaire pour aller au-devant d'une difficulté. Il ſemble que lorſque $e = 0$, & que par conſéquent $FH$ eſt horizontale, le triangle

$DFH$ devienne après l'instant $dt$, $(b + bdt.B')(\delta + A\delta dt + Badt)$, ce qui ne donneroit pas l'équation $B' = -A$; mais il faut remarquer que quand l'angle $F$ n'est pas droit, le triangle $DFH$ n'est véritablement le produit de $\frac{FH}{2}$ par $DO$ (*Fig.* 13), que lorsque $FH$ est véritablement & rigoureusement perpendiculaire à $DO$. Si par exemple $FH$ prenoit la situation $Fh$, le triangle $DFh$ ou $\frac{b\delta - ae}{2}$ seroit égal (à cause de $e = -Oo$) à $\frac{Fh' \times DO + FO \times Oo}{2}$, quantité qui n'est $= \frac{Fh' \times DO}{2}$ que dans le cas où $FO = o$, c'est-à-dire quand l'angle $F$ est droit ou infiniment peu différent d'un droit.

64. On voit donc que lorsque l'on a quatre points du fluide, $D$, $F$, $G$, $H$, (*Fig.* 14) qui forment un parallélogramme rectangle dans un instant quelconque, on a raison de supposer, comme nous l'avons fait, que dans l'instant suivant le parallélogramme $DFHG$, devient le produit de la nouvelle hauteur $(\delta + A\delta dt)$ par la nouvelle base $(b + B'bdt)$; il n'en seroit pas ainsi si l'angle en $F$ n'étoit pas droit, le calcul deviendroit un peu plus compliqué; mais le résultat (art. 60) seroit toujours le même.

65. Il est encore à propos de remarquer que tous les points qui sont dans la même ligne droite $DF$, ainsi que dans les droites $DG$, $GH$, $HF$, n'y sont plus après l'instant $dt$, mais forment un arc de courbe; cependant comme l'arc formé par les points de la ligne $DF$, est

égal & ſemblable (à un infiniment petit du troiſiéme ordre près) à l'arc formé par les points de la ligne $GH$, & qu'il en eſt de même des arcs formés par les points des lignes $DG$, $FH$, les ſegmens correſpondans, formés par ces arcs & par leurs cordes, ſeront cenſés égaux, puiſqu'ils ne différeront que d'un infiniment petit du quatriéme ordre; & par conſéquent la figure curviligne, formée par le parallélogramme $DGHF$ après l'inſtant $dt$, ſera cenſée égale (à un infiniment petit du quatriéme ordre près) à la figure rectiligne formée par les cordes des arcs.

66. Nous avons cru que ces différentes remarques ne ſeroient pas inutiles pour répondre à quelques difficultés qu'on pourroit ſe former contre notre théorie du mouvement des fluides; difficultés fondées ſur la figure rigoureuſe que le parallélogramme rectangle $DGHF$ doit prendre après l'inſtant $dt$; nous venons de prouver ſuffiſamment que cette figure (conſidérée telle qu'elle eſt en rigueur) ne change rien au réſultat de nos calculs.

*Fin du trente-uniéme Mémoire.*

# TRENTE-DEUXME MÉMOIRE.

*Suite des mêmes Recherches.*

## §. I.

*Sur le mouvement d'un Fluide dans un Tuyau Cylindrique.*

1. Soit un vaſe rectangulaire $ABDC$, (*Fig.* 15) terminé par la partie rectiligne $CEFD$, & ayant l'ouverture $EF$ par où l'eau s'écoule; ſoit $HB = k$, $GF = nk$, $OG = mk$, $p$ la peſanteur, $\gamma dt$ la vîteſſe de la ſurface $AB$ du fluide au premier inſtant, $HP = x$, $OP = z$, $pm = u$; on aura au premier inſtant $pdt \times (HG) = \gamma dt\left(\int\frac{kdx}{Pn} + \int\frac{kdz}{u}\right) = \gamma dt\,(HO + \int\frac{kdz}{u}) > \gamma dt(HO + \int dz) = \gamma dt(HG)$; donc $\gamma < p$.

2. Soit à préſent remarqué que $u = pS - Sm = k - z \times \frac{Dq}{Fq} = k - z \times \frac{k - nk}{mk} = k - z\left(\frac{1-n}{m}\right)$; d'où il eſt aiſé de voir que la quantité $\int\frac{kdz}{u} =$

$\frac{km}{1-n}\log.\left[\frac{k}{k-k(1-n)}\right]=\frac{km}{1-n}\log.\frac{1}{n}=0,6\times\frac{1}{1-n}\log.\frac{1}{n}$.

3. Pour faire uſage de cette formule, on ne doit pas oublier de remarquer, que quand on aura trouvé par les tables le logarithme de $\frac{1}{n}$, il faudra le diviſer par la ſoutangente 0,434294 de la logarithmique des tables; ou ce qui eſt la même choſe, le multiplier par 2,302585. En effet, quand on ſuppoſe que $\int\frac{dx}{x}$ eſt égal à log. $x$, ou $\int\frac{-dx}{x}$ égal à log. $\frac{1}{x}$, en prenant la ſoutangente de la logarithmique = à l'unité, en ce cas le log. de 10, ou le rapport du logarithme de 10 à l'unité, c'eſt-à-dire à la ſoutang. de la logarithmique, ſera, comme l'on ſait, égal à 2,3025850929940456; or comme on le ſuppoſe que 1,0000000000000000 eſt le logarithme de 10 dans les tables, c'eſt-à-dire, que le logarithme de 10, dans la logarithmique des tables, eſt = à 1; il s'enſuit que ſi $t$ eſt la ſoutangente de la logarithmique des tables, on aura, par la propriété des logarithmiques comparées entr'elles, $\frac{1}{t}=2,302585$, &c. Donc $t=0,4342944819$, donc $\int\frac{dx}{x}=2,3025\,8$, lorſque $x=10$, & 4,605516, lorſque $x=100$, &c.

4. Donc ſi le logarithme de $\frac{1}{n}$, pris dans les tables,

est appellé $q$, on aura $\gamma = \frac{pHG}{HO + \frac{OG}{1-n} \times q \times 2,302585} = \frac{p \times HG}{HG + OG(q \times \frac{2,302585}{1-n} - 1)}$.

5. Il est très-aisé de voir, en considérant que la logarithmique est toute convexe vers son axe, que le rapport du logarithme $q$ de $\frac{1}{n}$, à $1-n$, est plus grand que le rapport de la soutangente de la logarithmique à l'unité, c'est-à-dire, que 0,434294 ou $\frac{1}{2,302585}$; ainsi, $\frac{q \times 2,302585}{1-n}$ est toujours $> 1$; & par conséquent le dénominateur de la valeur de $\gamma$ sera plus grand que $HG$ & $\gamma < p$; c'est ce que nous avons d'ailleurs prouvé dans notre *Traité des Fluides* d'une maniere générale, quelles que soient les lignes $CE$, $FD$, droites ou courbes.

6. Si $n = \frac{1}{10}$, on aura $\frac{q \times 2,3}{1-n} - 1 = \frac{23}{9} - 1 = \frac{14}{9}$. Si $n = \frac{1}{100}$, on aura $\frac{q \times 2,3}{1-n} - 1 = \frac{20 \times 23}{99} - 1 = \frac{361}{99}$. Dans ce dernier cas, si $OG = \frac{HG}{10}$, la valeur de $\gamma$ sera à très-peu près $\frac{p}{1 + \frac{35}{99}} =$ à très-peu près $\frac{p \times 100}{136} = \frac{p \times 25}{34} =$ à très-peu près $\frac{p \times 3}{4}$, & par conséquent beaucoup plus petite que $p$. Si $n = \frac{1}{50}$, on trouve, par les tables, $q =$ à très-peu près $\frac{17}{10}$,

& par conſéquent $\frac{9\times 2,3}{1-n}-1=\frac{17,23}{2,49}-1=\frac{293}{249}$; donc ſi $OG=\frac{HG}{5}$, on aura $\gamma=\frac{p}{1+\frac{44}{78}}=\frac{49p}{78}=\frac{p}{2}+\frac{10p}{78}$, quantité qui eſt évidemment beaucoup plus petite que $p$.

7. Pour avoir une conſtruction géométrique facile de la valeur de $\frac{km}{1-n}\log.\frac{1}{n}$; on conſtruira d'abord une logarithmique quelconque $BGML$ (*Fig.* 16); & on remarquera, 1°. qu'en prenant $\frac{BA}{GF}=\frac{1}{n}$, on aura $\log.\frac{1}{n}=\frac{AF}{b}$, $b$ étant la ſoutangente de cette logarithmique; 2°. que par conſéquent, ſi on fait $AB=km$, on aura $BH=km(1-n)$, & par conſéquent encore $\frac{km}{1-n}\log.\frac{1}{n}=k^2m^2\times\frac{HG}{b.BH}=$ (en ſuppoſant $AK=b$) $\frac{BA^2}{AK}\times\frac{AV}{BA}=BA\times\frac{AV}{AK}=AO$, en menant $VO$ parallèle à la tangente $BK$.

8. Donc ſi on veut que $\gamma=\rho p$, $\rho$ exprimant une fraction quelconque, on aura $\frac{HG}{HG+AO}=\rho$, & par conſéquent $AO=\frac{HG(1-\rho)}{\rho}$. Prenant donc $AO=$ à cette valeur, & en même-temps $BA=km$, & tirant d'abord la tangente $BK$, & $OV$ parallèle à cette tangente, & enſuite la ligne $BGV$ par les points $B$, $V$, le

point $G$ donnera la demi-largeur que le trou du vaſe doit avoir, pour que $\gamma = \rho p$ : car cette demi-largeur ſera à la demi-largeur du vaſe cylindrique, comme $GF$ eſt à $AB$.

9. Si on fait (*Fig.* 15) $OG = n\,HG$, on remarquera que $OG \times \frac{1}{1-n} \log. \frac{1}{n} =$ ( en faiſant $\frac{1}{n} = k'$ ) $\frac{HG}{k'-1} \log. k'$. Or il eſt aiſé de voir, par la nature de la logarithmique, que cette quantité va toujours en diminuant ; car ſoit (*Fig.* 17) $CA = 1$, & $DB = k'$, on aura $\frac{\log. k'}{k'-1} = \frac{EC}{DE}$, quantité qui va toujours en diminuant, parce que la logarithmique eſt toujours convexe vers ſon axe, & lui devient enfin perpendiculaire lorſque $k' = \infty$. De-là il s'enſuit que ſi $OG$ (*Fig.* 15) : $HG :: EF : CD$, $\gamma$ ſera d'autant plus près d'être égal à $p$ que $EF$ ſera plus petit, & la valeur de $\frac{\gamma}{p}$ ſera en général = à très-peu près $\frac{1}{1 + \frac{2,3 \log. k'}{k'-1}}$,

10. Si $OG$ étoit toujours $= \pi \times GF$, $\pi$ étant une conſtante, on auroit $\frac{OG}{1-n} \log. \frac{1}{n} = \frac{\pi \times n \times OD}{1-n} \log. \frac{1}{n} = \pi \times OD \times \frac{\log. k'}{k'-1}$, & par conſéquent encore d'autant plus petit que $GF$ ſeroit plus petit.

11. Si les lignes $CE$, $DF$, au lieu d'être droites, étoient convexes vers $OG$, alors il eſt aiſé de voir que $\int \frac{k\,dz}{u}$ ſeroit $> \frac{OG}{1-n} \log. \frac{1}{n}$ ; & au contraire, ſi ces courbes

courbes étoient concaves ; bien entendu qu'on ſuppoſe, dans tous ces cas, qu'il n'y a dans la partie $CEFD$ aucune portion du fluide qui ſoit ſtagnante proche des parois, & que toutes les tranches deſcendent horizontalement. Je n'entrerai point là-deſſus dans un plus grand détail ; il me ſuffit d'avoir prouvé que $\gamma$, quoiqu'en rigueur toujours $< p$, peut être, ou auſſi petit, ou auſſi peu différent de $p$ qu'on voudra, ſelon les hypothèſes qu'on pourra faire ſur les valeurs de $OG$ & de $EF$, & leur rapport avec les lignes $HG$, $CD$.

12. Il eſt donc très-poſſible, quoique la choſe ſemble être paradoxe, que dans un vaſe cylindrique, l'eau qui ſort par une très-petite ouverture $EF$, deſcende dans les premiers inſtans avec une vîteſſe ſenſiblement égale à celle des corps qui tombent librement ; comme il eſt poſſible auſſi que l'eau deſcende avec une vîteſſe ſenſiblement moindre ; tout cela dépend du rapport entre $HG$, $OG$, $CD$, $EF$, & de la courbure des lignes $CE$, $DF$, que la théorie ne ſauroit déterminer. En un mot, tout ſe réduit à ſavoir, ſi dans un vaſe cylindrique on peut ſuppoſer $\int \frac{dx}{y}$ à peu près égal à $HG$. Or cette ſuppoſition paroît très-permiſe, & même aſſez vraiſemblable. Car puiſque toutes les particules deſcendent verticalement & parallélement aux côtés du vaſe, juſqu'à une fort petite diſtance de l'ouverture ; donc $y$ eſt $= k$ juſqu'à une fort petite diſtance de l'ouverture ; donc $\int \frac{dx}{y}$ peut être cenſé $= \int \frac{dx}{k}$.

13. Soit $\omega$ la distance de l'ouverture, où les particules du fluide commencent à se rapprocher de l'ouverture par une direction oblique ; & soit supposée $a$ la hauteur entiere du fluide au-dessus de l'ouverture, on aura $\int\frac{dx}{y} < \frac{a-\omega}{k} + \frac{\omega}{K} = \frac{a}{k} + \frac{\omega}{K} - \frac{\omega}{k}$. Donc si $\frac{\omega}{K}$ est beaucoup plus petit que $\frac{a}{k}$, ou ce qui revient au même, si $\frac{\omega}{a}$ est beaucoup plus petit que $\frac{K}{k}$, $\int\frac{dx}{y}$ sera sensiblement $= \frac{a}{k}$ ; & quand même $\frac{\omega}{a}$ ne seroit pas beaucoup plus petit que $\frac{K}{k}$, $\int\frac{dx}{y}$ pourroit être encore sensiblement égal à $\frac{a}{k}$, parce que $\int\frac{dx}{y}$ pourroit être beaucoup plus petit que $\frac{a-\omega}{k} + \frac{\omega}{K}$ ; car $\int\frac{dx}{y} = \frac{a-\omega}{k} + \int\frac{d\omega}{u}$ ; or $\int\frac{d\omega}{u}$ peut être, & même est vraisemblablement beaucoup plus petit que $\int\frac{d\omega}{K}$ ou $\frac{\omega}{K}$, puisqu'il est vraisemblable que $u$ n'est sensiblement égal à $K$ qu'extrêmement près de l'ouverture.

14. Au reste, que $\int\frac{dx}{y}$ soit à peu près égal ou non à $\frac{a}{k}$, la proposition avancée & prouvée dans l'art. 108 de notre *Traité des Fluides* n'en est pas moins vraie ; savoir qu'au bout d'un temps très-court, la vîtesse avec laquelle le fluide sort, quand l'ouverture est fort petite,

eſt égale à celle qu'il auroit acquiſe en tombant de toute ſa hauteur.

15. Il eſt aiſé de voir, que dans un vaſe de figure quelconque, la ſurface ſupérieure du fluide s'accélérera plus vîte au premier inſtant que les corps peſans qui tombent librement, ſi $\frac{a}{k}$ eſt $> \int \frac{dx}{y}$; mais nous avons fait voir ailleurs (*Traité des Fluides*, art. 98) qu'en faiſant abſtraction de la tenacité, on doit avoir $\frac{a}{k} < \int \frac{dx}{y}$ ou $= \int \frac{dx}{y}$ tout au plus; ainſi l'accélération de la ſurface ſupérieure aux premiers inſtans ne ſauroit être plus grande que celle d'un corps peſant, que dans le cas où 1°. $\frac{a}{k}$ ſeroit $> \int \frac{dx}{y}$. 2°. Dans le cas où la plus grande valeur négative de $\int (p\,dt - \frac{k\,dv}{y}) \times \frac{dv}{dt}$ ($dv$ étant la vîteſſe initiale de la ſurface ſupérieure) ne ſera pas plus grande que la force d'adhérence des parties; ce qui arrivera, ſi (en faiſant $\frac{dv}{dt} = p\,a$) $p\,x - \int \frac{kpa\,dx}{y}$ (qu'on ſuppoſe une quantité négative) n'eſt pas plus grande que la quantité qui doit repréſenter la force d'adhérence des particules; ſoit $p\,\mathfrak{C}$ cette quantité, il faudra donc que $k\,a \int \frac{dx}{y} - x$, ne ſoit nulle part plus grande que $\mathfrak{C}$, & que par conſéquent $k\,a \int \frac{dx}{y}$ ne ſoit nulle part plus grand que $\mathfrak{C} + x$.

## §. II.

*Sur le mouvement d'un Fluide dans un Tuyau quelconque.*

1. Soit une courbe $BFM$ (*Fig.* 18) qui ait pour équation (ſuivant la théorie précédemment expoſée) $\downarrow(x+y\sqrt{-1})-\downarrow(x-y\sqrt{-1})=2A\sqrt{-1}$, & dans laquelle outre cela $\frac{dy}{dx}$ ſoit $=0$ à tous les points des ſurfaces ſupérieure & inférieure $CB$, & $DF$, ſuivant l'art. 19 du trente-uniéme Mémoire, enſorte que $\varphi x+y\sqrt{-1}-\varphi(x-y\sqrt{-1})$ ſoit $=0$ (quel que ſoit $y$) lorſque $x=0$, & lorſque $x=CD$. Soit enſuite imaginée une autre courbe $B'M'F'$ extrêmement proche de celle-ci, & dans laquelle les mêmes conditions ſoient obſervées, de maniere que, dans cette ſeconde courbe, $A$ ſoit $=A=A+\alpha$, $\alpha$ étant une très-petite quantité.

2. Imaginons préſentement un fluide peſant renfermé dans le tuyau infiniment étroit $BMFF'M'B'$, & ſoit $d\downarrow x=dx\varphi x$, comme on le ſuppoſe dans l'art. 5 du trente-uniéme Mémoire ; il eſt clair par tout ce qui a été dit ci-deſſus ; 1°. que la vîteſſe verticale au premier inſtant ſera en un point quelconque $M=\frac{G}{2}[\varphi x+y\sqrt{-1}+\varphi(x-y\sqrt{-1})]dt$, $G$ étant une conſtante qu'on déterminera dans la ſuite ; 2°. que la vîteſſe horizontale ſera $\frac{Gdt}{2}[\varphi(x+y\sqrt{-1})-\varphi(x-y\sqrt{-1})]\sqrt{-1}$.

3. Or puiſque $\psi(x+y\sqrt{-1})-\psi(x-y\sqrt{-1})=2A\sqrt{-1}$, & que $\psi(x+y'\sqrt{-1})-\psi(x-y'\sqrt{-1})=2A+2\alpha\sqrt{-1}$; donc en faiſant $MM'=\omega$, on aura $\omega\sqrt{-1}\,[\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})]=\alpha$; donc $\omega=\frac{2\alpha}{\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})}$ ou $\omega=\frac{2\alpha}{Q}$; d'où l'on voit que la vîteſſe verticale $Q$, au point $M$, eſt en raiſon inverſe de la petite largeur horizontale $MM'$ du canal en ce point $M$.

4. D'où il eſt aiſé de conclure, que ſi on mene une ligne $OM'$ perpendiculaire aux parois, la vîteſſe ſuivant $OM$ ſera en raiſon inverſe de $MO'$; & cette vîteſſe ſera évidemment égale à $\sqrt{(PP+QQ)}$.

5. De-là il s'enſuit qu'au premier inſtant le poids du canal $BMF$, animé des forces $\sqrt{(PP+QQ)}$, ſera $=dt\int\frac{R.k\,ds}{OM'}$, en nommant $R\,dt$ la vîteſſe en $B$, & faiſant $BB'=k$, & $BM=s$; donc on aura (art. 7 du trente-uniéme Mémoire) $p\times CD=Rk\int\frac{ds}{OM'}$.

6. Pour avoir une expreſſion plus facile à calculer; on remarquera que $\int ds\sqrt{(PP+QQ)}=\int P\,dy+Q\,dx$; d'où l'on aura $\int ds\sqrt{(PP+QQ)}$ ou $R\int\frac{k\,ds}{OM'}=\left[\frac{\psi(x+y\sqrt{-1})+\psi(x-y\sqrt{-1})}{2}-\frac{\psi(CB\sqrt{-1}+\psi(-CB\sqrt{-1})}{2}\right]G$.

7. Donc on aura $G$ en faiſant cette derniere quantité $=$ à $p\times CD$; & ſuppoſant que $x$ devienne $CD$, & $y$, $DF$.

8. Or on a $\psi(x+y\sqrt{-1})-\psi(x-y\sqrt{-1})=$

$2A\sqrt{-1}$, & $\downarrow(CB\sqrt{-1}) - \downarrow(-CB\sqrt{-1}) = 2A\sqrt{-1}$, donc en appellant $CD$, $X$, & $DF$, $Y$, on aura $p \times X = [\downarrow(X+Y\sqrt{-1}) - \downarrow(CB\sqrt{-1})]G$.

9. Cette derniere quantité n'eſt point imaginaire, comme on pourroit d'abord le penſer. En effet, ſoit $\downarrow(x+y\sqrt{-1}) = \downarrow x + y\sqrt{-1}.X + y^2X'' + y^3 \times \sqrt{-1}.X'''$, &c. on aura à cauſe de $\downarrow(x+y\sqrt{-1}) - \downarrow(x-y\sqrt{-1}) = 2A\sqrt{-1}$, la quantité $2y\sqrt{-1} + 2y^3\sqrt{-1}.X''' +$, &c. $= 2A\sqrt{-1}$; & par la même raiſon, la partie de $\downarrow(CB\sqrt{-1})$ qui contiendra l'imaginaire $\sqrt{-1}$, ſera $= 2A\sqrt{-1}$; donc les imaginaires ſe détruiront dans la quantité $\downarrow(x+y\sqrt{-1}) - \downarrow(CB\sqrt{-1})$.

10. Puiſque la vîteſſe verticale eſt $\frac{G}{2}[\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1})]$ elle ſera donc $\frac{p \times CD}{\downarrow(X+Y\sqrt{-1}) - \downarrow(CB\sqrt{-1})} \times [\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x+y\sqrt{-1})]$ ou $2p \times CD \times [\varphi(x+y\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1})] : [\downarrow(X+Y\sqrt{-1}) + \downarrow(X-Y\sqrt{-1}) - \downarrow(CB\sqrt{-1}) - \downarrow(-CB \times \sqrt{-1})]$.

11. Soient deux vaſes infiniment étroits $C\varsigma\mu\varphi DC$; $BMFF'M'B$, tels que $C\varsigma$ ſoit à $BB'$ :: $P\mu$ : $MM'$ :: $D\varphi$ : $FF'$; ſoit même pour plus de ſimplicité $C\varsigma = BB'$, & par conſéquent $P\mu = MM'$ & $D\varphi = FF'$; & ſoit ſuppoſée encore la direction du fluide en $B$ & en $F$ verticale, c'eſt-à-dire perpendiculaire à $CB$ & $DF$ au premier inſtant; il eſt viſible que la vîteſſe

en $CC$ sera $= \frac{p.CD}{\int \frac{Cc.dx}{P\mu}}$ ; & la vîteſſe en $BB' =$ $\frac{p.CD}{\int \frac{BB'.ds}{MO}} =$ (à cauſe de $\frac{dx}{ds} = \frac{MO}{MM'}$) $\frac{p.CD}{\int \frac{BB'.MM'.dx}{MO^2}}$ $= \frac{p.CD}{\int \left(\frac{BB'dx}{MM'} \cdot \frac{MM'^2}{M'O^2}\right)}$ ; d'où à cauſe de $\frac{BB'}{MM'} = \frac{Cc}{P\mu}$, & de $MM' > M'O$, il eſt clair que la vîteſſe en $CC$ ſera plus grande que la vîteſſe en $BB'$, en raiſon de $\int \frac{ds^2}{dx.P\mu}$ à $\int \frac{dx}{P\mu}$.

12. Ce ſeroit donc une erreur de ſuppoſer que tous les points de la ſurface $CB$ du fluide deſcendiſſent également vîte, & de regarder en même-temps le fluide comme ſe mouvant de la maniere que s'il étoit renfermé dans des tuyaux $CD\varphi C$, $BFF'B'$, dont les largeurs horizontales fuſſent toujours en même proportion. On peut remarquer, ce qui nous ſera utile dans la ſuite, que ſi les largeurs horizontales correſpondantes n'étoient pas proportionnelles dans les deux tuyaux, alors ſuppoſant, ce qui eſt toujours permis, $BB' = CC$, on auroit la vîteſſe en $BB'$ égale ou $<$ ou $>$ qu'en $CC$, ſelon que $\int \frac{dx.MM'}{M'O^2}$ ſera $=>$ ou $<$ que $\int \frac{dx}{P\mu}$. Par exemple, les vîteſſes en $B$ & en $C$ ſeroient égales ſi $P\mu$ étoit $= M'K$, (*Fig.* 19) $OK$ étant ſuppoſée perpendiculaire à $MM'$. Car $\frac{M'O^2}{MM'} = M'K$ ; par la même raiſon, la vîteſſe en $B$ eſt $<$ ou $>$ que la vîteſſe en $C$, ſi $P\mu$ eſt $<$ ou $> M'K$.

13. Il n'eſt pas difficile d'ailleurs de faire voir, par nos formules, que la ſuppoſition des tuyaux fictifs, de largeurs proportionnelles, & celle de l'égalité de vîteſſe dans tous les points de la ſurface $CB$, n'eſt point exacte, au moins dans la rigueur de la théorie analytique.

14. En effet, il eſt évident que dans ce cas, la vîteſſe primitive verticale, dans les différens points de la ſurface $CD$, c'eſt-à-dire lorſque $x = 0$, ſera proportionnelle (art. 10) à $[\varphi(CB\sqrt{-1}) + \varphi(-CB\sqrt{-1})]$: $[\downarrow(X+Y\sqrt{-1}) - \downarrow(CB\sqrt{-1})]$; or on a $\downarrow(X+Y\sqrt{-1}) - \downarrow(X-Y\sqrt{-1}) = 2A\sqrt{-1} = \downarrow(CB\times\sqrt{-1}) - \downarrow(-CB\sqrt{-1})$; d'où l'on tire une valeur de $CB$ en $A$, & une de $Y$ en $X$ & en $A$; & la ſubſtitution de ces valeurs, dans l'expreſſion de la vîteſſe, donnera une quantité où ſe trouvera la variable $A$ & la conſtante $X$. Donc, &c.

15. Soit, par exemple, $\downarrow x = A'(a-x) + B'(a-x)^3$; $a$ étant $= X$, & le vaſe étant ſuppoſé avoir un fond à la partie ſupérieure $CB$, afin que $P$ ne ſoit pas néceſſairement $= 0$ lorſque $x = 0$, mais ſeulement lorſque $x = X$. En ce cas on aura $\downarrow(x + y\sqrt{-1}) = A'(a - x - y\sqrt{-1}) + B'(a - x - y\sqrt{-1})^3$; donc à cauſe de $\downarrow(x+y\sqrt{-1}) - \downarrow(x-y\sqrt{-1}) = 2A\sqrt{-1}$, on aura $-2A'y - 6B'(a-x)^2y - 2B'y^3 = 2A$; & à la ſurface $CB$ où $x = 0$, $-2A'.CB - 6B'a^2.CB - 2B'.CB^3 = 2A$; de plus, $\varphi x$ ou $\frac{d\downarrow x}{dx} = -A' - 3B'(a-x)^2$; & par conſéquent $\varphi(CB\sqrt{-1}) + \varphi(-CB\sqrt{-1}) = -2A' - 3B'(a - CB\sqrt{-1})^2 -$

$\frac{1}{2}B'(a+CB\sqrt{-1})^2 = -2A' - 6B'a^2 + 6B'.CB^2$; donc l'expreſſion de la vîteſſe initiale eſt proportionnelle à $[-2A' - 6B'.a^2 + 6B'.CB^2] : [A'(-Y\sqrt{-1}) + B'(-Y\sqrt{-1})^3 - A'(a - CB\sqrt{-1}) - B'(a - CB\sqrt{-1})^3]$. Or à cauſe de $X = a$, on a $-A'.Y - B'Y^3 = A$; $-A'.CB - 3B'a^2.CB - B'.CB^3 = A$; d'où il eſt aiſé de voir que le dénominateur de la quantité précédente eſt $A\sqrt{-1} - Aa - B'a^3 + 3B'a.CB^2 - A\sqrt{-1} = -Aa - Ba'^3 + 3B'a.CB^2$; donc l'expreſſion de la vîteſſe trouvée ci-deſſus ſe réduit à $\frac{2}{a} + 4B'a \times \frac{1}{A' + B'a^2 - 3B'.CB^2}$, qui eſt évidemment une quantité variable, à cauſe de la variable $CB$.

16. En général, ſoit $\psi(X + Y\sqrt{-1}) = \psi(a - X - Y\sqrt{-1})$, on aura, lorſque $X = a$, $\psi(a - X - Y\sqrt{-1}) = -\psi(a - X + Y\sqrt{-1})$ ſi $\psi x$ eſt une fonction impaire; par conſéquent $\psi(X + Y\sqrt{-1}) = A\sqrt{-1}$. De plus, chaque terme de cette forme $B'(a-x)^m$ que contiendra $\psi x$, donnera (comme il eſt aiſé de le voir) au numérateur de l'expreſſion de la vîteſſe, le terme $-2B'm(a^{m-1} - \frac{(m-1).(m-2)}{2}a^{m-3}CB^2 + \frac{(m-1).(m-2).(m-3).(m-4)}{2.3.4}a^{m-5}CB^4$, &c.) & au dénominateur le terme $-B'(a^m - \frac{m.m-1}{2}a^{m-2}CB^2 + \frac{m.m-2.m-3.m-4}{2.3.4}a^{m-4}CB^4$, &c.) ſans compter un terme tout conſtant $-A\sqrt{-1}$, qui équivaut à

tous les termes où $CB$ se trouve seule, élevée à une puissance impaire, & qui sera détruit par le terme $+AV-1$, égal à $\downarrow(X+YV-1)$.

17. D'où il est aisé de conclure que l'expression de la vîtesse initiale, aux différens points de la surface $CB$, renferme la variable $CB$, & par conséquent est variable selon la distance du point $B$ au point $C$.

18. Au reste, ceci n'est vrai qu'en général, & en embrassant tous les cas possibles; car il peut y avoir quelques cas où la valeur de la vîtesse verticale soit la même, quelle que soit $CB$. Par exemple, soit $\downarrow x = \text{sin.}(a-x)$, on aura $\downarrow(X+YV-1) = \text{sin.}(a-X-YV-1) = \text{sin.}(-YV-1)$, & $\downarrow(a-CBV-1) = \text{sin.}(a-CBV-1)$. Donc $\varphi x = -\text{cos.}(a-x)$; donc $\varphi(CBV-1)+\varphi(-CBV-1) = -\text{cos.}(a-CBV-1) - \text{cos.}(a+CBV-1) = -2\,\text{cos.}\,a\,\text{cos.}\,CBV-1$; or $\downarrow(X+YV-1)-\downarrow(X-YV-1) = 2AV-1$; & $\downarrow(a-CBV-1)-\downarrow(a+CBV-1) = 2AV-1$. Donc on aura, 1°. $-\text{sin.}(YV-1) = AV-1$; 2°. $\text{sin.}(a-CBV-1)-\text{sin.}(a+CBV-1) = 2AV-1$, c'est-à-dire $-\text{cos.}\,a\,\text{sin.}\,CBV-1 = AV-1$. Donc le numérateur de la valeur de la vîtesse verticale en $CB$ sera $-2\,\text{cos.}\,a\,\text{cos.}\,CBV-1$; & le dénominateur $\downarrow(X+YV-1)-\downarrow(a-CBV-1)$ ou $\text{sin.}(-YV-1)-\text{sin.}(a-CBV-1) = AV-1-\text{sin.}\,a\,\text{cos.}\,CBV-1+\text{cos.}\,a\,\text{sin.}\,CBV-1 = -\text{sin.}\,a\,\text{cos.}\,CBV-1$. Donc le numérateur divisé par le dénominateur se réduit à la quantité cons-

tante $\frac{2 \text{ cos. } a}{\text{ sin. } a} = 2 \text{ cot. } a$.

19. Cette conſéquence n'eſt point contraire à ce que nous avons prouvé ci-deſſus (art. 12) que la vîteſſe en $B$ eſt plus petite que la vîteſſe en $C$, dans la ſuppoſition des tuyaux fictifs $C\mathfrak{C}\varphi D$, $BB'F'F$, dont les largeurs correſpondantes ſoient proportionnelles; l'article précédent prouve ſeulement que la ſuppoſition de pareils tuyaux eſt purement précaire, puiſque cette ſuppoſition rendroit inégales, dans tous les cas poſſibles, des vîteſſes qui peuvent être égales dans certains cas; mais en même-temps l'art. 17 & les deux qui le précédent, prouvent que la vîteſſe n'eſt pas égale dans tous les cas à tous les points de la ſurface $CB$.

20. Il eſt aiſé de voir, par ce qui a été dit dans les articles 2 & 3 ci-deſſus, que le fluide peut, au moins dans le premier inſtant, être ſuppoſé ſe mouvoir dans des tuyaux iſolés infiniment petits $BB'F'F$, dans leſquels $MM'$ eſt en raiſon inverſe de la vîteſſe verticale, & $M'O$ en raiſon inverſe de la vîteſſe abſolue; mais l'équation générale des courbes du fluide, $\downarrow(x+y\sqrt{-1}) + \downarrow(x-y\sqrt{-1}) = 2A\sqrt{-1}$, ne donne point (au moins néceſſairement & dans tous les cas) la proportion $C\mathfrak{C} : BB' :: P\mu : MM'$: car de ce que $\downarrow(x+y\sqrt{-1}) + \downarrow(x-y\sqrt{-1}) = 2A\sqrt{-1}$, ou $\downarrow A'\sqrt{-1} + \downarrow -A'\sqrt{-1}$ (en ſuppoſant $y = A'$ lorſque $x = 0$) il ne s'enſuit nullement que $\frac{\varphi(x-y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})}{\varphi A'\sqrt{-1}+\varphi A\sqrt{-1}}$ ſoit égal à une fonction de la ſeule quantité $x$, en différen-

tiant le haut & le bas de la fraction $\frac{\psi(x-y\sqrt{-1})-\psi(x-y\sqrt{-1})}{\psi A\sqrt{-1}-\psi-A'\sqrt{-1}}$ $=1$ ($y$ & $A$ seuls étant supposés variables) & ôtant les différentielles. Or cette quantité $\frac{\phi(x+y\sqrt{-1})+\phi(x-y\sqrt{-1})}{\phi A'\sqrt{-1}+\phi-A'\sqrt{-1}}$ représente le rapport des vîtesses en $M$ & en $B$; ou ce qui est la même chose (art. 3) le rapport de $BB'$ à $MM'$. Donc il ne s'ensuit nullement de l'équation $\psi(x+y\sqrt{-1})-\psi(x-y\sqrt{-1})=2A\sqrt{-1}$, que le rapport $\frac{MM'}{BB'}$ soit égal à une fonction de $x$ indépendante de $y$ & de $A$.

21. Nous pourrions entrer dans de plus grands détails sur les loix de ce mouvement, ainsi que sur les conséquences qui résultent de l'équation $\psi(x+y\sqrt{-1}-\psi(x-y\sqrt{-1})=2A\sqrt{-1}$, & de l'équation $\phi(x+y\sqrt{-1})-\phi(x-y\sqrt{-1})=0$, qui doit avoir lieu lorsque $x=0$, & lorsque $x=CD$. Mais en voilà assez pour mettre nos Lecteurs sur la voie de pousser ces recherches plus loin, s'ils le jugent à propos. Nous nous contenterons de dire en finissant, qu'il faut avoir attention que l'équation $\psi(x+y\sqrt{-1})-\psi(x-y\sqrt{-1})=2A\sqrt{-1}$, qui exprime la nature des parois du vase, donne une valeur de $y$ qui aille en diminuant lorsque $x$ augmente. Car si le vase alloit en s'élargissant de haut en bas, le fluide descendroit au premier instant du mouvement comme une masse solide continue, & quitteroit les parois du vase.

*On trouvera dans le Mémoire suivant, & aussi dans la*

*seconde édition de notre* Traité des Fluides, *qui est actuellement sous presse, quelques autres remarques sur le mouvement des fluides dans des vases.*

## §. III.

### *Des endroits où un fluide qui coule doit se diviser.*

1. Les mêmes noms étant conservés que dans l'art. 91 de notre *Traité des Fluides*, soit $KZ$ (*Fig.* 20) $= y$; $Oo = dx$; & soient les petits espaces $KZz k$, $kz\zeta X$, $X\zeta\xi x$ égaux entr'eux, on aura $kz = y + dy$, $X\zeta = y + 2dy + ddy$, $o\omega = dx + ddx$, $\omega\lambda = dx + 2ddx + d^3x$, & $y\,dx = (y + dy)(dx + ddx) = (y + 2dy + ddy)(dx + 2ddx + d^3x)$; donc $\frac{dx + ddx}{dx + 2ddx + d^3x} = \frac{y + 2dy + ddy}{y + dy}$.

2. Or $\frac{um}{y}$ étant la vîtesse de la tranche $KZ$, & $\frac{um}{y+dy}$ celle de la tranche $kz$, $\frac{um}{y} + p\,dt$ sera la vîtesse de la tranche $KZ$ lorsqu'elle sera parvenue en $kz$, & $\frac{um}{y+dy} + p\,dt$, sera la vîtesse de la tranche $kz$ lorsqu'elle sera parvenue en $X\zeta$.

3. Maintenant, pour que le fluide ne se sépare pas, il faut que $\frac{o\omega}{\frac{um}{y} + p\,dt}$ soit $=$ ou $< \frac{\omega\lambda}{\frac{um}{y+dy} + p\,dt}$, c'est-à-dire à cause de $\frac{o\omega}{\omega\lambda} = \frac{y + 2dy + ddy}{y + dy}$, que

$\frac{y+2dy+ddy}{\frac{um}{y}+pdt}$ soit $=$ ou $<\frac{y+dy}{\frac{um}{y+dy}+pdt}$; d'où l'on tire $um+um\frac{dy+ddy}{y+dy}+pdt(dy+ddy)=$ ou $<um+\frac{umdy}{y}$; & par conséquent, en ôtant ce qui se détruit, & en négligeant les quantités qui sont infiniment petites par rapport aux autres, $\frac{umdy^2}{y}-\frac{umdy^2}{y^2}+pdtdy=0$ ou négatif.

4. Donc toutes les fois que cette quantité ne sera positive & réelle en aucun endroit, le fluide ne se divisera pas.

5. Ce n'est pourtant pas à dire qu'il doive se diviser toujours, lorsque cette quantité aura quelques valeurs positives. Car soit, par exemple, un vase *ABHFKM* (*Fig.* 21) rempli de fluide depuis *AB* jusqu'en *KM*; & supposons que ce fluide se meuve au premier instant par l'effort seul de sa pesanteur; il est très-aisé de voir que dans la partie *FHNP*, $\frac{dx}{v}$ va toujours en croissant, & qu'ainsi cette partie, si elle étoit seule, se détacheroit du vase; mais à cause de la partie supérieure *ABHF*, il n'en est pas ainsi. Soit $a\mathfrak{C}=$ à la force de la gravité $p$, & soit imaginée une courbe $bqpm$, dont les ordonnées soient en raison inverse des largeurs du vase; soit enfin l'aire $abqpn=a\mathfrak{C}pn$, il est visible que la partie *FHNP* se mouvra sans se diviser d'avec la partie *ABHF*, &

qu'il n'y aura que la partie *NPMK* qui ſe ſéparera du reſte du fluide.

6. Et ſi le vaſe & le fluide étoient continués, enſorte que le reſte du vaſe eût la figure *KMZVTXK*, & que l'aire *npyxt* fût = *nput*, en ce cas la partie *NPKM* ſe mouvroit en ne formant qu'une ſeule maſſe avec *KMVT*, & le tout enſemble n'en formeroit qu'une ſeule avec *ABPN*.

7. Si la courbe *bln* (*Fig.* 22), qui repréſente les forces *dv*, eſt telle que quand $x = 0$, c'eſt-à-dire au point *a*, on ait $dv = 0$, enſorte que la courbe *bln* devienne *alsn*, il y aura néceſſairement une partie du fluide *ai* qui ſe ſéparera du reſte. Car ſi elle ne ſe ſéparoit pas, ſoit *ab* la vîteſſe que prendra la ſurface ſupérieure, donc $-ab$ ſera la vîteſſe détruite; ce qui eſt évidemment impoſſible, la vîteſſe détruite en *a* devant toujours être poſitive, ou au moins nulle.

8. Donc, en ſuppoſant la courbe *blnq*, dont les ordonnées ſoient en raiſon inverſe des largeurs du vaſe, & *ao* la hauteur du fluide; il faudra placer cette courbe *blnq*, de maniere que l'aire *ilrnqo* = *ilsnpo*; la partie *io* ſe mouvra ſans ſe diviſer, & la partie *ai*, ou ſe diviſera en pluſieurs portions, ou du moins quittera les parois du vaſe.

9. Si *qlmn* (*Fig.* 23) eſt la courbe des *dv*, enſorte que $\int dv\,dx$ ait quelque valeur négative, il eſt évident que le point *k* ſera le point d'où partiront deux preſſions égales & oppoſées, l'une négative ſuivant *ka*, &

proportionnelle à l'aire $klm - aql$, l'autre positive suivant $ko$, & proportionnelle à l'aire $kon$; laquelle (à cause de $\int dv\,dx = 0$ lorsque $x = ao$) sera $= klm - aql$. Or de-là & de l'art. précédent il s'ensuit, qu'il y aura dans le fluide au moins deux portions, répondantes à $krs$, $kno$, qui se sépareront du reste, & qui se sépareront aussi l'une de l'autre.

10. On pourroit aisément pousser plus loin les détails de cette solution : nous les abandonnons quant à présent à d'autres Géometres ; mais nous devons avertir, que pour rendre la solution complette, il faut non-seulement déterminer les endroits où le fluide se sépare, les parties séparées faisant chacune à part une masse continue ; il faut encore déterminer les parties du fluide, dont les tranches doivent se séparer les unes des autres, & pour ainsi dire s'éparpiller en tombant, ou du moins quitter les parois du vase, en restant unies. Sans cette attention, la solution seroit imparfaite.

## §. IV.

### *Sur la contraction & la figure de la veine de fluide.*

1. Pour déterminer la figure de la veine de fluide à la sortie du vase d'où le fluide s'écoule, on peut employer différentes méthodes.

2. On peut d'abord faire abstraction de la pesanteur ; dont en effet l'action sera peu sensible, sur-tout quand on supposera la veine peu étendue, & sortant horizontalement.

talement. En ce cas, il eſt aiſé d'employer la méthode que nous avons donnée pour un cas analogue à celui-ci dans notre *Eſſai ſur la Réſiſtance des Fluides* (art. 140 & ſuiv.). On nommera donc $x$ la diſtance de la ſection de la veine à l'ouverture par où le fluide s'écoule, $y$ la largeur de la veine, $ds$ le petit côté de la courbe qu'elle forme, & on aura $y\,dx = a\,ds$, d'où l'on tire $dx = -\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$; je mets $-$, parce que $x$ croiſſant, $y$ diminue.

3. Il eſt aiſé de conclure de cette équation, 1°. que $x = a \log.\left(\frac{b+\sqrt{(bb-aa)}}{y+\sqrt{(yy-aa)}}\right)$, en ſuppoſant $y = b$ lorſque $x = 0$; ou ce qui eſt encore plus ſimple, $x = a \log.\left(\frac{y-\sqrt{(yy-aa)}}{b-\sqrt{(bb-aa)}}\right)$; 2°. que la largeur $y$ de la veine ne ſauroit être $< a$; 3°. que ſans la réſiſtance de l'air, la veine ſe prolongeroit juſqu'à la diſtance où $y = a$, & $x = a \log.\left(\frac{a}{b-\sqrt{(bb-aa)}}\right)$, après quoi elle demeureroit toujours de la largeur $a$.

4. Il faut de plus remarquer que $dy$ ne doit avoir le ſigne $-$, que dans le cas où la direction du fluide, en ſortant de l'ouverture, ſera telle, que ſes parties tendront à ſe rapprocher les unes des autres, c'eſt-à-dire, dans le cas où la premiere valeur de $\frac{dx}{dy}$ ſera négative; ce qui doit en effet arriver dans le plus grand nombre des cas. Mais ſi la figure du vaſe étoit telle que ſes parois fuſſent

divergentes à leurs extrémités, ou même si l'on adaptoit à l'ouverture un tuyau divergent, alors $dy$ à l'origine seroit positif, & on auroit $dx = +\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$, & la largeur de la veine iroit toujours en augmentant.

5. Dans le cas où la veine se contracte, on a $ds = -\frac{y\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$; & $s = \sqrt{(bb-aa)} - \sqrt{(yy-aa)}$; donc faisant $y = a$, la longueur totale est $\sqrt{(bb-aa)}$, qui doit être évidemment plus grande que la valeur correspondante de $x$. De-là il est aisé de voir que plus l'excès de $b$ sur $a$ sera petit, moins la contraction de la veine aura d'étendue; puisque $s$, & à plus forte raison $x$, en seront d'autant plus petits.

6. Si la veine est verticale, & qu'on veuille avoir égard à la pesanteur, on aura pour lors, comme dans l'art. 144 de l'*Essai sur la Résistance des Fluides*, $dd\,s = \frac{py^2\,dx^2}{v^2\,a^2} \times \frac{d^2x}{ds}$; $a$ étant le diametre de l'ouverture, $p$ la pesanteur, & $v = \sqrt{(2ph)}$ la vitesse du fluide à la sortie du tuyau; d'où l'on tire, comme dans l'art. cité, en faisant $x + h = n$, l'équation $dn^2 + dy^2 = \frac{y^2\,n\,dn^2}{h\,a^2}$, & la construction approchée qu'on trouve au même article; avec cette seule attention, qu'il faudra prendre $dx = \mp\frac{a\,dy}{\sqrt{(yy-aa)}}$, selon que la veine à sa sortie sera convergente ou divergente.

7. On peut mettre l'équation $dn^2 + dy^2 = \frac{y^2 n dn^2}{hz^2}$ ſous la forme ſuivante, $An = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2 y^2}$; en ſuppoſant $dn = z\,dy$, & $A$ égale à une conſtante connue, ce qui donne $Az\,dy = d\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2 y^2}\right)$; & ſuppoſant $zy = u$, $\frac{A u dy}{y} = d\left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{u^2}\right)$, ou (en faiſant $y^2 = s^{-1}$ & $u^2 = s^{-1}$) $ds + dt = -\frac{A dt}{2\sqrt{s}}$. C'eſt la forme la plus ſimple qu'il ſemble qu'on puiſſe donner à l'équation propoſée; mais ſous cette forme même, l'intégration n'en paroît pas encore facile.

8. Dans les ſolutions précédentes, on ſuppoſe que la viteſſe verticale ſoit la même dans tous les points d'une même tranche parallèle à l'ouverture, ce qui n'eſt pas exactement vrai. Pour réſoudre donc exactement le problême propoſé, il faut donner d'abord à la veine l'équation générale trouvée par notre théorie du mouvement des fluides, ſavoir $\downarrow(x + y\sqrt{-1}) - \downarrow(x - y\sqrt{-1}) = 2A\sqrt{-1}$. Il faut enſuite conſidérer que ſi on différentie $\downarrow(x + y\sqrt{-1})$, & que $\Delta(x + y\sqrt{-1})$ ſoit le coefficient fini de cette différentielle, on aura $P = K \times \frac{\Delta(x+y\sqrt{-1}) - \Delta(x-y\sqrt{-1})}{\sqrt{-1}}$; & $Q = K\Delta(x + y\sqrt{-1}) + \Delta(x - y\sqrt{-1})$; $K$ étant une conſtante qui eſt la même pour toutes les tranches. Il faut de plus obſerver, que le long de la courbe qui forme la veine, la viteſſe du fluide $v\,(PP + QQ)$ doit être conſtante;

d'où l'on tire $PP+QQ=B$; donc on aura $\Delta(x+y\sqrt{-1})\times\Delta(x-y-1)=C$, $C$ étant une constante. Soit maintenant $\downarrow x=z$, on aura $\downarrow(x\pm y\sqrt{-1})=z\pm\frac{y\sqrt{-1}.dz}{dx}-\frac{y^2d^2z}{2dx^2}\mp\frac{y^3\sqrt{-1}d^3z}{2.3dx^3}$, &c. & (à cause de $\Delta x=\frac{d\downarrow x}{dx}=\frac{dz}{dx}$) $\Delta(x\pm y\sqrt{-1})=\frac{dz}{dx}\pm\frac{y\sqrt{-1}d^2z}{dx^2}-\frac{y^2d^3z}{2dx^3}\mp\frac{y^3\sqrt{-1}.d^4z}{2.3dx^4}$, &c. Faisant les substitutions, on aura deux équations de cette forme $\frac{ydz}{dx}-\frac{y^3d^3z}{2.3.dx^3}+\frac{y^5d^5z}{2.3.4.5dx^5}-\frac{y^7d^7z}{2.3.4.5.6.7dx^7}$ &c. $=A$; & $\left(\frac{dz}{dx}-\frac{y^2d^3z}{2dx^3}+\frac{y^4d^5z}{2.3.4dx^5}\text{, &c.}\right)^2+\left(\frac{yd^2z}{dx^2}-\frac{y^3d^4z}{2.3.dx^4}+\frac{y^5d^6z}{2.3.4.5dx^6}\text{, &c.}\right)^2=C$. Faisant évanouir $y$, on aura une équation différentielle en $z$, $x$ & constantes, qui donnera la valeur de $z$ en $x$. On aura donc $\downarrow x$. Mais il est évident que cette solution ne pourra être qu'approchée, à cause des series infinies qui constituent les équations.

9. Il est aisé de voir aussi que la valeur de $z$ ou $\downarrow x$ renfermera les constantes $A$ & $C$; mais on remarquera que ces constantes n'appartiennent qu'à la courbe qui forme les parois de la veine; les courbes de l'intérieur de la veine seront désignées par l'équation $\downarrow(x+y\sqrt{-1})-\downarrow(x-y\sqrt{-1})=2A\sqrt{-1}$, dans laquelle $\downarrow x$ contient, à la vérité, $A$ & $C$; mais la constante $A$, qui entre dans le second membre, est différente suivant cha-

que courbe, & elle n'eſt égale à $A$ que pour la courbe qui termine la veine ; enſorte que, par exemple, dans le milieu de la veine, où le fluide ſe meut en ligne droite, on aura $A = 0$, & ainſi du reſte.

10. Si l'on veut avoir égard à la peſanteur du fluide, alors au lieu de l'équation $PP + QQ = B$, il faut faire $PP + QQ = 2p(x + h)$, d'où réſultera un calcul à peu près ſemblable au précédent, excepté que $C$ ne ſera plus conſtante, mais $= p(x + h)$ ; & on pourra ſimplifier les équations en mettant $n$ pour $x + h$, ce qui donnera $pn$ au lieu de $C$, & $dn$ au lieu de $dx$.

11. Voici maintenant une ſolution du problême de l'art. 8, qui paroît aſſez ſimple & aſſez générale, du moins en faiſant abſtraction de la peſanteur, à laquelle en effet (art. 2) on peut ici n'avoir point d'égard. Soit $x + y\sqrt{-1} = u$, $x - y\sqrt{-1} = u'$, on aura $\downarrow(u) - \downarrow(u') = K$, & $\frac{d\downarrow(u)}{du} \times \frac{d\downarrow(u')}{du'} = M$, $M$ exprimant une conſtante : ſoit $\downarrow(u) = V$, $\downarrow(u') = V'$, on aura $V - V' = K$, & $\frac{dV}{du} \times \frac{dV'}{du'} = M$. Faiſant donc $\frac{dV}{du} = q$, $\frac{dV'}{du'} = q'$, il faut qu'il y ait entre $q$ & $V$ une équation telle, que ſi on met $V'$ ou $V - K$ pour $V$, & $q'$ pour $q$, la valeur de $q'$ ſoit égale à $\frac{M}{q}$ ; c'eſt à quoi on parviendra en formant une équation dans laquelle $q$ & $\frac{M}{q}$ entrent de la même maniere, & dans laquelle

outre cela il n'entre que des fonctions de $V$, telles que ſi on met dans ces fonctions $V \pm K$ pour $V$, elles ne changent point de valeur. C'eſt à quoi on parviendra par la méthode expoſée dans le IV^e volume des *Opuſcules*, vingt-huitiéme Mémoire, §. II. Par ce moyen, on aura une équation entre $\frac{dV}{du}$ & $V$; d'où l'on tirera la valeur de $du$ en $V$ & $dV$, & par conſéquent celle de $u$ en $V$, & celle de $V$ en $u$. Donc on aura $\downarrow(x+yV-1)$.

12. Il eſt bon de remarquer encore que la courbe qui forme les parois de la veine, doit former une courbe continue avec la courbe des parois du vaſe; par la même raiſon que les parois du vaſe elles-mêmes doivent être aſſujetties à une courbure continue; c'eſt pourquoi ſi le problême de la figure de la veine paroît indéterminé par la ſolution qui précéde, il ceſſera de l'être, en conſidérant que l'équation de la veine & celle des parois du vaſe doivent être les mêmes. Or de-là il eſt aiſé de conclure que la vîteſſe du fluide, qui eſt conſtante dans les parois de la veine, doit être conſtante auſſi dans les parois du vaſe; car comment pourroit-on imaginer des fonctions algébriques $PP+QQ$, qui fuſſent d'abord variables dans la premiere courbe, & enſuite conſtantes dans la ſeconde, quoique aſſujettie à la même équation que la premiere?

*Fin du trente-deuxiéme Mémoire.*

# XXXIII^ME MÉMOIRE.

## *Sur l'équation qui exprime la loi du mouvement des Fluides.*

### §. I.

*Recherches analytiques sur cette équation.*

1. Nous reprendrons d'abord les recherches où nous en sommes restées à la fin de l'art. 30 du trente-unième Mémoire, pour trouver les cas où $\varphi(b+z\sqrt{-1}) \pm \varphi(b-z\sqrt{-1}) = 0$, $b$ étant une constante donnée, & $z$ étant tout ce qu'on voudra. Nous avons vu (art. 21 & 25 *du Mémoire cité*) comment on détermine les cas où $\varphi(b+z) \pm \varphi(b-z) = 0$. Or je dis que ces cas sont les mêmes que ceux où $\varphi(b+z\sqrt{-1}) \pm \varphi(b-z\sqrt{-1}) = 0$.

2. Pour le démontrer, je prends en général la quantité $\varphi(b+mz) + \Delta(b+nz)$ qui doive être $= 0$, $b$ étant donnée, & $z$ étant quelconque; il est aisé de voir que

cette quantité se réduit à la forme suivante $B + C + mz B' + nz C' + m^2 z^2 B'' + n^2 z^2 C'' + m^3 z^3 B''' + n^3 z^3 C'''$, &c. $B, B', B''$, &c. & $C, C', C''$, &c, étant des fonctions de $b$. Or puisque cette quantité doit être $= 0$, quel que soit $z$, on aura $B + C = 0$, $mB' + nC' = 0$, $m^2 B'' + n^2 C'' = 0$; &c, & ces équations auront également lieu, & donneront absolument les mêmes résultats, $m$ & $n$ étant imaginaires ou réels; de sorte que si $\varphi(b + mz) + \Delta(b + nz) = 0$, on aura de même $\varphi(b + mz\sqrt{-1}) + \Delta(b + nz\sqrt{-1}) = 0$. Donc, &c.

3. C'est pourquoi, après avoir tracé, comme dans les fig. 10 & 11, des courbes qui soient telles que $\varphi(b + u) \pm \varphi(b - u) = 0$, ces mêmes courbes seront aussi telles que $\varphi(b + u\sqrt{-1}) \pm \varphi(b - u\sqrt{-1})$ sera $= 0$. Nous verrons dans la suite comment on peut déterminer la quantité $\varphi(x + z\sqrt{-1}) \pm \varphi(x - z\sqrt{-1})$, $\varphi x$ étant donnée par l'équation ou la construction d'une de ces courbes.

4. Sans entrer pour le présent dans ce détail, il est évident, par la condition $\varphi(b + u) \pm \varphi(b - u) = 0$, que la quantité $\varphi b$, & par conséquent aussi la quantité $\varphi x$ doit être assujettie à une certaine loi, pour que la solution soit possible, & que cette loi est représentée par les courbes tracées dans les fig. 10 & 11. D'où il s'ensuit (si l'on a $\varphi(b + u) + \varphi(b - u) = 0$) que $\varphi b$ doit être $= 0$, & $\varphi nb = 0$, $n$ étant un nombre entier positif, la courbe devant couper son axe à tous les points dans lesquels $x = b$ ou $nb$. Donc, pour pouvoir déterminer analytiquement

lytiquement le mouvement d'un fluide dans un vaſe, il faut que la figure de ce vaſe ſoit aſſujettie à une certaine équation, dépendante de la forme de $\varphi x$, forme qui dépend elle-même de la condition $\varphi(b+u) \pm \varphi(b-u) = 0$.

5. Si l'on veut (art. 19 du trente-uniéme Mémoire) que non-ſeulement $p$, mais auſſi $q$ ſoit $= 0$, quand $z = y$, & lorſqu'on a de plus $x = 0$ & $x = b$, il eſt aiſé de voir qu'en ce cas on aura $\varphi(b+y\sqrt{-1}) \pm \varphi(b-y\sqrt{-1}) = 0$; donc les courbes des fig. 10 & 11 doivent être telles, qu'en prenant $x = 0$, & $x = b$, & enſuite de part & d'autre de $x$ les valeurs égales de $y$, la courbe rencontre ſon axe en ces endroits-là. Cette condition de $q = 0$ lorſque $z = y$, doit avoir lieu lorſque les parois en $B$, $F$ (*Fig.* 18) ne ſont pas parallèles à l'axe $CD$.

6. Si la quantité $\varphi(b+u) \pm \varphi(b-u)$, ou en général $\varphi(x-u) \pm \varphi(x-u)$ ne doit être $= 0$, que pour une ſeule valeur de $x$ que je ſuppoſe $= X$, alors le problême ſeroit très-facile; il faudroit (dans le cas où on auroit $+$) que $\varphi x$ repréſentât une courbe qui eût ſimplement deux branches égales, ſemblables, & ſituées l'une au-deſſus, l'autre au-deſſous de l'axe (comme la premiere parabole cubique) à commencer du point où $x = X$; & ſi on avoit $-$, il faudroit que la courbe fût compoſée de deux moitiés égales, ſemblables & ſemblablement poſées, à commencer du point où $x = X$.

7. Si la ſurface $CB$ eſt couverte d'un corps ſolide, en ce cas il ne ſera pas néceſſaire que dans les points de

cette ſurface, $P$ ſoit $=0$ lorſque $t=0$; il ſuffira que $P$ ſoit $=0$ dans les différens points de la ſurface inférieure $DF$: d'où l'on voit qu'il ſuffira que $\varphi(X+Y\sqrt{-1})-\varphi(X-Y\sqrt{-1})=0$, quel que ſoit $Y$.

8. Il ne faut pas omettre une remarque aſſez eſſentielle. De ce que $\varphi(a+z\sqrt{-1})\pm\varphi(a-z\sqrt{-1})=0$, & $\varphi(b+z\sqrt{-1})\pm\varphi(b-z\sqrt{-1})=0$, ($a$ & $b$ étant ſuppoſées en général les valeurs de $x$, correſpondantes à la premiere & à la derniere ſurface); il eſt aiſé de voir que les courbes des fig. 10 & 11 ont trois parties égales & ſemblables, placées, ou alternativement comme dans la fig. 10, ou de ſuite comme dans la fig. 11. Or de-là il eſt aiſé de prouver (*Opuſc. Math.* tom. 1, pag. 30) que toutes les autres branches de ces courbes ſeront de même ſemblables, égales, & ſituées ou alternativement ou de ſuite.

9. En effet, pour que $\varphi(x+u)-\varphi(x-u)$, par exemple, ſoit $=0$, $x$ étant 0 au point $D$, (*Fig.* 24) & $x$ étant auſſi $=DC$, il faut que la partie $GF$ ſoit $=$ & ſemblable à $AF$, & celle-ci à $AB$; or cela poſé, on peut prouver que la courbe aura de telles branches à l'infini, égales, ſemblables & conſécutives. Car ſoit $DO=x$; la valeur de $y$ en $x$ ne contiendra donc que des puiſſances paires; ſoit enſuite $CO=z$, la valeur de $y$ en $z$ ne contiendra auſſi que des puiſſances paires. Or ſoit $CD=a$, on aura $z=a-x$; donc puiſque la valeur de $y$ en $x$ ne contient que des puiſſances paires, il s'enſuit qu'en ſubſtituant $a-x$ au lieu de $z$ dans la va-

leur de $y$ en $z$, les puiſſances impaires de $x$ diſparoîtront; or dans tous ces termes, $a$ eſt élevé à une puiſſance impaire, puiſque tous les termes de la fonction de $a - x$ ne contiennent que des puiſſances paires. Donc ces termes diſparoîtront de même en mettant $a + x$ au lieu de $z$, c'eſt-à-dire en faiſant $DL = DC$, & tranſportant l'origine des $z$ en $L$. Donc faiſant $a + x = \zeta$, & mettant l'origine des $\zeta$ en $L$, toutes les puiſſances de $\zeta$ ſeront paires; donc, à commencer du point $L$, les branches ſeront encore égales & ſemblables. On démontrera la même choſe par un raiſonnement analogue, en tranſportant l'origine en $M$. Le même raiſonnement aura lieu dans le cas de $\varphi(x+u) + \varphi(x-u) = 0$.

10. S'il n'y a que la valeur de $DC = X$, qui donne $\varphi(x+u) - \varphi(x-u) = 0$; en ce cas la courbe ſera ſimplement compoſée de deux parties $AF$, $AB$ (*Fig.* 25) égales & ſemblables, & pourra même être géometrique, au lieu qu'elle ne peut l'être dans les cas précédens, puiſqu'elle eſt compoſée d'une infinité de branches ſemblables, conſécutives ou alternatives.

11. Si $\varphi x$ eſt telle que $\varphi(x+u) - \varphi(x-u) = 0$, dans les cas exprimés ci-deſſus (art. 9); $\int dx\, \varphi x$ ou $\psi x$ repréſentera l'ordonnée d'une courbe $F'A'B'$, (*Fig.* 26) dont les parties $F'A'$, $A'B'$ ſeront égales, ſemblables & différemment ſituées par rapport à l'axe $CQ$; il y aura un point d'inflexion en $A'$, & toutes ces parties égales & ſemblables ſe répéteront à l'infini.

12. Mais ſi la courbe $FAB$ (*Fig.* 25) dont on ſup-

poſe que les ordonnées ſoient $\varphi x$, n'a que deux parties égales & ſemblables, continuées à l'infini, la courbe $F'A'B'$ (*Fig.* 26) dont on ſuppoſe que les ordonnées ſoient $\int dx\,\varphi x$ ou $\downarrow x$, n'aura non plus que deux parties égales & ſemblables $A'F'$, $A'B'$ continuées à l'infini, comme la premiere parabole cubique.

13. On peut rendre la ſolution de l'art. 10 encore plus générale, en cherchant les valeurs de $\varphi x$ qui donneroient $\varphi(b+z) \pm \varphi(b-z) = 2Q$; dans le premier cas, c'eſt-à-dire dans le cas du ſigne $+$, il faut augmenter les ordonnées de la courbe de la quantité $Q$, c'eſt-à-dire reculer l'axe des $z$ de la quantité $Q$; à l'égard du ſecond cas, c'eſt-à-dire de $\varphi(b+z) - \varphi(b-z) = 2Q$, il ne ſauroit avoir lieu à moins que $Q$ ne ſoit $= 0$, puiſque $z = 0$ donne $\varphi b - \varphi b = 0$, & par conſéquent $Q = 0$.

14. Si les parois du vaſe ſont formés par une ligne droite parallèle à l'axe des $x$, on a $P = 0$, lorſque $y = 0$, & lorſque $y = a$, $a$ étant la largeur du vaſe; donc (art. 5 du trente-uniéme Mémoire) on aura, ou bien $\varphi(x + z\sqrt{-1}) + \varphi(x - z\sqrt{-1}) = 0$, ou bien $\varphi(x + z\sqrt{-1}) - \varphi(x - z\sqrt{-1}) = 0$, en faiſant ſucceſſivement $z = 0$ & $z = a$. D'où il eſt viſible qu'il ne faut prendre que la ſeconde de ces équations, puiſque la premiere donneroit $\varphi x = 0$. Dans ce ſecond cas, l'équation des parois ſera $\sqrt{-1}\,[\downarrow(x + a\sqrt{-1}) - \downarrow(x - a\sqrt{-1})] = Q$, $Q$ étant une conſtante.

15. Mais pour donner à cette équation une forme plus commode dans le cas préſent, on conſidérera;

comme dans l'art. 2 du trente-uniéme Mémoire, que pour ſatisfaire aux deux conditions, que $Q\,dx + P\,dz$ ſoit une différentielle complette, & $Q\,dz - P\,dx$ une différentielle complette, il faut prendre pour l'intégrale de la premiere $\varphi(z + x\sqrt{-1}) + \Delta(z + x\sqrt{-1})$, auquel cas on aura, lorſque $y = a$, l'équation $\Delta(a + x\sqrt{-1}) + \Delta(a - x\sqrt{-1}) = N$; or cela poſé, on déterminera $\Delta(a)$ par les méthodes données ci-deſſus.

16. En général, dans ces cas-là, on a (art. 2 du 31^e Mémoire) $P = \varphi(z + x\sqrt{-1}) + \Delta(z - x\sqrt{-1})$; or $P$ doit être $= 0$ lorſque $z = 0$, & lorſque $z = a$, quelle que ſoit $x$; d'où il eſt aiſé de voir par la théorie expliquée ci-deſſus, que $\varphi x$ doit être repréſentée par l'ordonnée d'une courbe à branches égales, ſemblables & alternatives à l'infini, laquelle rencontrera ſon axe aux points où $x = 0$, & où $x = a$.

## §. II.

### *Suite des Recherches analytiques ſur le mouvement des Fluides.*

1. Au lieu de la forme $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, trouvée dans les Mémoires précédens pour l'équation du mouvement d'un fluide dans un vaſe, on peut donner d'autres formes à cette équation, & ces formes auront leurs avantages.

2. En premier lieu, puiſque $p\,dz + q\,dx$ eſt une différentielle complette, donc $p\,dz + \frac{q}{\sqrt{-1}}\,dx\sqrt{-1}$ eſt

une différentielle complette ; & puiſque $-q\,dz+p\,dx$ eſt une différentielle complette, donc $q\,dz-p\,dx$ l'eſt auſſi ; donc auſſi $\frac{q\,dz}{\sqrt{-1}}-\frac{p\,dx}{\sqrt{-1}}$ ou $\frac{q\,dz}{\sqrt{-1}}+p\,dx\times\sqrt{-1}$ ; donc $\left(p+\frac{q}{\sqrt{-1}}\right)(dz+dx\sqrt{-1})$, & $\left(p-\frac{q}{\sqrt{-1}}\right)(dz-dx\sqrt{-1})$ feront des différentielles complettes. Donc $\left(p+\frac{q}{\sqrt{-1}}\right)=\varphi(z+x\sqrt{-1})$ ; & $p-\frac{q}{\sqrt{-1}}=\varphi'(z-x\sqrt{-1})$ ; donc $p=\frac{\varphi(z+x\sqrt{-1})}{2}+\frac{\varphi'(z-x\sqrt{-1})}{2}$, & $q=\sqrt{-1}\left[\frac{\varphi(z+x\sqrt{-1})}{2}-\frac{\varphi'(z-x\sqrt{-1})}{2}\right]$ ; & afin que $p$ & $q$ ſoient réelles, il faudra que $\varphi$ & $\varphi'$ déſignent des fonctions ſemblables. Donc à cauſe de $\frac{q\,dz}{\sqrt{-1}}+p\,dx\sqrt{-1}=0$ ; on aura $\Delta(z+x\sqrt{-1})-\Delta'(z-x\sqrt{-1})=2M\sqrt{-1}$.

3. On peut auſſi donner aux différentielles complettes $p\,dz+q\,dx$, & $q\,dz-p\,dx$ la forme $q\,dx\sqrt{-1}+p\,dz\sqrt{-1}$, & $q\,dz+p\sqrt{-1}.dx\sqrt{-1}$ ; d'où il s'enſuit que $(q+p\sqrt{-1})(dz+dx\sqrt{-1})$, & $(q-p\sqrt{-1})(dz-dx\sqrt{-1})$ feront des différentielles complettes ; donc $q=\frac{\varphi(z+x\sqrt{-1})+\varphi'(z-x\sqrt{-1})}{2}$, & $p=\frac{\varphi(z+\sqrt{-1})-\varphi'(z-x\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$ ; donc $\Delta(z+x\sqrt{-1})+\Delta'(z-x\sqrt{-1})=2M$.

4. On peut enfin mettre les quantités $p\,dz+q\,dx$, &

$q\,dz - p\,dx$ sous la forme $q\sqrt{-1}.dx + p\,dz\sqrt{-1}$, & $-q\sqrt{-1}.dz\sqrt{-1} - p\,dx$; d'où l'on tire $q\sqrt{-1} + p = \varphi(x + z\sqrt{-1})$, & $-q\sqrt{-1} + p = \varphi'(x - z\sqrt{-1})$; & par conséquent $\Delta(x + z\sqrt{-1}) + \Delta'(x - z\sqrt{-1}) = 2M$.

5. C'est une chose assez remarquable, que les équations des filets du fluide puissent être supposées indifféremment,

$\Delta(x + z\sqrt{-1}) - \Delta'(x - z\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$
ou $\Delta(x + z\sqrt{-1}) + \Delta'(x - z\sqrt{-1}) = 2M$
ou $\Delta(z + x\sqrt{-1}) - \Delta'(z - x\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$
ou $\Delta(z + x\sqrt{-1}) + \Delta'(z - x\sqrt{-1}) = 2M$;

Si le vase est composé de deux parties égales & semblables, on pourra supposer dans le premier cas $\Delta' = \Delta$, dans le troisiéme $\Delta' = \Delta$, & $\Delta(x)$ une fonction paire; dans le quatriéme $\Delta' = \Delta$, & $\Delta(x)$ une fonction impaire; la seconde équation ne pourra avoir lieu dans ce cas-là, puisque $z = 0$ rend $\Delta x = M$, ce qui est impossible.

6. En général, si on suppose que $\alpha$ soit l'intégrale de $q\,dz - p\,dx$, on aura $\frac{d\alpha}{dz} = q$; $\frac{d\alpha}{dx} = -p$; donc à cause de $\frac{dp}{dx} = \frac{dq}{dz}$, on aura $\frac{dd\alpha}{dx^2} = -\frac{dd\alpha}{dz^2}$; donc $\alpha = A\varphi(\gamma x + \delta z)$, $A$ étant une constante quelconque, & $\gamma$, $\delta$ étant telles que $\frac{\gamma^2}{\delta^2} = -1$. Donc l'équation de la courbe des parois sera en général $A\varphi(\gamma x \pm \gamma z\sqrt{-1}) + B\varphi'(\rho\gamma x \pm \rho\gamma z\sqrt{-1})$, &c. $= C$,

c'eſt-à-dire qu'on pourra toujours ſuppoſer que le premier membre de cette équation eſt compoſé de pluſieurs paires de quantités $A\varphi(\gamma x \pm \gamma z\sqrt{-1}) \pm A'\varphi'(\gamma' x \pm \gamma' z\sqrt{-1})$ leſquelles ſeront égales à $2M + 2N\sqrt{-1}$, $M$ & $N$ étant des quantités réelles.

7. Ce n'eſt pas tout : il eſt aiſé de voir que les quantités telles que $A\varphi[\gamma(x+a) \pm \gamma(y+b)\sqrt{-1}]$ ſatisferont à l'équation $\frac{ddu}{dx^2} = -\frac{ddu}{dz^2}$, en mettant dans les différens termes $x+a$ au lieu de $x$, & $y+b$ au lieu de $y$ ; & cette obſervation peut être utile dans certains cas, ſelon qu'il ſera plus commode de ſuppoſer à la ſurface ſupérieure $x = 0$ ou $x =$ à une quantité finie. Par exemple, ſi on ſuppoſoit $(x+y\sqrt{-1})^3 - (x-y\sqrt{-1})^3 = 2M\sqrt{-1}$, il eſt aiſé de voir que $x = 0$ donneroit $y$ infinie ; mais ſi on veut, ſans rien changer à la figure du vaſe, que $y$ ſoit finie à la premiere ſurface, il faudra mettre pour lors l'équation ſous cette forme $(a+x+y\sqrt{-1})^3 - (a+x-y\sqrt{-1})^3 = 2M\sqrt{-1}$ : car en faiſant $x = 0$ à la ſurface ſupérieure, on aura $y$ finie.

8. En général, ſoit $u$ égal à une ſuite de quantités de cette forme, $A\varphi(\gamma x + \delta z + \omega)$, $A, \gamma, \delta, \omega$ étant des quantités conſtantes, qui ſoient ou réelles, ou ſimples imaginaires, ou mixtes imaginaires, avec cette ſeule condition ; que dans chacune de ces quantités $\frac{\gamma^2}{\delta^2} = -1$ ; on aura $u = F \pm G\sqrt{-1}$ pour l'équation des filets du fluide.

9. Il faut remarquer que dans cette équation on doit faire les quantités réelles du premier membre $= F$, & les quantités imaginaires $= G\sqrt{-1}$, ce qui donnera deux équations en $x$ & en $y$; & ces deux équations doivent être telles qu'elles appartiennent aux mêmes courbes. On peut faire sentir aiſément que cette condition eſt poſſible; car ſoit, par exemple, $\varphi(x+y\sqrt{-1})+\Delta(x+\zeta y\sqrt{-1}) = F+G\sqrt{-1}$, & ſoit $\varphi x = z$, & $\Delta x = u$, on aura $z+u-\frac{yyd^2z}{2dx^2}-\frac{\zeta^2y^2d^2u}{2dx^2}+\frac{y^4d^4z}{2.3.4dx^4}+\frac{\zeta^4y^4d^4z}{2.3.4dx^4}$, &c. $= F$, & $ydz+\zeta ydu-\frac{y^3d^3z}{2.3dx^2}-\frac{\zeta^3y^3d^3u}{2.3dx^2}$, &c. $= Gdx$; faiſant évanouir $y$, on aura une équation entre $z$, $u$ & leurs différentielles, qui ſera la condition de relation entre $\varphi x$ & $\Delta x$. Mais laiſſant à d'autres Géometres, ou remettant à d'autres temps ces recherches analytiques, nous allons conſidérer ſous un point de vue plus ſimple l'équation du mouvement des fluides.

## §. III.

### *Suite des mêmes Recherches.*

1. Au lieu de prendre $P = \frac{\varphi(x+z\sqrt{-1})+\varphi(x-z\sqrt{-1})}{2}$ & $Q = \frac{\varphi(x+z\sqrt{-1})-\varphi(x-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$, il eſt clair, par l'art. 3 du §. précédent, qu'on peut prendre $P =$

$\frac{\varphi(\zeta+x\sqrt{-1})-\varphi(\zeta-x\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$ & $Q=\frac{\varphi(\zeta+x\sqrt{-1})+\varphi(\zeta-x\sqrt{-1})}{2}$;

car ces valeurs satisferoient également aux équations $-\frac{dQ}{d\zeta}=\frac{dP}{dx}$; & $\frac{dQ}{dx}=-\frac{dP}{d\zeta}$; & dans ce cas, l'équation de la courbe seroit $\downarrow(y+x\sqrt{-1})+\downarrow(y-x\sqrt{-1})=2M$; or cela posé, la condition de $P'=0$, lorsque $\zeta=y$, & lorsque $x=a$ & $=b$, pour les deux surfaces supérieure & inférieure du fluide, donneroit en général cette équation à résoudre $\varphi(y+c\sqrt{-1})-\varphi(y-c\sqrt{-1})=0$, $c$ étant une quantité constante donnée.

2. Soit maintenant $\varphi y=k$, on aura $\varphi(y\pm c\sqrt{-1})=k\pm c\sqrt{-1}.\frac{dk}{dy}-\frac{cc.ddk}{2dy^2}+\frac{c^3\sqrt{-1}.d^3k}{2.3dy^3}+$ &c. & par conséquent la condition proposée donnera $\frac{cdk}{dy}-\frac{c^3d^3k}{2.3dy^3}+$, &c. $=0$. J'ai fait voir dans les Mémoires de Berlin de 1748 & 1750, que cette équation avoit pour intégrale $k=Ae^{fy}+Be^{f'y}+De^{f''y}+$, &c. les quantités $A$, $B$, $D$, étant des coëfficiens constans quelconques, $e$ le nombre dont le logarithme est 1, & $f$, $f'$, $f''$, les racines de l'équation $cf-\frac{c^3f^3}{2.3}+\frac{c^5f^5}{2.3.4.5}-$, &c. $=0$, dont $f$ est l'inconnue.

3. Or cette quantité est l'expression du sinus de l'angle $cf$; donc elle sera $=0$ toutes les fois que $cf$ sera $=n\pi$, $\pi$ étant la demi-circonférence, & $n$ un nombre entier positif ou négatif, en y comprenant même zero,

Donc $k$ eſt égal à la ſomme de tant de quantités $Ae^{fy}$ qu'on voudra, dans leſquelles $A$ ſera quelconque, & $f = \frac{n\pi}{c}$; donc $\varphi(y \pm cV-1)$ eſt égal à la ſomme d'une ſuite de quantités de la forme $Ae^{\frac{n\pi}{c}y \pm n\pi V-1}$; & comme il faut que dans le cas où le vaſe a deux parties ſemblables & égales $ANE$, $BMF$ (*Fig.* 7) on ait $P = 0$, lorſque $y = 0$, il s'enſuit que l'on aura $A(e^{n\pi V-1} - e^{-n\pi V-1}) = 0$, ce qui a lieu en effet, puiſque $e^{n\pi V-1} - e^{-n\pi V-1} = (2 \text{ ſin. } \pi n)V-1 = 0$. Donc $\varphi(y + cV-1) - \varphi(y - cV-1)$ eſt égal à une ſuite de quantités de la forme $A \text{ ſin. } n\pi \text{ cof. } \frac{n\pi y V-1}{c}$, $A$ étant une conſtante quelconque, & $n\pi = 0$ ou la demi-circonférence priſe un nombre entier de fois, poſitif ou négatif.

4. Cette ſolution paroît générale, & cependant elle ne l'eſt pas; en effet, il eſt aiſé de voir que la condition de $P = 0$, lorſque $z = y$, & $x = a$ ou $b$, donne encore (art. 20 & ſuiv. du trente-uniéme Mémoire) $\varphi(c + yV-1) \pm \varphi(c - yV-1) = 0$. Or ſoit ſin. $c = 0$, & $\varphi c = (\text{ſin. } c)^m$, $m$ exprimant un nombre quelconque entier ou rompu, poſitif ou négatif, on aura ſin. $(c \pm yV-1) = \pm \text{ſin. } yV-1 = \pm\left(\frac{e^{-y} - e^{+y}}{2V-1}\right)$; donc $\varphi(c \pm yV-1) = \pm\left(\frac{e^{-y} - e^{+y}}{2V-1}\right)^m$; & par conſéquent ſin. $(c + yV-1)^m +$ ſin. $(c - yV-1)^m = 0$, $m$ étant un nombre quelconque entier ou rompu, po-

ſitif ou négatif; & en général, $A\,\text{ſin.}(qc+qy\sqrt{-1})^m + A\,\text{ſin.}(qc-qy\sqrt{-1})^m + A'\,\text{ſin.}(q'c+q'y\times\sqrt{-1})^{m'} + A'\,\text{ſin.}(q'c-q'y\sqrt{-1})^{m'}$, &c. $=0$, $A$, $A'$, &c. étant des coëfficiens quelconques, $q$, $q'$, &c. des nombres entiers poſitifs ou négatifs, & $m$, $m'$, &c. des nombres quelconques entiers ou rompus, poſitifs ou négatifs. Or il eſt évident que cette formule eſt beaucoup plus générale que celle de l'art. 3 ci-deſſus.

5. Il y a plus; nous avons prouvé dans ce Mémoire-ci, §. I, art. 1 & ſuiv. que la condition $\varphi(c+y\sqrt{-1}) \pm \varphi(c-y\sqrt{-1}) = 0$, donnoit la même valeur de $\varphi c$ que celle-ci, $\varphi(c+y) \pm \varphi(c-y) = 0$; ce qui donne encore pour $\varphi c$ une valeur beaucoup plus générale que celle de $\varphi c = (\text{ſin.}\,c)^m$ ou $(\text{coſ.}\,c)^m$; nouvelle preuve que la ſolution de l'art. 3 n'eſt pas générale; mais pourquoi ne l'eſt-elle pas?

6. Voici, ce me ſemble, le dénouement de cette queſtion. C'eſt, 1°. que la quantité $\frac{\varphi(z+x\sqrt{-1})-\varphi(x-z\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$ ne repréſente pas de la maniere la plus générale (art. 6 du §. précédent) la valeur de $P$: 2°. que la méthode de l'art. 2, pour réduire $\varphi(y+c\sqrt{-1})$ en ſerie, ne donne pas la valeur réelle & générale de cette quantité. Car ſoit en général propoſée la quantité $\varphi(x+a)$, on ne ſauroit la ſuppoſer égale dans tous les cas à $\varphi x + \frac{a\,d\varphi x}{dx} + \frac{a\cdot d\,\varphi x}{2\,dx^2} +$, &c. Voyez, Tome IV des *Opuſcules*, le vingt-cinquiéme Mémoire, ſecond Supplément, art. 18, & le §. II du vingt-huitiéme Mémoire.

7. Au reſte, que cette ſolution de l'art. 2 ſoit générale ou ne le ſoit pas, elle ne ſeroit pas plus difficile, ſi on propoſoit de faire enſorte que $\varphi(x+b) \pm \varphi(x-b)$ fut $= 2Q$, $Q$ étant une conſtante; car ſoit ſuppoſé $d\varphi x = dx\Delta x$, & ſoit differentiée l'équation $\varphi(x+b) \pm \varphi(x-b) = 2Q$, en faiſant varier $x$, on aura $\Delta(x+b) \pm \Delta(x-b) = 0$, & le problême ſe réduira à celui de l'art. 2. Paſſons maintenant à d'autres conſidérations.

8. Il eſt aiſé de voir que dans l'équation $\varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi(x-y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, (voyez le trente-uniéme Mémoire) la conſtante $M$ eſt ce qui diſtingue les courbes décrites par les filets du fluide; d'où il s'enſuit que cette conſtante $M$ ne doit point entrer dans le premier membre de l'équation $\varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi(x-y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$. Donc $\varphi(x)$ doit être telle qu'elle ne renferme point $M$. On peut conſidérer d'ailleurs que cette quantité $M$ eſt variable pour chaque courbe; donc ſi elle entroit dans $\varphi x$, le premier membre de l'équation ſeroit variable pour chaque courbe; or il ne le doit pas être, car $\varphi(x+y\sqrt{-1})$, & $\varphi(x-y\sqrt{-1})$ ſont des fonctions de $x$ & de $y$, dans leſquelles il n'y a point d'autres variables.

9. Donc lorſque $y = f+hx$, le terme $\frac{M\log.(f+hx)}{\theta\pi}$, qui peut alors entrer dans la valeur de $\varphi x$, comme nous l'avons fait voir ailleurs, (Mém. de Turin, T. III, p. 383) doit être omis, puiſque $M$ ne ſauroit entrer dans $\varphi x$.

10. Il eſt à remarquer que ce terme $\frac{M\log.(f+hx)}{\theta\pi}$ pa-

roît être la ſeule reſtriction à ce que nous avons avancé, pag. 385 des mêmes Mémoires, que ſi $y$ eſt $= 0$ pour quelque valeur de $x$, on aura $M = 0$; en effet, ſoit $y = f + hx$, & $\varphi x = M \frac{\log.(f+hx)}{\theta x}$, on aura $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, $M$ n'étant pas $= 0$, quoique $y = f + hx$ donne $y = 0$, lorſque $x = -\frac{f}{h}$. Mais comme on vient de voir que $M$ doit diſparoître de $\varphi x$, il eſt clair que $M$ doit toujours être $= 0$, lorſque $y$ eſt $= 0$ pour quelque valeur finie de $x$.

11. Ainſi, en ſuppoſant même que l'équation ou ſerie infinie, tirée de l'équation $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, donne une ſolution poſſible; cette ſolution ſeroit ſouvent illuſoire pour toute autre courbe que celle des parois du vaſe; car ſoit $x = 0$, $y = g$, on aura $2M\sqrt{-1} = \varphi(g\sqrt{-1}) - \varphi(-g\sqrt{-1})$; & cette valeur de $M$, particuliere à la courbe des parois, entrera ſouvent dans la valeur de $\varphi x$; comme il arrive, par exemple, lorſque $y = f \pm hx$; & pour lors l'équation $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$ ne pourra repréſenter que la courbe des parois du vaſe, & non les autres.

12. Au reſte, il faut toujours ſe ſouvenir de ce que nous avons déja remarqué pluſieurs fois, que l'équation $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$ n'exprime pas en général & ſans reſtriction le mouvement du fluide; ainſi, quand la figure du vaſe ſera donnée, il faudra chercher parmi les équations générales de

l'art. 8, §. II de ce Mémoire, celle qui peut convenir le mieux pour repréſenter le mouvement du fluide.

## §. IV.

### *Suite des mêmes Recherches.*

1. Dans les Mémoires de Turin déja cités, j'ai donné, pag. 382 & ſuivantes, une méthode aſſez ſimple pour trouver $\varphi x$, lorſque $\varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi(x-y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, $M$ étant une conſtante, & $y$ étant $= f + hx$. J'ajouterai ici quelques remarques à ce que j'ai dit alors ſur ce ſujet, & je ſuppoſerai pour ne point me répéter qu'on ait l'ouvrage ſous les yeux.

2. Quand on a l'équation de la courbe des parois en $x$ & en $y$, & qu'on fait $x+y\sqrt{-1} = u$, & $x - y\sqrt{-1} = v$, ce qui donne $x = \frac{u+v}{2}$, & $y = \frac{u-v}{2\sqrt{-1}}$; il ne faut pas conclure que l'équation n'eſt pas réductible à la forme $\varphi u - \varphi v = 2M\sqrt{-1}$, de ce que l'équation en $u$ & en $v$, à laquelle on parvient, ne ſe préſente pas ſous cette forme.

3. En effet, ſoit par exemple $x = y$; on aura $\frac{u+v}{2} = \frac{u-v}{2\sqrt{-1}}$, & $\frac{u}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{-1}}\right) - \frac{v}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{-1}}\right) = 0$. Or cette équation ne ſauroit ſe rapporter à la forme $\varphi u - \varphi v = 2M\sqrt{-1}$, même en ſuppoſant $M = 0$; mais en faiſant $u\left(1 - \frac{1}{\sqrt{-1}}\right) =$

$v\left(1+\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)$, & élévant les deux membres à la quatriéme puiſſance, on verra aiſément que $\left(1-\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^4=\left(1+\frac{1}{\sqrt{-1}}\right)^4$, & qu'ainſi $x=y$, donne $Au^4-Av^4=0$, $A$ étant tout ce qu'on voudra; ce qui retombe dans la forme demandée.

4. Il eſt poſſible encore que l'équation n'ait pas en apparence cette forme demandée, & que cependant elle puiſſe s'y réduire; car ſi on avoit, par exemple, $uu-vv+B(uu-vv)^2+C(uu-vv)^3+$, &c. $=A+BA^2+CA^3$; &c. il eſt aiſé de voir que l'équation ſe réduiroit à $uu-vv=A$; & la choſe a lieu en général, ſi on a entre $u$ & $v$ une équation, dont une des racines ſoit ou puiſſe être $\varphi u-\varphi v-A=0$.

5. Il peut ſe faire auſſi, que par quelque préparation, on réduiſe l'équation propoſée à $\varphi u-\varphi v=A$; par exemple, ſoit $3yyx-x^3+Bx=A$, on aura en ſubſtituant $u^3-v^3+Bu-Bv=2A$; qui a la condition requiſe: donc ſi on avoit $3y-\frac{xx}{y}+\frac{B}{y}=\frac{A}{xy}$; il faudroit, pour réduire l'équation à la forme preſcrite, la multiplier par $xy$ ou par $\frac{uu-vv}{4\sqrt{-1}}$.

6. En général, ſoit $A(a+bu^m)^p=Q(a+bv^m)^q$, équation qui ne paroît pas ſe réduire à la forme $\varphi u-\varphi v=2M\sqrt{-1}$; elle s'y réduira en conſidérant que $\frac{(a+bu^m)^p}{(a+bv^m)^q}=\frac{Q}{A}$, d'où l'on tire $\log.(a+bu)^m-\log.(a+bv)^m$

$= \frac{1}{p}(\log. Q - \log. A)$, qui ſe réduit à la forme demandée; ce qui ſera vrai de même de toute équation de cette forme $A(\Gamma u) = Q(\Gamma v)$.

7. Il eſt aiſé de voir que l'on peut ſuppoſer $\frac{A+Bx+By\sqrt{-1}}{A+Bx-By\sqrt{-1}} = M+N\sqrt{-1}$, en déterminant $M$ & $N$ convenablement, enſorte que l'on ait $y = P+Qx$, $P$ & $Q$ étant réels; car on aura $\frac{A+BP\sqrt{-1}}{A-BP\sqrt{-1}} = \frac{B+BQ\sqrt{-1}}{B-BQ\sqrt{-1}}$; ce qui donne $\frac{P}{A} = \frac{Q}{B}$, ou $\frac{P}{Q} = \frac{A}{B}$, & $M+N\times\sqrt{-1} = \frac{(A+BP\sqrt{-1})^2}{A^2+B^2P^2}$; d'où l'on tire aiſément $M = \frac{A^2-B^2P^2}{A^2+B^2P^2}$, & $N = \frac{2ABP}{A^2+B^2P^2}$. De-là il eſt évident que l'on aura $\log.(A+Bu) - \log.(A+Bv) = \log.(M+N\sqrt{-1})$, qui ſe réduit à la forme demandée, quoique la ſeconde équation $y = P+Qx$, qui dans le fond eſt la même, ne ſe réduiſe pas à cette forme, puiſqu'elle donneroit $\frac{u-v}{2\sqrt{-1}} = P+Q\left(\frac{u+v}{2}\right)$ ou $\frac{u}{2}\left(Q-\frac{1}{\sqrt{-1}}\right) - \frac{v}{2}\left(-Q-\frac{1}{\sqrt{-1}}\right) = -P$.

8. Soit de même $\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v} = A\sqrt{-1}$ qui a la forme requiſe, on aura $u+v-2\sqrt{(uv)} = -A^2$, & $(u+v+A^2)^2 = 4uv$; d'où l'on tire $uu - 2uv + v^2 + 2A^2(u+v) + A^4 = 0$, qui n'a plus la forme requiſe, & qui revient à $-4y^2 + 4A^2x + A^4 = 0$. On voit donc par ces différens exemples, qu'en ſubſtituant pour

$x$ & $y$ leurs valeurs en $u$ & $v$, la réduite peut ne pas se préſenter ſous cette forme $\varphi u - \varphi v = A$, quoiqu'au fond elle s'y réduiſe, puiſque dans ce cas-ci l'équation $uu - 2uv + v^2 + 2A^2(u+v) + A^4 = 0$, eſt dérivée de $\sqrt[2]{u} - \sqrt[2]{v} = A\sqrt{-1}$.

## §. V.

### *Suite des mêmes Recherches.*

1. Pour trouver la valeur de $\varphi x$, telle que $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, $y$ étant égal à une fonction donnée de $x$; on conſidérera qu'en ſuppoſant $\varphi x = q$, on aura $M = \frac{y\,dq}{dx} - \frac{y^3\,d^3q}{2.3\,dx^3} + \frac{y^5\,d^5q}{2.3.5\,dx^5}$, &c.

2. Donc, ſi on peut trouver la valeur de $q$ en $x$, en ſuppoſant $M = 0$, & $y = X$, on trouvera par les méthodes enſeignées dans le tome III des Mémoires de Turin, pag. 179 & 381, l'intégrale de cette équation, $M$ étant une conſtante quelconque.

3. La difficulté eſt de ſavoir, 1°. ſi l'équation $M = \frac{y\,dq}{dx} - \frac{y^3\,d^3q}{2.3\,dx^3}$, &c. repréſente aſſez exactement par le moyen d'une ſuite infinie, l'équation $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$. 2°. Si cette équation eſt poſſible, c'eſt-à-dire, ſi on peut toujours aſſigner la valeur de $dq$, quel que ſoit $y$, $M$ étant $= 0$,

4. Quant à la premiere difficulté, il eſt certain que nous avons fait voir ci-deſſus par pluſieurs exemples l'inconvénient de la réduction de $\varphi(x \pm y\sqrt{-1})$ en ſerie. Quant à la ſeconde difficulté, qui ne peut être pleinement réſolue que quand on aura réſolu la premiere, j'en laiſſe pour le préſent l'examen aux Géometres.

5. Au reſte, on pourra, dans un grand nombre de cas, déterminer à peu près la valeur de la fonction $\varphi x$; car ſoit ſuppoſé $\varphi(x+y\sqrt{-1}) = A(x+y\sqrt{-1})^m + B(x+y\sqrt{-1})^n + C(x+y\sqrt{-1})^q$, &c. $m, n, q$, &c. étant des expoſans pris à volonté, & $A, B, C$, &c. des coefficiens indéterminés; on prendra ſur la courbe des parois autant de coordonnées $x, y$, &c. qu'on voudra; & par leur moyen, on déterminera les coefficiens $A, B, C$, &c. par une méthode ſemblable à celle qu'on employe pour les courbes de genre parabolique. La conſtante $2M\sqrt{-1}$ ſera (en prenant $x = 0$, & $y = b$) $A(b\sqrt{-1})^m + B(b\sqrt{-1})^n + C(b\sqrt{-1})^q$, &c. $- A(-b\sqrt{-1})^m - B(-b\sqrt{-1})^n - C(-b\sqrt{-1})^q$, &c. d'où l'on voit que $m, n, q$, &c. doivent être des nombres impairs, afin que le radical $\sqrt{-1}$ diſparoiſſe des deux membres, & que $M$ ne ſoit pas $= 0$.

6. Si au lieu de donner à l'équation de la courbe des parois la forme $\varphi(x+y\sqrt{-1}) - \varphi(x-y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, on lui donnoit celle-ci $\varphi(y+x\sqrt{-1}) \pm \varphi(y-x\sqrt{-1}) = C$, ce qui eſt toujours permis, comme on l'a fait voir ci-deſſus; alors ſuppoſant $\varphi y = t$, on auroit une valeur approchée de $t$, par la réduction

de la quantité précédente en ſerie, à cauſe que $x$ étant ſuppoſée très-petite, on pourra ne prendre que les premiers termes de cette ſerie. Cette méthode pourroit en certains cas être plus commode que l'autre; car en faiſant $\varphi y = t$, on a $\varphi(y \pm x\sqrt{-1}) = t \pm \frac{x\sqrt{-1}.dt}{dy} - \frac{x^2 ddt}{dy^2} \mp \frac{x^3\sqrt{-1}.d^3t}{dy^3}$; &c. donc puiſque $x$ eſt ſuppoſée donnée en $y$, & que $x$ eſt très-petite, on pourra ſe borner aux termes où $x$ ne paſſe pas la ſeconde puiſſance, & on aura dans les cas les plus compliqués $At + \frac{Bx^2 ddt}{dy^2} = C$. Soit $x = Y$, & $t = e^{\int p dy}$, on aura $A + BY^2\frac{dp}{dy} + BY^2p^2 = 0$, équation qui tombe dans le cas de celle de Riccati.

7. Il eſt aiſé de voir que dans le cas dont il s'agit $x$ ou $Y = b(a - y) + y'$, $a$ étant la valeur de $y$, lorſque $x = 0$, $b$ un coefficient conſtant, & $y'$ une fonction très-petite de $y$; donc en faiſant $a - y = z$, on aura la transformée ſuivante, $A + (b^2Bzz + 2Bbzy')\times(-\frac{dp}{dz} + p^2) = 0$; & d'abord il eſt clair qu'on peut intégrer l'équation $A + Bb^2zz\times(-\frac{dp}{dz} + p^2) = 0$, qui étant miſe ſous cette forme $\frac{Adz}{pp} - \frac{Bb^2dp.z^2}{p^2} + Bb^2z^2dz = 0$, devient homogene, & par conſéquent intégrable en faiſant $\frac{1}{p} = u$; maintenant ſoit $\varpi$ la va-

leur de $p$ qui satisfait à l'équation $A + Bb^2z^2\left(-\frac{dp}{dz} + p^2\right) = 0$, & soit $p = \varpi + k$, on aura, en négligeant le quarré de $k$, & faisant les substitutions dans l'équation $A + (Bb^2z^2 + 2Bb^2zy')\times\left(-\frac{dp}{dz} + p^2\right) = 0$, une équation qui ne contiendra que $dk$ & $k$, & qui s'intégrera par les méthodes connues.

8. On peut ainsi trouver $p$ & $q$ par approximation; en divisant le vase en un assez grand nombre de petites parties. Mais en voilà assez sur ce sujet.

## §. VI.

### *Suite & conclusion des Recherches Analytiques sur le mouvement des Fluides.*

1. Lorsque le mouvement d'un fluide indéfini, qui coule dans un vase, est supposé parvenu à un état constant, on aura pour un point quelconque, par exemple, pour chacun de ceux où $z = 0$, la valeur de $Q = \varphi x$; par conséquent si on suppose $Q$ connue par l'état du mouvement du fluide, on aura la valeur de $\varphi x$ exprimée, ou algébriquement, ou par la construction d'une courbe; or cela posé, je vais donner la maniere de trouver, pour chaque valeur de $x$ & de $z$, celle de $\varphi(x + z\sqrt{-1}) + \varphi(x - z\sqrt{-1})$ ou de $\sqrt{-1}\,[\varphi(x + z\sqrt{-1}) - \varphi(x - z\sqrt{-1})]$.

2. La difficulté se réduit évidemment à trouver la

valeur de $\varphi(x+z\sqrt{-1})$, celle de $\varphi x$ étant donnée; car ſoit $\varphi(x+z\sqrt{-1})=M+N\sqrt{-1}$, on aura $\varphi(x-z\sqrt{-1})=M-N\sqrt{-1}$; donc la quantité cherchée eſt $2M$ dans le premier cas, & $-2N$ dans le ſecond.

3. Soit donc $m+n\sqrt{-1}=\varphi(p+q\sqrt{-1})$; on demande la valeur de $m$ & de $n$, celles de $p$ & de $q$ étant données.

Premier cas. Si $\varphi(p+q\sqrt{-1})$ eſt donné algébriquement, j'ai enſeigné ailleurs (Mémoires de Berlin 1746) le moyen de changer $\varphi(p+q\sqrt{-1})$ en $A+B\sqrt{-1}$, $A$ & $B$ étant deux quantités réelles; cela poſé, $\varphi(p-q\sqrt{-1})$ ſera $=A-B\sqrt{-1}$, & on aura $m=A$, & $n=B$.

Second cas. Mais il peut ſe faire que $\varphi(p+q\sqrt{-1})$ ne ſoit pas donné par une expreſſion algébrique. Je m'explique. Suppoſons qu'on ait une équation algébrique quelconque entre $m+n\sqrt{-1}$ & $p+q\sqrt{-1}$, on aura $m+n\sqrt{-1}=\varphi(p+q\sqrt{-1})$, ſans que $\varphi(p+q\sqrt{-1})$ ſoit exprimé algébriquement; or c'eſt dans ce cas qu'on demande la valeur de $m$ & celle de $n$.

4. Pour y parvenir, on remarquera qu'à cauſe des quantités imaginaires & des réelles, l'équation algébrique qu'on ſuppoſe entre $m+n\sqrt{-1}$ & $p+q\sqrt{-1}$, donnera deux équations ſéparées & différentes l'une de l'autre; d'où l'on tirera une équation entre $m, p, q$, & une autre entre $n, p, q$. Or chacune de ces équations algébriques, eſt à une ſurface courbe, qui étant conſtruite par les régles ordinaires, donnera la valeur de $m$

& celle de $n$, répondantes à $p$ & $q$.

5. Si on n'a beſoin que de ſavoir la valeur de $\varphi(p+q\sqrt{-1})+\varphi(p-q\sqrt{-1})$, la valeur de $m$ ſuffira, ſans avoir égard à celle de $n$; & ſi on n'a beſoin que de ſavoir la valeur de $\sqrt{-1}\,[\varphi(p+q\sqrt{-1})-\varphi(p-q\sqrt{-1})]$, il faudra s'en tenir à celle de $n$.

6. Si on a une équation quelconque entre $m+n\sqrt{-1}$ & $f(dp+dq\sqrt{-1})\times[\Delta(p+q\sqrt{-1})]$, on changera d'abord (par les méthodes que j'ai données pour cela dans les Mémoires de Berlin déja cités) $\Delta(p+q\sqrt{-1})$ en $A+B\sqrt{-1}$, & $f(dp+dq\sqrt{-1})(A+B\sqrt{-1})$ deviendra $\int A\,dp-B\,dq+(B\,dp+A\,dq)\times\sqrt{-1}=M+N\sqrt{-1}$, $M$ & $N$ étant des quantités qu'on trouvera par les quadratures, & qui ſeront connues dès que $p$ & $q$ le ſeront; l'équation propoſée ſera donc entre $m+n\sqrt{-1}$, & $M+N\sqrt{-1}$, & le problême ſe réduira au cas précédent.

7. Il eſt bon de remarquer, que pour avoir les quantités $\int A\,dp-B\,dq$ & $\int B\,dp+A\,dq$ par les quadratures, il ne ſera pas néceſſaire d'avoir la valeur de $dp$ en $dq$; car puiſque $(dp+dq\sqrt{-1})\Delta(p+q\sqrt{-1})$ eſt une différentielle complette, $A\,dp-B\,dq+(B\,dp+A\,dq)\sqrt{-1}$, ſera auſſi une différentielle complette; & on aura $\frac{dA}{dq}+\sqrt{-1}\,\frac{dB}{dq}=-\frac{dB}{dp}+\sqrt{-1}\times\frac{dA}{dp}$; donc puiſque $A$ & $B$ ſont réelles ainſi que $p$ & $q$, on aura les quantités imaginaires & les quantités

réelles égales séparément ; donc $\frac{dA}{dq} = -\frac{dB}{dp}$ ; & $\frac{dB}{dq} = \frac{dA}{dp}$ ; donc $A\,dp - B\,dq$ est une différentielle complette d'une fonction de $p$ & de $q$, ainsi que $B\,dp + A\,dq$ ; donc on trouvera facilement ces fonctions par les quadratures.

8. Si on a une équation entre $\frac{dm + dn\sqrt{-1}}{dp + dq\sqrt{-1}}$ & $p + q\sqrt{-1}$, on fera $\frac{dm + dn\sqrt{-1}}{dp + dq\sqrt{-1}} = \zeta + \omega\sqrt{-1}$, ce qui est toujours possible ; & le problême se réduira au second cas, ensorte qu'on connoîtra la valeur de $\zeta$, & celle de $\omega$ en $p$ & en $q$ ; ensuite on aura $dm = \zeta\,dp - \omega\,dq$, & $dn = \zeta\,dq + \omega\,dq$, quantités qui devant être l'une & l'autre des différentielles exactes, feront connoître $m$ & $n$ sans qu'il soit nécessaire d'avoir la valeur de $dq$ en $dp$.

9. Si l'équation étoit entre $dm + dn\sqrt{-1}$ & $(dp + dq\sqrt{-1})\,\Delta\,(p + q\sqrt{-1})$, on la réduiroit aisément à une équation entre $\frac{dm + dn\sqrt{-1}}{dp + dq\sqrt{-1}}$ & $p + q \times \sqrt{-1}$, comme il est aisé de changer une équation entre $dx$ & $Y\,dy$ en une autre entre $\frac{dx}{dy}$ & $y$ ; parce que dans cette équation, la somme des puissances de $dx$ & $dy$ dans chaque terme sera évidemment la même, & qu'ainsi l'équation se divisera par $dx^k$ ou $dy^k$, $k$ étant la somme de ces puissances, de maniere que l'équation se trouvera

trouvera ordonnée par rapport à $\frac{dx}{dy}$ ou $\frac{dy}{dx}$.

10. Soit $\int(dp+dq\sqrt{-1})\times\Delta(p+q\sqrt{-1}) = M+N\sqrt{-1}$, & $\int(dm+dn\sqrt{-1})\times\Gamma(m+n\sqrt{-1}) = \mu+\nu\sqrt{-1}$; $\Delta$ & $\Gamma$ repréſentant des fonctions dont la forme eſt connue; ſuppoſons enſuite une équation algébrique donnée entre $M+N\sqrt{-1}$ & $\mu+\nu\sqrt{-1}$; c'eſt encore un cas de l'équation $m+n\sqrt{-1} = \varphi(p+q\sqrt{-1})$. Dans ce cas, on aura $M$ en $p$ & $q$, & $N$ en $p$ & $q$; $\mu$ en $M$ & $N$, & $\nu$ en $M$ & $N$; & par conſéquent $\mu$ & $\nu$ en $p$ & en $q$. De plus, on aura deux ſurfaces courbes, dont l'une donnera $\mu$ en $m$ & $n$, l'autre $\nu$ en $m$ & $n$; donc puiſque $\mu$ & $\nu$ ſont ſuppoſées connues en $p$ & en $q$, on aura $m$ & $n$ au moins par une conſtruction géométrique; car en prenant dans chacune des ſurfaces les courbes qui ſont repréſentées par l'équation entre $\mu$, $m$, $n$ ($\mu$ étant conſtant) & par celle entre $\nu$, $m$, $n$ ($\nu$ étant conſtant), l'interſection de ces courbes, tranſportées chacune ſur un même plan, donnera la valeur de $m$ & de $n$; ou ce qui revient au même, on imaginera que l'axe des $\mu$ & celui des $\nu$ ſoient pris ſur la même ligne; & après avoir conſtruit les deux ſurfaces courbes ſur ce même axe, les points où ces ſurfaces ſe rencontreront, donneront les valeurs de $m$ & de $n$.

11. Si dans les équations des art. précédens, on avoit $p$ au lieu de $m$, & $q$ au lieu de $n$, & réciproquement, on auroit une équation entre $p$, $m$ & $n$, & une autre entre $q$, $m$ & $n$; donc conſtruiſant les ſurfaces courbes que re-

préſentent ces équations, on trouveroit facilement $m$ & $n$, $p$ & $q$ étant toujours ſuppoſées données.

12. Comme la courbe repréſentée (*hyp.*) par l'équation $Q = \varphi x$ peut n'être pas donnée immédiatement par une équation (même tranſcendante) entre $x$ & $Q$, mais par une équation entre ces variables & pluſieurs autres intermédiaires, par exemple, entre $x$ & $v$, entre $v$ & $t$, entre $t$ & $Q$; en ce cas, on ſuppoſera de même des équations analogues, entre $p + q\sqrt{-1}$ & $v + v'\sqrt{-1}$, $v + v'\sqrt{-1}$ & $t + t'\sqrt{-1}$, $t + t'\sqrt{-1}$ & $m + n\sqrt{-1}$; & on trouvera, par les méthodes précédentes, les valeurs de $v$ & de $v'$ en $p$ & $q$; celles de $t$ & $t'$ en $v$ & $v'$, &c. & ainſi de ſuite; ce qui n'ajoutera au problême aucune difficulté nouvelle.

13. Il eſt viſible que par toutes ces méthodes on parviendra aiſément à trouver la valeur de $\varphi(p + q\sqrt{-1})$, dès que la courbe dont les coordonnées ſont $x$ & $Q$, & qui repréſenteroit l'équation $Q = \varphi x$, ſera donnée & conſtruite au moyen de tant d'équations qu'on voudra, algébriques ou tranſcendantes.

14. Nous avons donné dans le tome III des Mémoires de la Société Royale des Sciences de Turin, pag. 391 & ſuivantes, une autre méthode par laquelle on pourra aiſément trouver la valeur de $\varphi(p + q\sqrt{-1})$, en ſuppoſant ſeulement la conſtruction ou deſcription méchanique de la courbe dont l'équation eſt $Q = \varphi x$, ſans qu'on connoiſſe l'équation de cette courbe, ſans même que la courbe ſoit aſſujettie à aucune équation.

Nous renvoyons à cet Ouvrage pour connoître en quoi notre méthode consiste : nous nous bornerons ici à la simplifier pour en rendre l'usage plus commode ; & d'abord nous donnerons une méthode simple pour trouver les coefficiens $A$, $B$, &c. indiqués à la page 392 du volume cité, & qui doivent être tels que $\varphi(x+mt) - m\varphi(x+(m-1)t) + \frac{m.m-1}{2}\varphi(x+(m-2).t) - \frac{m.(m-1).(m-2)}{2.3}\varphi(x+(m-3).t) +$ &c. $= \frac{At^m d^m \varphi x}{dt^m} + \frac{Bt^{m+1} d^{m+1} \varphi x}{dt^{m+1}}$, &c.

15. Soit $\varphi(x+t) - \varphi x = t\,d\varphi x + \frac{t^2 d^2 \varphi x}{2dx^2} + \frac{t^3 d^3 \varphi x}{2.3.dx^3}$ + &c. $= 0$. En mettant $x+t$ au lieu de $x$, le premier membre deviendra $\varphi(x+2t) - \varphi(x+t)$, & le second $t\,d\varphi(x+t) + \frac{t^2 d^2 \varphi(x+t)}{2} + \frac{t^3 d^3 \varphi(x+t)}{2.3}$, &c. c'est-à-dire $t\left(\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{t\,d^2 \varphi x}{dx^2} + \frac{t^2 d^3 \varphi x}{2dx^3} + \frac{t^3 d^4 \varphi x}{2.3dx^4}\right.$, &c.$) + \frac{t^2}{2}\left(\frac{d^2 \varphi x}{dx^2} + \frac{t\,d^3 \varphi x}{dx^3} + \frac{t^2 d^4 \varphi x}{2dx^4} + \frac{t^3 d^5 \varphi x}{2.3dx^5}\right.$, &c.$) + \frac{t^3}{2.3}\left(\frac{d^3 \varphi x}{dx^3} + \frac{t\,d^4 \varphi x}{dx^4} + \frac{t^2 d^5 \varphi x}{2dx^5} + \frac{t^3 d^6 \varphi x}{2.3dx^6}\right.$ + &c. $)$ + &c.

16. En général, si on a une quantité de cette forme $a\,d\,x^n d^n \varphi x + b\,d\,x^{n+1} d^{n+1} \varphi x + c\,dx^{n+2} d^{n+2} \varphi x +$ &c. & qu'on y mette pour $x$, $x+dx$ ou $x+t$ ; elle

sera augmentée de $a\,dx^{n+1}\,d^{n+1}\phi x + a\,dx^{n+2}\,d^{n+2}\phi x + \frac{a\,dx^{n+3}\,d^{n+3}\phi x}{2} + \frac{a\,dx^{n+4}\,d^{n+4}\phi x}{2.3}$, &c. $+ b\,dx^{n+2} \times d^{n+2}\phi x + b\,dx^{n+3}\,d^{n+3}\phi x + \frac{b\,dx^{n+4}\,d^{n+4}\phi x}{2} + \frac{b\,dx^{n+5}\,d^{n+5}\phi x}{2.3}$, &c. $+ c\,dx^{n+3}\,d^{n+3}\phi x + c\,dx^{n+4} \times d^{n+4}\phi x +$ &c. &c.

17. Donc si on a $\phi(x+nt) + \mathfrak{G}\phi(x+(n-1).t) + \gamma\phi(x+(n-2).t) +$ &c. $= \frac{a\,t^n\,d^n\phi x}{dx^n} + \frac{b\,t^{n+1}\,d^{n+1}\phi x}{dx^{n+1}} + \frac{c\,t^{n+2}\,d^{n+2}\phi x}{dx^{n+2}}$, &c. on aura (en mettant $x+t$ pour $x$) $a\,\phi(x+(n+1).t) + \mathfrak{G}\phi(x+nt)$ &c. $= \frac{a\,t^n\,d^n\phi x}{dx^n} + \frac{b\,t^{n+1}\,d^{n+1}\phi x}{dx^{n+1}} + \frac{c\,t^{n+2}\,d^{n+2}\phi x}{dx^{n+2}}$ &c. $+ a\,t^{n+1} \times \frac{d^{n+1}\phi x}{dx^{n+1}} + (a+b)\frac{d^{n+2}\phi x\,.\,t^{n+2}}{dx^{n+2}} + \left(\frac{a}{2}+b+c\right)\frac{d^{n+3}\phi x\,.\,t^{n+3}}{dx^{n+3}} + \left(\frac{a}{2.3}+\frac{b}{2}+c\right) \times \frac{d^{n+4}\phi x\,.\,t^{n+4}}{dx^{n+4}}$, &c.

18. Donc $a\,\phi(x+(n+1)t) + \mathfrak{G}\phi(x+nt) + \gamma\phi(x+(n-1).t)$ &c. $- a\,\phi(x+nt) - \mathfrak{G}\phi(x+(n-1)t) - \gamma\phi(x+(n-2).t)$, &c. $= \frac{a\,t^{n+1}\,d^{n+1}\phi x}{dx^{n+1}} + (a+b)\frac{t^{n+2}\,d^{n+2}\phi x}{dx^{n+1}} + \left(\frac{a}{2}+b+c\right)\frac{t^{n+3}\,d^{n+3}\phi x}{dx^{n+3}} + \left(\frac{a}{2.3}+\frac{b}{2}+c+d\right)\frac{t^{n+4}\,d^{n+4}\phi x}{dx^{n+4}}$, &c. On peut aussi remarquer en passant, que dans cette équation, le

premier membre ſimplifié devient $\alpha\varphi(x+(n+1).t) + (\zeta-\alpha)\varphi(x+nt) + (\gamma-\zeta)\varphi(x+(n-1).t) +$ &c.

19. Maintenant, ſi la premiere quantité eſt $\varphi(x+t) - \varphi x$, la ſeconde ſera (en mettant dans la premiere $x+t$ au lieu de $x$, & en retranchant cette premiere) $\varphi(x+2t) - 2\varphi(x+t) + \varphi x$; la troiſiéme ſera de même $\varphi(x+3t) - 3\varphi(x+2t) + 3\varphi(x+t) - \varphi x$; la quatriéme $\varphi(x+4t) - 4\varphi(x+3t) + 6\varphi(x+2t) - 4\varphi(x+t) + \varphi x$, &c. Ainſi en général la n^e^ quantité ſera $\varphi(x+nt) - n\varphi(x+(n-1).t) + \frac{n.n-1}{2}\varphi(x+(n-2).t) - \frac{n.n-1.n-2}{2.3}\varphi(x+(n-3).t)$, &c.

20. Donc auſſi puiſque $\varphi(x+t) - \varphi x = t\,d\varphi x + \frac{t^2 d^2\varphi x}{2dx^2} + \frac{t^3 d^3\varphi x}{2.3dx^3} +$ &c. $a$ étant $= 1$, $b = \frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{2.3}$, &c. on aura $\varphi(x+2t) - 2\varphi(x+t) + \varphi x = t^2 d^2\varphi x + (1+\frac{1}{2})\frac{t^3 d^3\varphi x}{dx^3} + (\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3})\frac{t^4 d^4\varphi x}{dx^4} +$ &c. On trouvera de même les coefficiens $a'$, $b'$, $c'$, &c. de $\frac{t^2 d^n\varphi x}{dx^n}$, $\frac{t^{n+1} d^{n+1}\varphi x}{dx^{n+1}}$, $\frac{t^{n+2} d^{n+2}\varphi x}{dx^{n+2}}$, &c. dans la valeur de $\varphi(x+nt) - n\varphi(x+(n-1).t) + \frac{n.n-1}{2}\varphi(x+(n-2).t)$

— &c. Car ces coefficiens dépendent toujours des coefficiens correſpondans $a, b, c$, &c. qui ſont dans la quantité précédente, $a'$ étant $= a$, $b' = a + b$, $c' = \frac{a}{2} + b + c$, $d' = \frac{a}{2.3} + \frac{b}{2} + c + d$, &c.

21. Mais on peut les trouver encore plus ſimplement en cette ſorte; on conſidérera, 1°. que dans $(x + nt)^p - p(x + (n-1).t)^p + \frac{p.p-1}{2}(x+(n-2).t)^p - \frac{p.p-1.p-2}{2.3}(x+(n-3).t)^p$, &c. on doit avoir tous les termes nuls, juſqu'à celui qui contient $t^n$ excluſivement. 2°. que ce terme ſera égal à $\frac{p.p-1.p-2....p-n+1}{2.3.4....n} \times nt^n$; d'où il eſt aiſé de voir que toute cette quantité $(x+nt)^p - p(x+(n-1).t)^p +$, &c. aura pour premier terme $\frac{p.p-1.p-2....p-n+1}{2.3....n} \times t^n \times (n^n - p.(n-1)^n + \frac{p.p-1}{2}(n-2)^n - \frac{p.p-1.p-2}{2.3}(n-3)^n$, &c.). Maintenant cette quantité doit être $=$ à $\frac{\gamma t^n d^n \phi x}{dx^n}$, $\gamma$ étant un coefficient qui ſera toujours le même, quel que ſoit $\phi x$; or lorſque $\phi x = (x+nt)^p$, on a $\frac{d^n \phi x}{dx^n} = \frac{d^n x^n}{dx^n} = n.n-1 \times n-2.....1$; donc on aura $\gamma = \frac{1}{2.3.4....n} \times \frac{(p.p-1...p-n+1)t^n}{n.n-1.n-2...1} \times (n^n - p(n-1)^n + \frac{p.p-1}{2}$

$\times (n-2)^n$, &c.) $= \frac{p.p-1....p-n+1}{2^2.3^2.4^2....n^2} \times t^n ( n^n -$

$p.(n-1)^n + \frac{p.p-1}{2}.(n-2)^n -$, &c.); le coefficient du terme ſuivant, qui contient $t^{p+1}$, ſe trouvera en mettant $p+1$ au lieu de $p$, dans la formule qui donne la valeur de $\gamma$, & ainſi de ſuite.

22. Par le moyen de ce calcul ſi ſimple, les coefficiens $a, b, c$, &c. $a', b', c'$, &c. (pag. 393 des Mém. de Turin, tome III) ſeront connus; & on achevera le reſte de la ſolution comme on a fait dans l'Ouvrage cité.

23. Si dans le calcul de la page 393 des Mémoires de Turin déja cités, on multiplioit la premiere équation par un coefficient indéterminé $N$, ainſi qu'on a fait les autres, on auroit $N\varphi(x+t\sqrt{-1}) - N\varphi x + \nu[\varphi(x+t) - \varphi x] + \nu'[\varphi(x+2t) - 2\varphi(x+t) + \varphi x]$ &c. $= 0$, en prenant $N\sqrt{-1} + \nu = 0$, $-\frac{N}{2} + \frac{\nu}{2} +$

$a\nu' = 0$, $+\frac{N\sqrt{-1}}{2.3} + \frac{\nu}{2.3} + b\nu' + c\nu'' = 0$, &c.

24. Mais cette généraliſation apparente ne produiroit rien de plus que le cas de $N = 1$, comme il eſt aiſé de s'en aſſurer; car les valeurs de $\nu, \nu', \nu''$, renfermeront toujours $N$ à chaque terme, & par conſéquent $N$ diſparoîtra toujours de la valeur de $\varphi(x+t\sqrt{-1})$.

25. Pour rendre cette recherche tout-à-la-fois plus ſimple & plus générale, on appellera pour abréger $\varphi(x \pm t)$, $\varphi(x \pm 2t)$, &c. la ſomme des quantités $\varphi(x+t) +$

$\phi(x-t)$, $\phi(x+2t)+\phi(x-2t)$, &c. & prenant $r$, $r'$, $r''$, &c. pour des coefficiens indéterminés, on aura les équations suivantes, dans les deux dernieres desquelles nous avons supprimé, pour la facilité de l'impression, les dénominateurs des termes du second membre, ces dénominateurs étant aisés à suppléer.

$$\phi(x\pm\sqrt{-1})-2\phi x=\frac{2^2t^2d^2\phi x}{2dx^2}+\frac{2^4t^4d^4\phi x}{2.3.4dx^4}+\frac{2^6t^6d^6\phi x}{2.3.4.5.6dx^6}\text{ &c.}$$

$$r(\phi(x\pm t)-2\phi x)=-\frac{2r't^2d^2\phi x}{2dx^2}+\frac{2r't^4d^4\phi x}{2.3.4dx^4}+\frac{2r't^6d^6\phi x}{2.3.4.5.6dx^6}\text{ &c.}$$

$$r'(\phi(x\pm 2t)-2r'\phi(x\pm t)+2r''\phi x=2r'r''t^2d^2\phi x+2r'r''t^4d^4\phi x+2r'r''t^6d^6\phi x\text{, &c.}$$

$$r''\phi(x\pm 3t)-3r''\phi(x\pm 2t)+3r''\phi(x\pm t)-2r''\phi x=2r''r''t^6d^6\phi x+\text{, &c.}$$

&c. . . . . &c.

26. Donc si on suppose que les coefficiens $1, \nu'$, &c. soient tels que la somme des premiers membres soit $= 0$, la somme des seconds membres doit l'être aussi. Donc

$$-1+\nu+2a\nu'=0;\ \frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\frac{\nu}{2\cdot3\cdot4}+c\nu'+b'\nu''=0;$$

$$-\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\frac{\nu}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+e\nu'+\&c.=0,\ \&$$

ainsi de suite.

27. On voit donc, 1°. qu'on aura aisément les valeurs de $\nu'$, $\nu''$, $\nu'''$, &c. par des équations très-simples; 2°. que $\nu$ sera tout ce qu'on voudra, & si on le suppose $= +1$, on aura $\nu' = 0$, ce qui simplifiera ces équations; mais on remarquera que $\nu$ étant supposé tel qu'on voudra, donne de la facilité pour rendre les series le plus convergentes qu'il est possible. Cependant la supposition de $\nu = +1$, qui donne $\nu' = 0$, paroît en général la plus commode, parce qu'elle fait disparoître, de la somme des deux premieres équations, les termes où seroit $t^{2n}$, $n$ étant un nombre impair; ce qui simplifie le calcul.

28. M. de la Grange, dans le volume cité des Mémoires de Turin, a donné une très-belle méthode pour résoudre le problême que nous venons de nous proposer. Il trouve que $\phi(x+t\sqrt{-1})+\phi(x-t\sqrt{-1}) = a[\phi(x+t)+\phi(x-t)]+b[\phi(x+2t)+\phi(x-2t)]+c[\phi(x+3t)+\phi(x-3t)]$ &c. $a, b, c$, &c. étant des coefficiens qu'il détermine d'une maniere aussi élégante qu'ingénieuse. On peut consulter son Mémoire, pag. 213 & suivantes. Je me contenterai de remarquer que sa méthode peut encore être généralisée. Car pre-

nant pour $m, n, p$, &c. tout ce qu'on voudra, ſans s'aſſujettir à faire $m = 1, n = 2, p = 3$, &c. on pourra toujours ſuppoſer $\varphi(x + t\sqrt{-1}) + \varphi(x - t\sqrt{-1}) + a\varphi(x + mt) + a\varphi(x - mt) + b\varphi(x + nt) + b\varphi(x - nt) + c\varphi(x + pt) + c\varphi(x - pt) + f\varphi(x + qt) + f\varphi(x - qt)$ &c. $= 2\varphi x(1 + a + b + c$ &c.$)$; $a, b, c$, &c. étant tels que l'on ait $-1 + m^2 a + n^2 b + p^2 c + q^2 f$, &c. $= 0$, $1 + m^4 a + n^4 b + p^4 c + q^4 f$, &c. $= 0$, $-1 + m^6 a + n^6 b + p^6 c + q^6 f$, &c. $= 0$; après quoi on pourra déterminer les coefficiens $a, b, c$, &c. par une méthode analogue à celle dont s'eſt ſervi le grand Géometre que nous venons de citer.

29. Au reſte, cette méthode, ou la nôtre, ou toute autre qu'on y ſubſtitueroit, ne pourroit avoir lieu dans les fonctions diſcontinues; car ſoit, par exemple, une courbe dans laquelle, à une certaine valeur de $x$, on ait deux différentes valeurs de $d\varphi x$; alors $+ t d\varphi x$, & $- t d\varphi x$ ne ſe détruiront pas; ce qui eſt néceſſaire pour que la ſolution précédente ait lieu.

30. En général, ſi $\varphi x$ eſt tel qu'il y ait un ſaut dans quelque $\frac{d^n \varphi x}{dx^n}$, alors la méthode précédente ne pourra plus être miſe en uſage.

31. De-là on pourroit conclure, comme je l'ai déja remarqué dans les Mémoires de Turin déja cités, que cette méthode eſt plus curieuſe qu'utile, puiſqu'elle ne peut être employée, ſi $\varphi x$ ou quelqu'une des valeurs de $\frac{d^n \varphi x}{dx^n}$ eſt diſcontinue; & que ſi cet inconvénient n'a

pas lieu, il faut néceſſairement que $\varphi x$ ſoit une fonction algébrique, auquel cas on employera les méthodes données précédemment pour ce cas-là.

32. Une autre raiſon qui peut empêcher qu'on n'employe avec ſuccès ces méthodes purement méchaniques, c'eſt qu'il peut arriver que $\varphi(x \pm nt)$ ne ſoit pas réel, quoique $x \pm nt$ le ſoit; par exemple, ſi $\varphi(x+nt)$ eſt $= \sqrt{[-A^2-(x+nt)^2]}$, & dans mille autres cas ſemblables. Alors il faut néceſſairement que la courbe ait une équation analytique, afin qu'on puiſſe ſuppoſer $\varphi(x+nt\sqrt{-1}) = A+B\sqrt{-1}$, $A$ & $B$ étant des quantités réelles qui ſe détermineront par les méthodes expoſées ci-deſſus.

33. Enfin, une derniere raiſon qui peut faire douter de la ſûreté & de la généralité de ces méthodes, c'eſt qu'elles ſont fondées ſur la réduction de $\varphi(x+ay)$ à $\varphi x + \frac{ay\,d\varphi x}{dx} + \frac{a^2y^2\,d^2\varphi x}{2\,dx^2}$ + &c. Or nous avons prouvé ailleurs que cette réduction ne repréſente, ni aſſez exactement, ni aſſez généralement, la valeur de $\varphi(x+ay)$.

*Fin du trente-troiſiéme Mémoire.*

# XXXIV^ME MÉMOIRE.

*Suite des Recherches ſur le mouvement des Fluides.*

## §. I.

### *Paradoxe propoſé aux Géometres ſur la Réſiſtance des Fluides.*

1. SUPPOSONS un corps compoſé de quatre parties égales & ſemblables, placé au milieu d'un fluide indéfini, lequel fluide ſoit renfermé dans un vaſe rectiligne. Imaginons que ce corps ſoit fixe & immobile, & que les parties du fluide reçoivent toutes une impulſion égale, parallèle aux côtés du vaſe & à l'axe du corps; d'abord il eſt évident que les particules du fluide à la partie antérieure, doivent ſe détourner & gliſſer le long du corps, & former des courbes d'autant plus approchantes de la ligne droite, qu'elles ſeront plus éloignées du corps, juſqu'à une certaine diſtance (qui ſera au moins celle des parois du vaſe) où elles ſe mouvront en ligne droite.

2. Si le ſolide n'eſt pas terminé en pointe fort aigue, de maniere qu'à l'origine, $\frac{dy}{dx}$ ſoit ou infini ou fini, il y aura ou il pourra y avoir une petite portion de fluide ſtagnante à cette partie antérieure, ſuivant que je l'ai dit dans *l'Eſſai ſur la Réſiſtance des Fluides*, art. 36, n°. 3. Mais pour éviter même cette difficulté, je ſuppoſe $\frac{dy}{dx} = 0$ à l'origine, enſorte que la pointe du corps ſoit infiniment aigue; alors il n'y aura plus de fluide de ſtagnant, & le fluide coulera le long de la ſurface antérieure, juſqu'au point où $dy$ redevient de nouveau parallèle à l'axe.

3. A l'égard de la partie poſtérieure, il ſemble d'abord que le mouvement y doive être différent de la partie antérieure; parce qu'à la partie antérieure, le fluide n'eſt pas libre de ſuivre ſa direction primitive, & qu'il l'eſt à la partie poſtérieure. Cependant, ſuppoſons pour un moment que les particules du fluide ayent en effet le même mouvement à cette partie poſtérieure qu'à la partie antérieure; on trouvera aiſément par notre théorie du mouvement des fluides, que dans cette ſuppoſition, les loix de l'équilibre & de l'incompreſſibilité du fluide ſeront parfaitement obſervées; car la partie poſtérieure étant (*hyp.*) ſemblable & égale à la partie antérieure, il eſt aiſé de voir que les mêmes valeurs de $p$ & de $q$, qui donneront au premier inſtant l'équilibre & l'incompreſſibilité du fluide à la partie antérieure, donneront les mêmes réſultats à la partie poſtérieure. Donc la ſup-

poſition dont il s'agit n'a rien que de légitime; donc le fluide peut en effet ſe mouvoir ainſi à la partie poſtérieure. Or, s'il le peut, il le doit, car le fluide n'a qu'une façon poſſible d'être mu par la rencontre du corps.

4. Dans cet état, le fluide exercera ſur le corps une preſſion, laquelle, ſi elle n'eſt pas nulle (ce que nous diſcuterons dans un moment) n'aura aucun effet pour déranger le corps de ſa place, puiſque (*hyp.*) le corps eſt immobile & fixement arrêté au milieu du fluide. Soit $u$ la vîteſſe imprimée au fluide, la preſſion, s'il y en a au premier inſtant, s'exercera à la partie antérieure du corps, & ſera $ku$, $k$ étant une quantité qui dépend de la figure du corps.

5. Soit $uq$ la vîteſſe du fluide parallèle à l'axe, $up$ ſa vîteſſe perpendiculaire à l'axe; puiſqu'il eſt ſuppoſé animé dans toutes ſes parties au premier inſtant de la vîteſſe de tendance $u$ parallèle à l'axe, & qu'il change cette vîteſſe dans les vîteſſes $uq$ & $up$, parallèles & perpendiculaires à l'axe, & variables pour chaque partie, la preſſion du fluide ſur le corps ſera la même, que ſi le fluide étoit en repos & animé des vîteſſes $u - uq$ & $- up$, parallèles & perpendiculaires à l'axe. Or en vertu de la vîteſſe $u$, la preſſion qu'il exerceroit ſeroit, par les principes d'hydroſtatique, dans la direction contraire à $u$, & ſeroit $= Mu$, $M$ étant la maſſe du corps; & en vertu des vîteſſes $-uq$, $-up$, la preſſion qu'il exerceroit ſeroit dans une direction contraire à la preſſion $Mu$, & égale à $4 u \int dy \int ds \sqrt{(pp + qq)}$, comme il eſt

aiſé de le voir, en ſuppoſant $\int ds\sqrt{(pp+qq)} = 0$, & $\int dy \int ds\sqrt{(pp+qq)} = 0$, à celui des deux points où $dy = 0$, & qui n'eſt pas le ſommet du corps, c'eſt-à-dire au point où la tangente eſt parallèle à l'axe, ſans coincider avec l'axe même; car il eſt viſible, pour le dire en paſſant, que puiſque (*hyp.*) $dy = 0$, lorſque $x = 0$, & que le corps eſt compoſé de quatre parties égales & ſemblables, il doit y avoir de chaque côté de l'axe un autre point où $dy = 0$, & que ce point eſt placé vis-à-vis le milieu de l'axe. Donc, ſuppoſant cette quantité $\int dy \int ds\sqrt{(pp+qq)} = R$ dans ſa totalité, on aura $k = 4R - M$.

6. Dans les inſtans ſuivans, les parties du fluide conſervent évidemment les vîteſſes $uq$, $up$, parallélement & perpendiculairement à l'axe; d'où il eſt aiſé de voir, par notre théorie de la réſiſtance des fluides, que la preſſion du fluide ſur le corps ſera abſolument nulle; la preſſion ſur la ſurface antérieure étant égale & contraire à la preſſion ſur la ſurface poſtérieure.

7. Et ſi on ſuppoſoit qu'une force $\gamma$, conſtante ou variable à chaque inſtant, mais la même à chaque inſtant pour toutes les parties du fluide, animât toutes ces parties; elles n'en continueroient pas moins à décrire les mêmes lignes, avec une vîteſſe qui ſeroit augmentée en raiſon de $\gamma dt$ à $u$; & il n'en réſulteroit qu'une nouvelle preſſion exercée ſur la ſurface du corps, & $= k\gamma$.

8. Suppoſons préſentement le fluide en repos, & que le corps y ſoit pouſſé avec la vîteſſe $v$, dont il ne garde

que la partie $u$. Donnons à tout le ſyſtême du corps & du fluide le mouvement $u$ en ſens contraire, le corps ſera en repos dans l'eſpace abſolu; il aura en avant la force de tendance $M(v-u)$, & le fluide exercera ſur lui dans le même ſens une preſſion $=ku$, laquelle contrebalancera & détruira la force $M(v-u)$. Donc on aura $ku=(v-u)M$; & $u=\frac{Mv}{k+M}=\frac{Mv}{4R}$, valeur de $u$ au premier inſtant.

9. Suppoſons enſuite que le corps continue à ſe mouvoir dans le fluide avec une vîteſſe qui décroiſſe à chaque inſtant de la quantité $\gamma dt$, enſorte que $du=-\gamma dt$, & ſuppoſons auſſi que le ſyſtême du corps & du fluide ſe meuve en ſens contraire avec cette vîteſſe décroiſſante; il eſt viſible que le corps ſera en repos, & que la preſſion à chaque inſtant ſera $k\gamma$ ou $kdu$, laquelle doit contrebalancer $Mdu$; on aura donc $Mdu=du(4R-M)$ ou $Mdu=2Rdu$.

10. Donc on aura, ou $du=0$, ou $2R=M$.

11. Si $du=0$, le corps ſe mouvra d'un mouvement uniforme, & on aura la vîteſſe primitive $u=\frac{Mv}{4R}$.

12. Si $2R=M$, on aura $u=\frac{v}{2}$, & la quantité $du$ reſteroit indéterminée; elle pourroit par conſéquent être ſuppoſée nulle, & devroit même être ſuppoſée telle, puiſqu'il n'y a point d'autre condition pour la déterminer, que l'équation $Mdu=2Rdu$.

13. Ainſi, la plus grande altération qui puiſſe arriver au

au mouvement primitif du corps, c'eſt que la vîteſſe $v$, qu'on ſuppoſe lui avoir été imprimée, ſoit changée au premier inſtant en $\frac{Mv}{4R}$, après quoi il ſe mouvra ſans éprouver aucune réſiſtance de la part du fluide.

14. Si la figure du corps eſt telle que $\int dy \int ds \sqrt{(pp+qq)}$ ou $R$ ſe trouve $= \frac{M}{4}$, alors $u$ ſeroit $= v$; d'où il s'enſuivroit que la preſſion du fluide $k u = u(4R - M)$, au premier inſtant, ſeroit $= 0$, & qu'ainſi le corps, au premier inſtant, ne perdroit rien de ſa vîteſſe. C'eſt auſſi ce que l'expérience paroît confirmer; comme il réſulte de l'art. 55 de notre *Eſſai ſur la Réſiſtance des Fluides.*

15. Je n'examine point ſi les quantités $p$ & $q$, trouvées par la théorie, ſeront en effet telles que $4R = M$, quelle que ſoit la figure du corps, ce qui me paroît très-douteux; je n'examinerai pas même ſi $4R$ ne pourroit pas, dans certaines figures, être $> M$, & dans d'autres $< M$, enſorte que $u$ ſeroit $< v$ dans le premier cas, & $u > v$ dans le ſecond, ce qui paroît dans le premier cas contraire à l'expérience, & dans le ſecond contraire au bon ſens; je veux donc bien ſuppoſer que $p$ & $q$ ſoient toujours tels que $4R = M$; en ce cas on auroit $du = 0$; & il s'enſuivroit de notre théorie cette conſéquence, que le corps, ſuppoſé de quatre parties égales & ſemblables, n'éprouveroit aucune réſiſtance de la part du fluide.

16. Et quelque rapport qu'on ſuppoſe entre $4R$ & $M$, il eſt viſible que la vîteſſe $v$ ne ſouffriroit tout au plus d'altération que dans le premier inſtant, & qu'enſuite elle

demeureroit uniforme. Ce ſeroit bien pis ſi $4R$ étoit $< M$, car alors la vîteſſe initiale ſeroit d'abord augmentée, & enſuite demeureroit uniforme.

17. Je ne vois donc pas, je l'avoue, comment on peut expliquer par la théorie, d'une maniere ſatisfaiſante, la réſiſtance des fluides. Il me paroît au contraire que cette théorie, traitée & approfondie avec toute la rigueur poſſible, donne, au moins en pluſieurs cas, la réſiſtance abſolument nulle ; paradoxe ſingulier que je laiſſe à éclaircir aux Géometres.

## §. II.

### *Sur la Vîteſſe du Son.*

1. J'ai remarqué le premier, pag. 248 des Mémoires de Berlin de 1747, qu'on pouvoit ſe ſervir pour calculer la vîteſſe du ſon, des mêmes formules dont on ſe ſert pour calculer les mouvemens d'une corde ſonore, & que ces deux problêmes étoient abſolument du même genre. Je ne pouſſai pas alors plus loin cette remarque, parce qu'il me paroiſſoit que la recherche analytique de la vîteſſe du ſon ſe trouveroit ſuſceptible de difficultés ſemblables à celles qu'on rencontre dans le problême des cordes vibrantes, difficultés que j'ai expoſées & détaillées dans le premier Mémoire de mes *Opuſcules*, & auxquelles j'en ai depuis encore ajouté d'autres qui font l'objet du 25^e^ Mémoire, Tome IV. Je vais entrer ici dans une diſcuſſion plus approfondie au ſujet de la

vîteſſe du ſon ; diſcuſſion d'après laquelle il me ſemble que ce problême ne peut gueres être ſoumis au calcul analytique.

2. Soit pris le commencement d'une ligne ſonore en un point quelconque, & ſoient $x$ les parties de cette ligne, $t$ le temps écoulé depuis le premier inſtant du mouvement, $y$ les excurſions de chaque particule, $p$ la peſanteur, $\lambda$ la hauteur d'une ligne d'air d'une denſité égale à l'air que nous reſpirons, laquelle ligne repréſente le poids de l'atmoſphere ; on aura donc $p\lambda$ pour la force avec laquelle les parties de l'air ſont tendues ; ſoit de plus $a$ l'eſpace qu'un corps peſant parcourt dans un temps donné $\theta$, on aura, par la théorie des vibrations expoſée dans les Mémoires de Berlin 1747, $\frac{ddy}{dt^2} = \frac{p\lambda \times ddy \times 2a}{pdx^2.\theta^2}$, d'où l'on conclura que $y = \varphi\left(x + \frac{\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta} \times t\right) + \Gamma\left(x - \frac{\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta} \times t\right)$.

3. Or au commencement du mouvement, lorſque $t = 0$, $y$ eſt $= 0$, quel que ſoit $x$, puiſque lorſque $t = 0$, aucune particule n'eſt encore en mouvement ; donc $+ \Gamma x = - \varphi x$ ; donc $y = \varphi\left(x + \frac{t\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}\right) - \varphi\left(x - \frac{t\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}\right)$ ; donc $\frac{dy}{dt}$, c'eſt-à-dire la vîteſſe $u$, ſera $\frac{\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta} \times \left[\Delta\left(x + \frac{t\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}\right) + \Delta\left(x - \frac{t\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}\right)\right]$ ; & lorſque $t = 0$, la vîteſſe ſera $\frac{\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}$.

$\times 2 \Delta x$ ; $\Delta x$ étant $= \frac{d\varphi x}{dx}$.

4. Cela posé, soit $A$ (*Fig.* 27) le point de l'air qui a été mis en mouvement par le corps sonore, & supposons que l'agitation s'étende dans le premier instant jusqu'en $B$ & $C$; la courbe $BDC$, des vîtesses initiales, sera telle que faisant $AP = x$, $PM = \frac{dy}{dt}$, on aura $PM = 2\Delta x$; ensorte que $\Delta x$ sera $= 0$, si $x$ est $> +AC$ ou $> -AB$. Donc si on prend un point $O$ quelconque hors de l'axe $BC$, la vîtesse du point $O$ après le temps $t$, sera $=$ (en prenant $O\pi$ & $Op = \frac{t\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}$) $\Delta(A\pi) +$ $\Delta(Ap) =$ (à cause de $\Delta(A\pi) = 0$) $\Delta(Ap) = \frac{Pm}{2}$.

5. Par la même raison, si on suppose le point $O$ tel que $AO$ soit $= \frac{t\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}$, le point $O$ étant placé où l'on voudra, la vîtesse en $O$, au bout du temps $t$, sera $= \frac{AD}{2}$, c'est-à-dire à la moitié de la vîtesse initiale.

6. Par-là il semble d'abord qu'on peut expliquer comment le son se propage, & comment il se formera successivement de part & d'autre des points $B$, $C$, & dans des temps égaux, des fibres sonores égales en longueur à la fibre initiale $BC$, & qui auront la moitié de la vîtesse de chaque point correspondant de cette fibre initiale. C'est au moins ce que de très-grands Géometres ont pensé. Mais cette conséquence est fondée sur bien des hypothéses sujettes à contestation.

7. En premier lieu, les mêmes difficultés que nous avons expoſées ailleurs, & dont il paroît qu'on a reconnu la ſolidité, prouvent que la courbe qui repréſente les vîteſſes initiales, doit être telle que toutes ſes branches ſoient aſſujetties à une même équation, & liées par la loi de continuité. Or c'eſt ce qui n'a point lieu ici; car l'équation $u = 2\Delta x$, eſt telle que quand $x > AC$ ou $> -AB$, $u$ eſt $= 0$; or il n'y a point de fonction algébrique qui puiſſe repréſenter cette condition.

8. Cette difficulté deviendroit encore plus grande, ſi les deux parties $BD$, $CD$ de la courbe des vîteſſes initiales n'étoient pas aſſujetties à la même équation; or c'eſt une ſuppoſition qu'il paroît bien difficile d'admettre, que l'identité d'équation pour ces deux parties. En effet, ſi on applique à la ligne ſonore les mêmes raiſonnemens que nous avons faits ſur le mouvement initial de la courbe vibrante, pag. 246 des Mémoires de Berlin 1747, on trouvera que ſi on prend les parties de l'axe $AC$, en progreſſion arithmétique, les ordonnées correſpondantes ſeront en progreſſion géométrique décroiſſante, & qu'il en ſera de même pour les parties de l'axe $AB$; d'où l'on voit, 1°. que les deux parties $BD$, $DC$ ne ſeront pas aſſujetties à la même équation. 2°. que ces deux parties feront un angle au point $D$, & qu'ainſi le problême du mouvement de la ligne ſonore ſera inſoluble, par la même raiſon qui, de l'aveu de tous les Géometres, rend inſoluble le problême des cordes vibrantes, lorſqu'il ſe trouve des angles dans la figure ini-

tiale de la corde. 3°. En ce cas, les points $B$, $C$ doivent s'éloigner à l'infini, puiſqu'une progreſſion géométrique décroiſſante ne parvient jamais à un terme qui ſoit $= 0$. Nous examinerons dans un moment les conſéquences qui réſultent de cet éloignement à l'infini des points $B$, $C$.

9. Si on veut, ce qui eſt encore une hypothéſe aſſez plauſible, que toutes les parties $AC$ ſoient également condenſées, & les parties $AB$ également dilatées par le mouvement du point $A$ vers $C$, alors $DC$ & $DB$ ſeront deux lignes droites faiſant un angle en $D$, & les mêmes difficultés auront lieu.

10. Mais pour éviter toute hypothéſe précaire, & réduire tout au cas le plus favorable, ſuppoſons, ce qui eſt au moins mathématiquement poſſible, que la courbe des vîteſſes initiales s'étende à l'infini, comme dans les fig. 28 & 29, enſorte qu'elle ait $BC$ pour aſymptote, & que de plus les branches $BD$, $DC$, ſoient aſſujetties à une même équation ; ſuppoſons de plus que les ordonnées, à une aſſez petite diſtance de part & d'autre du point $A$, ſoient très-petites par rapport à $AD$, afin de pouvoir expliquer comment le ſon n'eſt d'abord ſenſible qu'à une petite diſtance du corps ſonore $A$, quoiqu'à la rigueur toute la maſſe de l'air ſoit ébranlée, ou puiſſe être cenſée ébranlée dès le premier inſtant ; en ce cas, le ſon qui réſultera du mouvement du point $O$ (*Fig.* 29) commencera à être ſenſible lorſque $AO$ ſera telle qu'en prenant $OP = \frac{tV(2a\lambda)}{\theta}$, $AP = x -$

$\frac{\iota\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}$ ſera fort petit, parce qu'il n'y a (*hyp.*) que les abſciſſes très-petites $AP$, dont les ordonnées $PM$ ayent une longueur ſenſible & comparable à $AD$.

11. Pour expliquer donc dans cette hypothéſe la propagation du ſon, qui eſt à peu près toujours la même, ſelon les Phyſiciens, ſoit que le ſon initial ſoit fort ou foible, il faudra ſuppoſer que les courbes $DB$, $DC$ convergent très-promptement vers leur axe, quelque grande que ſoit l'ordonnée initiale $AD$.

12. Je laiſſe à d'autres à examiner ſi cette conſéquence n'eſt pas contraire aux expériences journalieres ſur la propagation du ſon; & ſi le mouvement primitif des parties de la ligne ſonore peut permettre de ſuppoſer que les branches $BD$, $DC$, ſoient aſſujetties à la loi de continuité, & qu'elles ayent $BC$ pour aſymptote, quoiqu'elles convergent très-promptement vers leur axe. Quoiqu'il en ſoit, on remplira ces conditions en prenant, par exemple, la ligne $Du = z$, $AD = a$, & $(uM)^2 = \frac{Az^n}{(a-z)^q} + \frac{Bz^m}{(a-z)^k}$, &c. $n$, $m$, $q$, $k$ étant impairs, afin que la courbe n'ait point d'autres branches réelles que $BD$, $BC$.

13. Soit $A\mathfrak{f}$ la vîteſſe du ſon le plus foible qu'on puiſſe entendre, il s'enſuit de la théorie précédente, que ſi la vîteſſe du ſon initial eſt $= 2A\mathfrak{f}$, le ſon ſe propagera à l'infini; car en prenant $AO = \frac{\iota\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}$, on aura, lorſque $x = AO$, $u$ égale à la moitié de l'ordonnée qui

répond au point $A$, c'eſt-à-dire à $\frac{2A\delta}{2}$, plus à la moitié de l'ordonnée qui répond au point $o$, tel que $Ao = 2AO = x + \frac{\iota\sqrt{(2a\lambda)}}{\theta}$; donc $u$ ſera un peu plus grand que $\frac{2A\delta}{2}$, c'eſt-à-dire, que $A\delta$; autre conſéquence qui ne paroît pas facile à admettre, puiſqu'un ſon, ſelon l'expérience, ſe propage d'autant moins loin qu'il eſt plus foible.

14. Une autre conſéquence qui réſulte de la théorie précédente, c'eſt que la vîteſſe $u$ eſt toujours réelle & poſitive, puiſqu'elle eſt toujours égale à la ſomme de deux ordonnées réelles & poſitives; d'où il s'enſuit que la vîteſſe des particules ſera toujours dirigée dans le même ſens; & que par conſéquent la fibre ſonore ira toujours en ſe condenſant de $A$ vers $C$, & en ſe dilatant de $A$ vers $B$. Or cette conſéquence eſt abſolument contraire à la loi de la propagation du mouvement dans un fluide élaſtique.

15. Si les courbes $DB$, $DC$ ne s'étendoient pas à l'infini, alors après un certain temps, différent pour chaque particule, on trouveroit que la vîteſſe de cette particule ſeroit $= o$, & qu'elle ceſſeroit-là ſans devenir négative; autre conſéquence choquante de nos formules analytiques.

16. On voit donc qu'en faiſant même les ſuppoſitions les plus favorables au calcul, il ne paroît pas poſſible de réduire à des formules analytiques exactes les loix du mouvement des particules de l'air, ni par conſéquent de rendre

rendre raiſon par ces formules de la propagation du ſon, telle que l'expérience nous l'a fait connoître.

17. A l'occaſion de ces remarques ſur le ſon, j'en ferai une qui n'a qu'un rapport éloigné à cette matiere, ſur la preſſion & la denſité des différentes couches de l'atmoſphere. Les formules que nous avons données pour cet objet (art. 79 de notre Traité des Fluides) ſuppoſent que quand un reſſort eſt infiniment peu contracté ou dilaté, la force qui tend à le rétablir eſt infiniment petite du *ſecond* ordre; c'eſt-à-dire qu'il faut une force infiniment plus petite pour comprimer ou dilater infiniment peu un reſſort qui eſt dans ſon état naturel, que pour le comprimer ou dilater auſſi infiniment peu, lorſqu'il eſt déja comprimé ou dilaté aſſez ſenſiblement. Or cette ſuppoſition, quoiqu'elle paroiſſe aſſez vraiſemblable, n'eſt cependant pas démontrée; & il ſe pourroit faire, (ce que l'expérience ſeule doit décider) que les deux forces fuſſent comparables entr'elles, quoiqu'il ſoit évident que la premiere doive toujours être plus petite que la ſeconde, & d'autant plus petite que le reſſort eſt dans le ſecond cas déja plus comprimé ou plus dilaté.

18. Par exemple, ſi dans l'art. 79 de l'Ouvrage cité, on ſuppoſoit $y = \frac{n(a-u)}{u}$, $n$ étant un nombre très-petit, on trouveroit pour l'équation des denſités des couches de l'atmoſphere $\int \zeta dx = \frac{n(dt-dx)}{dx}$, ou en mettant pour $n\,dt$ ſa valeur $\zeta\,dx$, $\int \zeta dx = \zeta - n$ ou $\int \zeta dx + n = \zeta$, pour la loi entre les denſités & les hauteurs des

couches de l'atmosphere. Voyez ce que nous avons dit au sujet de cette derniere loi ou équation, dans l'art. 81 de l'Ouvrage cité, & dans l'art. 81 de nos *Recherches sur la cause des Vents*. Voyez aussi plus bas, sur les loix de la compression des ressorts, le 36^e^ Mémoire, §. I.

## §. III.

### *Sur le solide de la moindre résistance.*

1. J'ai donné le premier en 1744 dans mon *Traité de l'Equilibre & du mouvement des Fluides*, page 376, art. 370, la véritable équation du solide de la moindre résistance, en ayant égard à la masse du solide; condition essentielle au problême, envisagé sous son véritable point de vûe, c'est-à-dire dans l'hypothése d'un solide qui souffre en effet de la résistance dans son mouvement, & dont par conséquent le mouvement se ralentit peu-à-peu, & non pas d'un solide qui se meut uniformément, étant poussé par une force qui contrebalance la résistance du fluide. La formule que j'ai donnée dans l'endroit cité, consiste à faire la différentielle de $\frac{y\,dy^3\,dx}{ds^4}$ proportionnelle à $y\,dy$, $x$ & $y$ étant les coordonnées du solide, & $s$ les arcs correspondans.

2. Depuis la publication de cette solution, d'habiles Géometres ont traité le même problême dans l'hypothése dont il s'agit, & leurs résultats s'accordent avec le mien. Il restoit à faire une observation qui paroît leur avoir échappé, & qui m'avoit échappé à moi-même lorsque je résolus ce problême il y a plus de 24 ans, mais

que j'ai eu depuis occaſion de faire dans l'Encyclopédie à l'article *Réſiſtance*, Tome XIV, pag. 177. Voici en quoi cette obſervation conſiſte. Quoique la ſolution dont il s'agit donne le véritable ſolide de la moindre réſiſtance, cependant il faut employer dans la théorie de la conſtruction des navires, la ſolution ordinaire qui conſiſte à faire = o la différentielle $d\left(\frac{ydy^3dx}{ds^4}\right)$ de l'impulſion, & non pas à la faire proportionnelle à $ydy$. Car dans la théorie de la réſiſtance du navire, on ſuppoſe que le navire marche uniformément, enſorte que l'action de l'eau ſur la ſurface ſoit contrebalancée par l'action du vent ſur les voiles; d'où l'on voit aiſément que la maſſe du vaiſſeau ne doit entrer pour rien dans la conſidération de l'effet que la réſiſtance doit produire; l'action du vent étant donnée, la vîteſſe uniforme du vaiſſeau ſera la plus grande, lorſque $d\left(\frac{ydy^3dx}{ds^4}\right)$ ſera = o, c'eſt-à-dire, lorſque l'intenſité de la réſiſtance ſera un *minimum*; puiſque cette intenſité multipliée par le quarré de la vîteſſe doit être = à l'action du vent. Mais ſi on fait abſtraction de toute force qui contrebalance la réſiſtance, & qu'on cherche le ſolide qui étant mu dans un fluide avec une vîteſſe initiale donnée, & continuellement diminuée par la réſiſtance du fluide, parcourra le plus grand eſpace dans un temps donné; il eſt clair qu'il faut employer la ſolution où l'on a égard à la maſſe du ſolide. Car ſoit $K$ l'intenſité de la réſiſtance, $M$ la maſſe du ſolide, $v$ la vîteſſe à chaque inſtant $dt$, & $s$ l'eſpace parcouru;

on aura $du = -\frac{Kuudt}{M}$, & $-\frac{du}{u} = \frac{Kdx}{M}$; donc $\frac{1}{u} = \frac{Kt}{M} + \frac{1}{g}$, $g$ étant la vîteſſe initiale, & $\frac{Kdt}{M} : \left(\frac{Kt}{M} + \frac{1}{g}\right) = \frac{Kdx}{M}$, ou $dx = dt : \left(\frac{Kt}{M} + \frac{1}{g}\right)$; donc puiſque $\frac{K}{M}$ eſt ſuppoſé un *minimum*, il eſt aiſé de voir qu'à égale valeur de $t$, $x$ ſera un *maximum*. Et c'eſt-là, encore une fois, le véritable point de vûe de la queſtion propoſée, quoique ce ne ſoit peut-être pas celui ſous lequel elle eſt ſuſceptible de l'application la plus utile.

## §. IV.

### *Sur la poſition des Aîles des Moulins à Vent.*

1. J'ai donné auſſi le premier en 1744 dans mon *Traité de l'Equilibre & du mouvement des Fluides*, art. 369, les vrais principes ſur leſquels doit être fondé le calcul des moulins à vent, & de la diſpoſition la plus avantageuſe de leurs aîles. La nouveauté de la méthode que j'ai propoſée dans l'article cité, eſt fondée ſur deux choſes; 1°. ſur la maniere dont je détermine l'action du vent ſur l'aîle, & les précautions qu'il faut prendre pour l'évaluer exactement. 2°. Sur le raiſonnement très-ſimple par lequel je parviens à la véritable équation qui renferme la condition du problême, c'eſt-à-dire, qui doit donner la vîteſſe de l'aîle égale à un *maximum*; équation qui n'avoit point encore été trouvée. Les recherches que

quelques Auteurs ont faites depuis sur ce sujet, m'ayant encore donné lieu de penser à cette matiere, m'ont fait naître plusieurs réflexions que j'ai crues dignes d'être proposées aux Géometres, & qui confirment pleinement ma premiere solution, dont l'exactitude paroît avoir été révoquée en doute par d'habiles Mathématiciens.

2. Je considérerai d'abord, pour commencer par le cas le plus simple, l'aîle comme un parallélogramme rectangle d'une hauteur & d'une largeur très-petite, placé à la distance donnée $a$; je conserverai les noms & la figure de l'article cité, & j'aurai d'abord pour l'impulsion perpendiculaire à l'aîle, $A\left(\frac{bt}{a}-\gamma\right)^2\times\frac{aa}{aa+tt}$, $A$ étant l'intensité de l'impulsion; or cette impulsion étant multipliée par $\frac{a}{\sqrt{(aa+tt)}}$, cosinus de l'angle que l'aîle fait avec l'axe, il en résulte la force qui tend à faire tourner l'aîle, laquelle sera $A\left(\frac{bt}{a}-\gamma\right)^2\times\frac{a}{(aa+tt)^{\frac{1}{2}}}$. Et si on nomme $\theta$ le temps, & qu'on fasse l'angle de l'aîle avec l'axe $=\omega$, on aura $\frac{t}{a}=\frac{\text{sin. }\omega}{\text{cos. }\omega}$, $\frac{a}{\sqrt{(aa+tt)}}=\text{cos. }\omega$; & $d\gamma=Ad\theta\,\text{cos. }\omega^3\left(\frac{b\,\text{sin. }\omega}{\text{cos. }\omega}-\gamma\right)^2$, d'où l'on tire, en intégrant & ne faisant varier que $\gamma$ & $\theta$, qui sont en effet les seules variables, l'équation complettée $\frac{1}{\frac{b\,\text{sin. }\omega}{\text{cos. }\omega}-\gamma}=A\theta\,\text{cos. }\omega^3+\frac{\text{cos. }\omega}{b\,\text{sin. }\omega}$; & $\gamma=\frac{b\,\text{sin. }\omega}{\text{cos. }\omega}-\frac{b\,\text{sin. }\omega}{\text{cos. }\omega+A\theta b\,\text{sin. }\omega\,\text{cos. }\omega^3}=\frac{A\theta b^2\,\text{sin. }\omega^2\,\text{cos. }\omega}{1+A\theta b\,\text{sin. }\omega\,\text{cos. }\omega^2}$.

3. Il eſt aiſé de voir, par ces différentes équations, 1°. que la vîteſſe $\gamma$ de l'aîle doit toujours aller en augmentant juſqu'à ce que $\gamma = \frac{bt}{a}$ ou $\frac{b \text{ ſin. } \omega}{\text{cof. } \omega}$; ce qui n'arrivera (comme il réſulte auſſi de ces mêmes équations) qu'au bout d'un temps infini; 2°. qu'en ſuppoſant $A$ & $b$ conſtans, & prenant $\theta$ fini & conſtant à volonté, la valeur de $\gamma$ ſera d'autant plus grande, que $\frac{\text{ſin. } \omega^2 \text{ cof. } \omega}{1 + A\theta b \text{ ſin. } \omega \text{ cof. } \omega^2}$ ſera plus grand; d'où il s'enſuit, en faiſant ſin. $\omega = x$, qu'on aura, lorſque $\gamma$ eſt un *maximum*, l'équation $d(x^2 \sqrt{[1 - xx]})[1 + A\theta bx - A\theta bx^3] = d(A\theta bx - A\theta bx^3)(x^2 \sqrt{[1 - xx]})$, ce qui donnera la valeur de $x$ par l'équation $2 - 3x^2 + A\theta bx - A\theta bx^3 = 0$. Or cette équation donne $\theta = \frac{3x^2 - 2}{Ab(x - x^3)}$. D'où l'on voit, 1°. que quand $\theta = 0$, on a $3x^2 - 2 = 0$; c'eſt-à-dire, que pour que la vîteſſe, au premier inſtant, ſoit la plus grande qu'il eſt poſſible, il faut que le ſinus de l'angle $\omega = \sqrt{\frac{2}{3}}$, d'où réſulte, comme l'on ſait, $\omega = 54°$ environ; c'eſt le ſeul cas dont on ait parlé juſqu'ici; mais on voit que cette poſition n'a d'autre avantage, ſinon que la vîteſſe infiniment petite que reçoit l'aîle, au premier inſtant, eſt la plus grande qu'il eſt poſſible; ce qu'il eſt d'ailleurs aiſé de voir directement; car puiſqu'au premier inſtant $\gamma = 0$, on aura $d\gamma = Ad\theta(b \text{ ſin. } \omega^2 \text{ cof. } \omega) = Ad\theta(bx^2 \sqrt{[1 - xx]})$ qui eſt évidemment un *maximum* quand $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

4. Si $x = 1$, alors $\theta$ eſt égal à l'infini, c'eſt-à-dire, que

si $x = 1$, la vîteſſe au bout du temps infini $\theta$ ſera la plus grande qu'il eſt poſſible; ce qui n'eſt pourtant pas vrai à la rigueur; car il eſt aiſé de voir que ſi $x$ eſt rigoureuſement $= 1$, c'eſt-à-dire ſi le plan de l'aîle eſt perpendiculaire à l'axe, & par conſéquent (*hyp.*) à la direction du vent, l'aîle ſeroit plutôt renverſée, que miſe en mouvement autour de l'axe; mais on voit du moins clairement que ſi $x$ eſt fort près de l'unité, la plus grande vîteſſe $y$ à laquelle l'aîle arrivera au bout du temps fini $\theta$ ſuppoſé très-grand, ſera à peu près égale à $\frac{b \text{ ſin. } \omega}{\text{cof. } \omega} = \frac{bx}{\sqrt{(1-xx)}}$, c'eſt-à-dire très-grande.

5. On voit par-là, qu'en conſidérant le problême dans le cas même le plus ſimple, faiſant abſtraction des frottemens, & n'ayant égard, ni à la largeur, ni même à la longueur de l'aîle, la valeur de $x = \sqrt{\frac{}{}}$ ne donne point la plus grande vîteſſe de l'aîle, comme on l'avoit cru juſqu'ici, mais ſeulement la vîteſſe initiale infiniment petite la plus grande qu'il eſt poſſible. On voit encore que plus l'angle $\omega$ du plan de l'aîle avec l'axe approchera d'être égal à $90^{\circ}$, ſans cependant être tout-à-fait égal à cet angle, plus la vîteſſe que prendra l'aîle ſera grande, enſorte qu'au bout d'un temps, à la vérité très-grand, elle pourra être très-conſidérable. Cette eſpéce de paradoxe peut aiſément s'éclaircir, en conſidérant que ſi $x = 1$, c'eſt-à-dire ſi cof. $\omega = 0$, on aura $y = 0$; au lieu que ſi cof. $\omega$ n'eſt pas $= 0$, quelque petit qu'il ſoit d'ailleurs, on pourra prendre $\theta$ ſi grand que $A\theta\, b$ ſin. $\omega$ cof. $\omega^3$ ſoit plus

grand qu'aucune quantité donnée à volonté ; d'où il eſt aiſé de voir que la plus grande valeur de $\gamma$, ou plutôt la limite de cette plus grande valeur, ſera $\frac{b \text{ ſin. } \omega}{\text{cof. } \omega}$.

6. Juſqu'à préſent, ou du moins juſqu'à la ſolution que j'ai donnée du problême dont il s'agit dans mon *Traité des Fluides*, on s'étoit contenté, pour trouver la poſition des aîles la plus avantageuſe, de chercher la poſition où la force motrice étoit la plus grande, en ſuppoſant la vîteſſe finie ou comme infinie par rapport à celle de l'aîle ; or cette ſolution étoit illuſoire. Car outre que la vîteſſe du vent n'eſt point infinie & ne ſauroit l'être, il eſt clair que dans cette ſuppoſition même, la force motrice agiſſant toujours ( puiſqu'elle ne pourroit jamais être nulle, la vîteſſe du vent étant infinie ) la vîteſſe de l'aîle doit être continuellement accélérée, ce qui eſt contraire à l'expérience. D'ailleurs, il eſt évident que la vîteſſe reſpective du vent & de l'aîle eſt ce qui conſtitue la force motrice, & c'eſt à cette vîteſſe reſpective que nous avons eu égard, comme on le doit, dans la ſolution du problême dont il s'agit.

7. Examinons maintenant, toujours dans l'hypothéſe que la largeur & la longueur de l'aîle ſoient infiniment petites, quel doit être le mouvement de l'aîle en ayant égard au frottement. Soit $C$ le rayon de l'axe où les aîles ſont attachées, & qu'on ſuppoſe ici avoir une certaine épaiſſeur ; le frottement vient évidemment de la rotation de l'axe, dont les points ont une vîteſſe $= \frac{C\gamma}{a}$ ;

imaginant

imaginant donc, ſuivant l'hypothéſe communément admiſe, que le frottement ſoit proportionnel à cette viteſſe, il ſera $= \frac{C\mathfrak{C}\gamma}{a}$, $C$ étant une conſtante que l'expérience doit donner; cette réſiſtance agira par un bras de levier $= \mathfrak{C}$, ainſi que la force motrice $A\left(\frac{bt}{a} - \gamma\right)^2 \times \frac{a^3}{(aa+tt)^{\frac{1}{2}}}$ par un bras de levier $= a$, & il faudra, pour que le mouvement de l'aîle parvienne à l'uniformité, que l'on ait l'équation $Aa\left(\frac{bt}{a} - \gamma\right)^2 \times \frac{a^3}{(aa+tt)^{\frac{1}{2}}} = \frac{C\mathfrak{C}\mathfrak{C}\gamma}{a}$; ou $Aaa$ cof. $\omega^3 \left(\frac{b \text{ ſin. } \omega}{\text{cof. } \omega} - \gamma\right)^2 = C\mathfrak{C}^2\gamma$; d'où l'on tire $\gamma = + \frac{b \text{ ſin. } \omega}{\text{cof. } \omega} + \frac{C\mathfrak{C}^2}{2Aaa \text{ cof. } \omega^3} \pm \sqrt{\left(\frac{bC\mathfrak{C}^2 \text{ ſin. } \omega}{Aaa \text{ cof. } \omega^4} + \frac{C^2\mathfrak{C}^4}{4A^2a^4 \text{ cof. } \omega^6}\right)}$. Pour déterminer de la maniere la plus ſimple le cas où $\gamma$ eſt un *maximum*, on conſidérera que l'on aura l'équation $Aaab^2$ ſin. $\omega^2$ cof. $\omega - 2Aaab\gamma$ ſin. $\omega$ cof. $\omega^2 + Aaa\gamma^2$ cof. $\omega^3 - C\mathfrak{C}\mathfrak{C}\gamma = 0$; laquelle étant différenciée, on aura, en ſuppoſant $d\gamma = 0$, une ſeconde équation $b^2 d(\text{ſin. } \omega^2 \text{ cof. } \omega) - 2b\gamma d(\text{ſin. } \omega \text{ cof. } \omega^2) + \gamma^2 d(\text{cof. } \omega^3) = 0$; ces deux équations combinées, donneront la valeur de $\omega$ & celle de $\gamma$: ou ce qui eſt encore plus ſimple, on fera égale à zero, la différentielle de la valeur de $\gamma$ trouvée ci-deſſus, après l'avoir miſe auparavant ſous la forme ſuivante, qui eſt plus commode pour le calcul, & qui donne, en ſuppoſant $a$ égal à l'unité, $\gamma = bt +$

$\frac{Cc^2(1+tt)^{\frac{3}{2}}}{2A} \pm \sqrt{\left(\frac{Cbc^2t(1+tt)^{\frac{1}{2}}}{A} + \frac{C^2c^4(1+tt)^3}{4A^2}\right)}$;

d'où l'on tire aiſément, en faiſant $dy = 0$, l'équation qui donnera la valeur de $t$, & dont je laiſſe le détail & la diſcuſſion au Lecteur.

8. Si on ſuppoſoit le frottement proportionnel au quarré de la vîteſſe au lieu de la vîteſſe ſimple, on auroit alors une équation de cette forme $D$ cof. $\omega^3 \times \left(\frac{b \text{ ſin. } \omega}{\text{cof. } \omega} - \gamma\right)^2 = E\gamma^2$, & $P$ cof. $\omega \left(\frac{b \text{ ſin. } \omega}{\text{cof. } \omega} - \gamma\right) = \frac{Q\gamma}{\sqrt{(\text{cof. } \omega)}}$, $P$ & $Q$ étant des conſtantes ; donc $\gamma = \frac{P\,b \text{ ſin. } \omega}{P \text{ cof. } \omega + \frac{Q}{\sqrt{(\text{cof. } \omega)}}}$ ; donc faiſant cof. $\omega = z^2$, la valeur de $\gamma$ ſera un *maximum*, quand la différence de $\frac{z\sqrt{(1-z^4)}}{Pz^3+Q}$ ſera égale à zero ; ce qui donnera pour $z$ une valeur réelle ; car il eſt aiſé de voir que quand ſin. $\omega = 0$, on a $\gamma = 0$, & que quand ſin. $\omega = 1$, & cof. $\omega$ ou $z = 0$, la valeur de $\gamma$ eſt auſſi $= 0$.

9. On peut faire de même une grande quantité d'autres hypothéſes ſur la valeur du frottement, & en tirer les équations convenables ; mais quelque ſuppoſition qu'on faſſe, il faut, ce me ſemble, exclure celle où la force du frottement ſeroit abſolument & uniquement conſtante, & où la vîteſſe n'entreroit pas ; puiſqu'il eſt évident qu'il n'y a point de frottement où il n'y a aucune vîteſſe.

10. On pourroit cependant, à d'autres égards, ſuppo-

ſer conſtante, non pas, à proprement parler, la force qui vient du frottement, mais la force avec laquelle la machine réſiſte à être miſe en mouvement, & qui ſous ce point de vûe, peut être regardée comme une force conſtante, puiſque l'expérience fait voir qu'il faut d'abord une certaine force pour mettre une machine en mouvement, & qu'une force infiniment petite n'y ſuffiroit pas. En ce cas, l'équation de la machine dont il s'agit ſeroit $D$ cof. $\omega^3 \left(\frac{b \text{ ſin.}\omega}{\text{cof.}\omega} - \gamma\right)^2 = E$, ou $P b$ ſin. $\omega - P\gamma$ cof. $\omega = \frac{Q}{\sqrt{(\text{cof.}\omega)}}$; d'où l'on tire $\gamma = \frac{b \text{ ſin.}\omega}{\text{cof.}\omega} - \frac{Q}{P(\text{cof.}\omega)^{\frac{1}{2}}}$; ou $\gamma = bt - \frac{Q}{P}(1+tt)^{\frac{3}{4}}$, & la vîteſſe ſera la plus grande, lorſque $b - \frac{3t}{2} \times \frac{Q}{P} \times (1+tt)^{-\frac{5}{4}}$ ſera $= 0$; ce qui donnera la valeur de $t$ & par conſéquent celle de $\omega$. Au reſte, l'hypothéſe de la réſiſtance proportionnelle à une quantité conſtante, ne paroît plus ſuffire quand une fois le corps eſt en mouvement, & il paroît évident que la force du frottement qui s'y joint pour lors dépend de la vîteſſe. Mais c'eſt un objet que je laiſſe aux Phyſiciens à diſcuter. Il y a ſeulement apparence, d'après ce que nous avons dit ci-deſſus, que la force totale, qui retarde le mouvement des corps, eſt en partie conſtante, & en partie proportionnelle à une puiſſance, ou à une fonction de la vîteſſe reſpective avec laquelle les ſurfaces ſe meuvent.

11. Pour déterminer dans les calculs précédens (art.

1 & ſuivans) la conſtante $A$, on ſuppoſera, 1°. que la vîteſſe $b = \sqrt{(2ph)}$, $p$ étant la peſanteur ; 2°. que cette vîteſſe ſoit acquiſe au bout du temps $T$ ; 3°. que la réſiſtance directe du fluide à la ſurface de l'aîle, mue en ligne droite avec cette vîteſſe $b$, ſoit $mp$, & l'on aura $A = \frac{\sqrt{(2ph)}}{T} \times \frac{m}{b^2}$ ; de ſorte qu'en mettant pour $b$ ſa valeur $\sqrt{(2ph)}$, on aura $Ab^2 = \frac{m\sqrt{(2ph)}}{T}$, & par conſéquent $Ab^2 = \frac{mb}{T}$, & $Ab = \frac{m}{T}$ ; ainſi, dans l'art. 2, on aura $\gamma = \frac{b \text{ ſin. } \omega}{\text{cof. } \omega} - \frac{b \text{ ſin. } \omega}{\text{cof. } \omega + \frac{mb}{T} \text{ ſin. } \omega \text{ cof. } \omega^3}$, $T$ étant le temps qu'un corps peſant mettroit à acquérir la vîteſſe $b$.

12. Suppoſons maintenant que la longueur de l'aîle ſoit finie & $= n$, comme dans l'art. 369 de l'Ouvrage cité, ſa largeur étant toujours ſuppoſée très-petite, & les noms étant encore ſuppoſés les mêmes que dans cet article ; on aura la force motrice perpendiculaire à l'aîle $= A\left(\frac{bt}{a} - \frac{\gamma x}{a}\right)^2 \frac{a^2}{aa+tt}$, ou plutôt $\frac{mp}{b^2}\left(\frac{bt}{a} - \frac{\gamma x}{a}\right)^2 \times \frac{aa}{aa+tt}$ ; & ſi on n'a point d'égard au frottement, le calcul pour déterminer $\gamma$, $n$ & $t$, ſera le même que dans l'art. cité. Dans ce cas, il eſt abſolument inutile de décompoſer la force motrice en une autre dans le ſens ſuivant lequel l'aîle ſe meut, ce qui donneroit $\frac{a^3}{(aa+tt)^{\frac{1}{2}}}$ au lieu de $\frac{aa}{aa+tt}$ ; il n'eſt pas même

néceſſaire, pour parvenir à l'équation eſſentielle du problême, d'avoir égard au facteur $\frac{aa}{aa+tt}$, parce que ce facteur, ainſi que le facteur $\frac{a^3}{(aa+tt)^{\frac{3}{2}}}$, ſe trouvant affecter tous les termes d'une quantité qu'on fait égale à zero, peut & doit être négligé, ainſi que nous l'avons fait à l'endroit cité dans le dernier réſultat de notre calcul. C'eſt pourquoi, ſi on fait abſtraction du frottement, comme nous l'avons fait dans l'endroit cité avec tous ceux qui avoient tenté juſqu'alors de réſoudre ce problême, la ſolution que nous en avons donnée eſt très-exacte.

13. Si on veut avoir égard au frottement, & qu'on ſuppoſe ce frottement proportionnel à une fonction $\varphi$ de la vîteſſe $\frac{c\gamma}{a}$, (fonction qui peut, ſi l'on veut, renfermer une conſtante) alors il faudra décompoſer la force motrice dans le ſens où l'aîle ſe meut, & on aura, d'après les calculs faits dans l'art. cité, l'équation $\left(\frac{b^4t^4}{6\gamma^2} - \frac{n^2b^2t^2}{2} + \frac{2b\gamma tn^3}{3} - \frac{\gamma\gamma n^4}{4}\right) \times \frac{a}{(aa+tt)^{\frac{1}{2}}} - C \times \varphi\left(\frac{\gamma c}{a}\right) = 0$. Après quoi, on achevera le reſte du calcul comme dans l'endroit cité, pour trouver les conditions qui rendent $\gamma$ un *maximum*.

14. Ainſi la méthode que nous avons donnée (art. 369 du *Traité des Fluides*) pour le cas où le frottement $= 0$, s'applique aiſément au cas où l'on voudra avoir égard

au frottement ; c'eſt-à-dire, qu'il faudra faire = o le moment des forces accélératrices moins celui du frottement, & trouver enſuite la plus grande ordonnée $\gamma$ de la ſurface courbe qui réſulte de cette équation.

15. Il n'eſt point du tout néceſſaire, & il ſeroit même illuſoire de chercher ici l'équation différentielle qui donne la valeur de $d\gamma$, 1°. parce que la vîteſſe de l'aîle étant ſuppoſée, comme elle l'eſt ici, parvenue à l'état d'uniformité, il ſuffit de trouver l'équation qui établit cet état d'uniformité, & c'eſt l'équation précédente (art. 13); 2°. parce qu'on ſe tromperoit en croyant que pour trouver la plus grande valeur poſſible de $\gamma$, il faille faire = o la différentielle de la quantité qui exprime la force motrice. En effet, ſuppoſons qu'on ait $d\gamma = K\,dt$, $K$ étant une fonction de $\gamma$, $n$, $t$ & de conſtantes; on a déja (*hyp.*) $K = o$ pour exprimer la condition que la vîteſſe de l'aîle ſoit parvenue à l'état d'uniformité; ainſi, la ſuppoſition de $dK = o$, pour faire $K$ à un *maximum*, ſeroit illuſoire.

16. Pour le faire ſentir encore mieux, ſuppoſons pour un moment la force du frottement conſtante, enſorte que $K = K' - B$, $B$ étant conſtant, & $K'$ une fonction de $\gamma$, $n$ & $t$, laquelle réſulte de la force motrice produite par l'impulſion du vent; la condition de $K = o$, donnera $K' - B = o$, ou $K' =$ à une conſtante $B$; & celle de $K$ égal à un *maximum*, donneroit auſſi $K'$ égal à un *maximum*; ce qui eſt contradictoire, puiſque $K'$ eſt ſuppoſé égal à une conſtante $B$.

17. En ſuppoſant $K = 0$, & $dK = A' dn + B' dt + C' d\gamma$ ($A'$, $B'$ & $C'$ étant des fonctions de $\gamma$, $n$, $t$), on aura en général $A' dn + B' dt + C' d\gamma = 0$; donc faiſant $\gamma$ un *maximum*, & par conſéquent $d\gamma = 0$ dans cette derniere équation, on aura $B' = 0$, $A' = 0$. Ces équations ſont préciſément les mêmes qu'on auroit, en ne faiſant point varier $\gamma$ dans la quantité $K$, & en faiſant cette quantité $K$ égale à un *maximum*. Mais ces conditions $A' = 0$, $B' = 0$, ne donnent point pour cela la quantité $K$ réellement = à un *maximum*, puiſque cette quantité $K$ eſt véritablement ſuppoſée égale à zero dans la ſolution du problême.

18. On aura donc pour déterminer $\gamma$, $n$, $t$, les trois équations $K = 0$, $A' = 0$, $B' = 0$: & nous remarquerons de plus en paſſant, que quoiqu'on ne preme point la différence de $\gamma$ dans la différentiation de $K$, cependant il faudra bien ſe garder, avant de différencier $K$, d'y ſubſtituer la valeur de $\gamma$ tirée de l'équation $K = 0$; car cette ſubſtitution donneroit $0 = 0$, & la différentiation de $K$, en ne faiſant que $n$ & $t$ variables, donneroit auſſi $0 = 0$; ce qui ne feroit rien connoître. Il faut donc laiſſer ſubſiſter la quantité $\gamma$ dans $K$ pour prendre la différence $dK = A dn + B' dt + C' d\gamma = 0$, ou ſimplement $A dn + B' dt = 0$.

19. Dans les calculs précédens, où j'ai eu égard à la longueur de l'aîle, j'ai ſuppoſé que l'aîle touchoit immédiatement l'axe, enſorte que les intégrales fuſſent = 0 lorſque $x = 0$. Si on vouloit rendre les réſultats plus gé-

néraux, on n'auroit qu'à ſuppoſer avec d'autres Géometres que $b$ fût la diſtance de l'extrémité inférieure de l'aîle à l'axe du moulin; & il n'y auroit d'autres changemens à faire dans les calculs précédens, que d'ajouter des conſtantes, telles que les intégrales fuſſent nulles quand $x=b$; l'équation du problême contiendra alors quatre indéterminées $\gamma, u, t, b$, & on aura $K=0$, $A'dn+B'dt+D'db=0$; ou $A'=0$, $B'=0$, $D'=0$. Ce qui donnera la valeur des quatre inconnues pour le cas où $\gamma$ eſt un *maximum*.

20. Si on vouloit avoir égard à la largeur de l'aîle, les calculs, pour déterminer la réſiſtance & les momens des forces, ſeroient plus compliqués; mais la ſolution ſe réduiroit toujours à faire $=0$ la ſomme des momens des forces accélératrices, moins le moment du frottement, & à faire enſuite $=0$ les coefficiens de $dn, dt, db, d\lambda$, en appellant $\lambda$ la largeur de l'aîle, & faiſant toujours $d\gamma=0$.

21. Dans le cas où il n'y a que trois variables $\gamma, n, t$, les équations qui donneront $d\gamma=0$, ſont préciſément celles qui donneroient $\gamma=$ à un *maximum* dans la courbe qui a pour ordonnées $\gamma$ & $n$, $t$ étant conſtant, & $\gamma=$ à un *maximum* dans la courbe qui a pour ordonnées $\gamma$ & $t$, $n$ étant conſtant; en effet, la premiere condition donneroit $d\gamma=\frac{A'dn}{C}$, & par conſéquent $A'=0$, & la ſeconde $d\gamma=\frac{B'dt}{C}$, & $B'=0$. Or on ſait que pour avoir la plus grande ordonnée d'une courbe, il ne ſuffit pas toujours de faire $=0$ le coefficient de la différentielle

tielle qui en exprime la valeur ; il en eſt de même pour les plus grandes ordonnées des ſurfaces ; & l'on peut voir ſur ce ſujet un ſavant Mémoire de M. de la Grange dans le premier volume de la Société des Sciences de Turin. Il pourroit donc ſe faire que la méthode propoſée ci-deſſus, & qui conſiſte à faire = o les coefficiens de $dn$, $dt$, &c. eût beſoin de quelque modification ; ce qui ſe verra aiſément en achevant les calculs indiqués pour la ſolution de ce problême ; calculs dont le détail nous meneroit trop loin quant à préſent.

## §. V.

### *Sur la réfraction des Corps ſolides.*

1. Dans le même *Traité des Fluides* déja cité, j'ai expoſé en détail les loix de la réfraction des corps ſphériques ou circulaires, & j'ai indiqué les principes pour trouver celles de la réfraction des corps de figure quelconque. Voyez cet Ouvrage, liv. III, chap. II, & les art. 364, 365, 366. Voici quelques nouvelles réflexions ſur ce ſujet ; elles ſerviront ſur-tout à faire voir comment on peut expliquer, par la ſeule réſiſtance du fluide, les ricochets qu'on forme ſur l'eau avec des corps à ſurface plane.

2. Soit $AB$ (*Fig.* 30) une ligne droite, qui atteigne la ſurface d'un fluide, en ſe mouvant ſuivant $CL$ dans un plan perpendiculaire à cette ſurface ; & ſoit menée la verticale $CQ$. Il eſt très-aiſé de voir, 1°. que ſi l'angle

$LCQ$ eſt $< QCB$, la premiere action de la réſiſtance vers $B$, lorſque la ligne $AB$ commence à entrer dans le fluide, tendra à pouſſer le centre $C$ ſuivant $CK$ perpendiculaire à $AB$, & à faire tourner en même-temps la ligne $AB$ autour du centre $C$ de $B$ vers $O$; 2°. que cela continuera ainſi juſqu'à ce que le point $C$ ſoit arrivé ſur la ſurface du fluide, & même encore quelque temps après qu'il l'aura traverſée; 3°. que quand toute la ligne $AB$ ſera enfoncée, & même dès auparavant ce moment, l'action de la réſiſtance ſur la partie $AC$ étant évidemment plus forte que ſur la partie $AB$, (parce que les points de la partie $AC$ frappent le fluide avec plus de vîteſſe abſolue, en vertu du mouvement de rotation combiné avec le mouvement direct) le centre $C$ éprouvera bien toujours une action ſuivant $CK$; mais la force qui tendoit à faire tourner la verge de $B$ vers $O$ tendra à la faire tourner en ſens contraire. D'où l'on voit, 1°. que la courbe décrite par le centre $C$ ſera d'abord convexe vers la perpendiculaire $CQ$, & qu'elle pourra même devenir perpendiculaire à $CQ$, & avoir enſuite une branche qui remonte de bas en haut; 2°. que la réſiſtance, ou la force de rotation qui en réſulte, s'exercera ſur la ligne $AC$ pour la faire d'abord tourner de $B$ vers $O$, enſuite qu'elle agira en ſens contraire.

3. Par-là on pourra déterminer la route que ſuit la ligne $AB$; & on verra aiſement 1°. comment la courbe convexe, décrite par le centre $C$, peut faire remonter ce centre & toute la ligne $AB$, de maniere qu'elle reſſorte

du fluide ; 2°. comment la réſiſtance produit en même-temps dans la ligne $AB$ un pirouettement de $B$ vers $O$. Pour ne point embraſſer trop de difficultés à-la-fois, nous ſuppoſerons que la réſiſtance ſoit en raiſon du quarré de la vîteſſe, ou même (ce qui rendra les calculs plus faciles) de la ſimple vîteſſe ; que la ligne $AB$ ſoit entiérement enfoncée dans le fluide, enſorte que le point $A$ touche la ſurface, & qu'elle ait déja acquis un mouvement de rotation de $B$ vers $O$ par la réſiſtance qu'elle a éprouvée en traverſant le fluide ; enfin, que $CL$ ſoit ſa direction dans l'inſtant où nous commençons à chercher ſon mouvement, ou en général dans un des inſtans quelconques qui ſuivent celui-là. Nous allons donner les équations par leſquelles on pourra trouver la courbe décrite par le centre, au moins tant que la ligne $AB$ eſt entiérement plongée dans le fluide ; ce qui ſuffira pour notre objet.

4. Soit $CB = b$, la vîteſſe du centre $C$ ſuivant $CL = u$, l'angle $LCB = A$, la vîteſſe du point $B$ ſuivant l'arc $BO$, pour tourner autour du point $C$, centre de cet arc, égale à $v$, $CI = x$, $f$ l'intenſité de la réſiſtance à une ſurface $= a$, mue avec la vîteſſe $V$ ; il eſt aiſé de voir que la vîteſſe avec laquelle le point $I$ frappe perpendiculairement le fluide, eſt $u$ ſin. $A - \frac{vx}{b}$, ou (en faiſant $b = 1 = a$ pour ſimplifier le calcul) $u$ ſin. $A - vx$ ; donc, 1°. en ſuppoſant la réſiſtance comme le quarré de la vîteſſe, l'action totale qui réſultera de cette réſiſtance

ſuivant $C'K$, ſera égale à $\int \frac{f}{V^2} (u \text{ ſin. } A - v x)^2 dx$ $+ \int \frac{f}{V^2} (u \text{ ſin. } A + v x)^2 dx$, en ayant attention (*Traité des Fluides*, art. 367) que ces deux intégrales ſoient de même ſigne, c'eſt-à-dire en prenant l'intégrale de maniere qu'elle ſoit = o quand $x = o$, & complette quand $x = b = 1$; ce qui donne $= \frac{2f}{V^2} (u^2 \text{ ſin. } A^2 + \frac{v^2}{3})$; & le moment total des forces ſera $\int \frac{f}{V^2} (u \text{ ſin. } A - v x)^2$ $x dx - \int \frac{f}{V^2} (u \text{ ſin. } A + v x)^2 x dx$; on aura donc, en prenant l'intégrale avec les mêmes précautions, $\frac{f}{V^2}$ $\times - \frac{4uv \text{ ſin. } A . b^3}{3} = - \frac{4fuv \text{ ſin. } A}{3V^2}$, pour ce moment.

5. Si on ſuppoſoit la réſiſtance proportionnelle à la ſimple vîteſſe, il faudroit dans les quantités précédentes mettre ſimplement $u \text{ ſin. } A \mp v x$, au lieu de $(u \text{ ſin. } A \mp v x)^2$, & on auroit la force totale ſuivant $CK = \frac{2fu \text{ ſin. } A}{V}$, & le moment total $= - \frac{2fvb^3}{3V}$.

6. Donc ſi on nomme $\varphi$ la premiere de ces quantités, & $\downarrow$ la ſeconde, $\theta$ le temps pendant lequel la peſanteur $p$ feroit parcourir l'eſpace $a$, & $d\lambda$ l'angle infiniment petit parcouru par le point $B$, on aura d'abord $\frac{2b^3 dd\lambda}{3}$ ou ſimplement $\frac{2 dd\lambda}{3} = \frac{2a \downarrow dt^2}{p\theta^2}$; enſuite nommant $x$ & $y$ les coordonnées verticale & horizontale de la

courbe décrite par le point $C$, & $\omega$ l'angle de $CB$ avec la verticale, on aura, en ayant égard à la peſanteur, la force verticale $= p - \varphi$ ſin. $\omega$, & la force horizontale $= \varphi$ cof. $\omega$; ce qui donne $ddx = \frac{2adt^2(p-\varphi \text{ ſin. } \omega)}{p\theta^2}$, & $ddy = \frac{2adt^2 . \text{cof. } \omega}{p\theta^2}$.

7. Soit maintenant $\mathfrak{C}$ l'angle que $CB$ fait au premier inſtant avec la ligne de direction du centre $C$, $\zeta$ l'angle que la direction du centre $C$ a parcouru pendant le temps $t$; il eſt aiſé de voir qu'au bout du temps $t$, l'angle $A$ ſera $= \mathfrak{C} - \zeta + \lambda$; & ſi on nomme $\rho$ l'angle que la direction du centre $C$ forme avec la verticale au premier inſtant, on aura $\omega = \rho + \zeta + A = \rho + \mathfrak{C} + \lambda$; on aura enfin $\frac{dy}{dx} = \text{tang. } (\rho + \zeta)$; & on fera attention que $d\lambda = v\,dt$, & $\sqrt{(dx^2 + dy^2)} = u\,dt$, ou $dx = u\,dt$ cof. $(\rho + \zeta)$.

8. On aura donc les équations ſuivantes, dans l'hypothéſe de la réſiſtance comme le quarré de la vîteſſe, & de $b = 1$,

$$\frac{2\,ddλ}{3} = \frac{2a\,dt^2}{p\theta^2} \times - \frac{4f}{3V^2} \times \text{ſin. } (\mathfrak{C} - \zeta + \lambda) \times \frac{d\lambda}{dt} \times \frac{dx}{dt \text{ cof. } (\rho + \zeta)};$$

$$2\,b\,ddx = \frac{2a\,dt^2}{p\theta^2}\left[p - \left(\frac{2f}{V^2} \times \frac{dx^2}{dt^2} \times \frac{1}{\text{cof. } (\rho+\zeta)^2} \times (\text{ſin. } [\mathfrak{C} - \zeta + \lambda])^2 + \frac{d\lambda^2 . 2f}{3\,dt^2\,V^2}\right) \times \text{ſin. } (\mathfrak{C} + \rho + \lambda)\right];$$

$$2\,b\,ddx \text{ tang. } (\rho + \zeta) + 2\,b\,dx\,d(\text{tang. } (\rho + \zeta)) =$$

$\frac{2adt^2}{p\theta^2} \times \left[\frac{2f}{V^2}\left(\frac{dx^2}{dt^2} \times \frac{i}{\text{cof.}(\varsigma+\zeta)^2} \times \text{sin.}\ (\mathfrak{C} - \zeta + \lambda)^2 + \frac{d\lambda^2}{3dt^2}\right) \times \text{cof.}\ (\mathfrak{C}+\rho+\lambda)\right]$.

9. On peut simplifier ces équations, en faisant $\frac{dx}{\text{cof.}(\varsigma+\zeta)}$ = à l'arc $ds$ de la courbe décrite par le centre $C$, ce qui donne $dy = \frac{dx.\text{sin.}(\varsigma+\zeta)}{\text{cof.}\,\varsigma+\zeta} = ds\,\text{sin.}\,(\rho+\zeta)$; & l'on aura

$2ddλ = \frac{-8fadt^2}{p\theta^2} \times \text{sin.}(\mathfrak{C}-\zeta+\lambda) \times \frac{d\lambda}{dt} \times \frac{ds}{dt}$.

$d(ds\ \text{cof.}\,(\rho+\zeta)) = \frac{2adt^2}{p\theta^2} \times \left[p - \left(\frac{2fds^2}{V^2dt^2} \times \text{sin.}\ (\mathfrak{C}-\zeta+\lambda)^2 + \frac{2fd\lambda^2}{3V^2dt^2}\right)\text{sin.}\,(\mathfrak{C}+\rho+\lambda)\right]$

$d(ds\ \text{sin.}\,(\rho+\zeta)) = \frac{2adt^2}{p\theta^2} \times \left[\frac{2f}{V^2} \times \left(\frac{ds^2}{dt^2} \times \text{sin.}\ (\mathfrak{C}-\zeta+\lambda)^2 + \frac{d\lambda^2}{3dt^2}\right) \times \text{cof.}\,(\mathfrak{C}+\rho+\lambda)\right]$. Je laisse aux Analystes l'intégration de ces équations, qui ne paroît pas facile, pour m'arrêter à un cas plus simple, qui sera l'objet de l'article suivant.

10. Si la résistance étoit supposée proportionnelle à la simple vîtesse, & qu'on fît abstraction de la pesanteur, les équations seroient beaucoup plus simples & plus faciles à intégrer; car on auroit,

1°. $2b^3ddλ = \frac{2adt^2}{p\theta^2} \times -\frac{2fb^3d\lambda}{Vdt}$; d'où l'on tire aisément la valeur de $\lambda$ en $s$;

$2°.\ 2b\,d(ds\cos.(\rho+\zeta)) = -\frac{2a\,dt^2}{p\theta^2}\times\frac{2\int ds\sin.(\zeta-\zeta+\lambda)}{V\,dt}$;

$3°.\ 2b\,d(ds\sin.(\rho+\zeta)) = \frac{2a\,dt^2}{p\theta^2}\times\frac{2\int ds\cos.(\zeta-\zeta+\lambda)}{V\,dt}$.

11. La seconde de ces équations donnera une valeur de $\frac{dds}{ds} = -d(\cos.\rho+\zeta) - B\,dt\sin.(\zeta-\zeta+\lambda)$, $B$ étant une constante, & $\lambda$ étant connue en $t$ par la premiere équation ; la troisiéme équation donne aussi $\frac{dds}{ds} = -d\sin.(\rho+\zeta) + B\,dt\cos.(\zeta-\zeta+\lambda)$.

12. On aura donc, en supposant $\lambda = T$, c'est-à-dire à une fonction connue de $t$, l'équation $+ d\zeta(\cos.\rho\cos.\zeta - \sin.\rho\sin.\zeta + \sin.\rho\cos.\zeta + \sin.\zeta\cos.\rho) = B\,dt$ [ $\sin.(\zeta+T)\cos.\zeta - \sin.\zeta\cos.(\zeta+T) + \cos.(\zeta+T)\cos.\zeta + \sin.\zeta\sin.(\zeta+T)$ ].

13. On peut rendre l'équation précédente encore plus simple en considérant, 1°. que $\sin.45° = \cos.45°$; 2°. que l'équation $d(\cos.\rho+\zeta - \sin.\rho+\zeta) = -B\,dt(\sin.\zeta - \zeta + \lambda + \cos.\zeta - \zeta + \lambda)$ est la même chose que $d[\cos.45°\cos.(\rho+\zeta) - \sin.45°\sin.(\rho+\zeta)] = -B\,dt[\cos.45°\sin.(\zeta-\zeta+\lambda) + \sin.45°\cos.\zeta-\zeta+\lambda)]$ ou $d(\cos.(\rho+\zeta+45°)) = -B\,dt\sin.(\zeta-\zeta+\lambda+45°)$, ou en supposant $\rho+\zeta+45° = \varpi$, & $\zeta+\rho+90°+\lambda = T'$, $d\cos.\varpi = -B\,dt\sin.(T'-\varpi)$, $T'$ étant une fonction connue de $t$ ; c'est l'équation qu'il faut intégrer, & à laquelle nous allons donner encore une autre forme plus commode dans l'article suivant.

14. On remarquera d'abord que la premiere équation,

qu'on peut mettre ſous cette forme $dd\lambda = -E d\lambda dt$, donne $\lambda = \frac{A}{E}(1 - c^{-Et})$, $A$ étant la valeur de $\frac{d\lambda}{dt}$, lorſque $t = 0$. De plus, la force qui agit ſur le point $C$ perpendiculairement à $CB$, étant $= \frac{2fu \text{ ſin. } A}{V}$ ou $\frac{Fds}{dt}$, ſin. $(\zeta - z + \lambda)$ (en prenant $F$ pour une conſtante) il eſt très-aiſé de voir que la force qui en réſulte dans la direction de $ds$ ſera $\frac{Fds}{dt}[\text{ſin. } (\zeta - z + \lambda)]^2$, & que celle qui en réſulte perpendiculairement à $ds$, pour faire parcourir au centre $C$ le petit angle $dz$, ou plutôt la petite ligne $ds\,dz$, eſt $\frac{Fds}{dt}$ ſin. $(\zeta - z + \lambda)$ cof. $(\zeta - z + \lambda)$. On aura donc $-2bdds = \frac{Fds}{dt} \times [\text{ſin. } (\zeta - z + \lambda)^2] \times dt^2$, & $2bds\,dz = \frac{Fds}{dt} \times \text{ſin. } (\zeta - z + \lambda) \text{ cof. } (\zeta - z + \lambda)\,dt^2$.

15. Donc ſuppoſant $\zeta - z + \lambda = \rho$, on aura $-\frac{2bdds}{ds} = F\,dt\,(\text{ſin. } \rho)^2$; $2b(d\lambda - d\rho) = F \text{ ſin. } \rho \text{ cof. } \rho \,.\, dt$; & faiſant la tangente de $\rho = x$, on aura, en prenant $b = 1$, $2[d\lambda(1 + xx) - dx] = Fx\,dt$.

16. Or il eſt très-facile de s'aſſurer que $F = E$; donc ſuppoſant $\frac{E}{2} = H$, on aura, à cauſe de $d\lambda = Ac^{-Et}dt$, $2\,dt(1 + xx)\,Ac^{-Et} = 2\,dx + E\,x\,dt = 2\,c^{-Ht}\,d(x\,c^{Ht})$; donc $dt(1 + xx)\,c^{-Ht} = d(x\,c^{Ht})$; donc ſuppoſant $c^{Ht} = u$, on aura $\frac{du}{Huu}(1 + xx) = d(xu)$;

$d(xu)$ ; & faisant $xu = z$, on aura $du(zz + uu) = Hu^4 dz$ ; & faisant encore $u^{-1} = y$, on aura une équation de cette forme $Cz^2 dy + Dy^{-\frac{2}{3}} dy = Hdz$, équation qui ne tombe dans aucun des cas intégrables de l'équation de Ricati, à laquelle elle se rapporte.

17. Il ne paroît donc pas possible (au moins par les méthodes connues) de trouver la courbe décrite par le centre $C$, dans l'hypothèse (la plus simple qu'on puisse faire pour le calcul) de la résistance proportionnelle à la simple vîtesse. Au reste, 1°. on peut toujours trouver le mouvement de rotation de la ligne $CB$ autour du centre $C$, au moins tant que la ligne $ACB$ est entiérement plongée dans le fluide. 2°. On peut avoir, par plusieurs points & par une espéce d'approximation, la courbe décrite par le centre $C$, en remarquant que $\text{sin.}\, \rho \,\text{cos.}\, \rho = \frac{\text{sin.}\, 2\rho}{2} = \frac{\text{sin.}\, 2(\zeta + \lambda - \varpi)}{2} =$ à très-peu près $\frac{\text{sin.}\, (2\zeta + 2\lambda)}{2} - \varpi \,\text{cos.}\, (2\zeta + 2\lambda)$, en supposant $\varpi$ peu considérable ; ce qui donne un moyen facile de construire la courbe par parties, & de connoître à peu près la route du centre $C$.

18. Quoi qu'il en soit, la théorie précédente suffit pour faire entendre comment des corps à superficie plane, lancés sur l'eau avec une direction oblique & suivant une certaine position, y sont réfléchis. Je dis *lancés suivant une certaine position.* Car il est aisé de voir par ce qui a été dit ci-dessus, que si l'angle initial $LCQ$ étoit $> BCQ$ au lieu d'être plus petit, la direction de la force

qui agit sur le centre $C$ seroit dans un sens contraire à $CK$, & que par conséquent la courbe décrite par ce centre seroit concave vers la perpendiculaire $CQ$, en sorte que la ligne $AB$, au lieu d'être réfléchie par la surface du fluide, tendoit à s'y enfoncer toujours de plus en plus. Ce qui serviroit à prouver de nouveau, s'il étoit nécessaire, combien on a eu tort de croire qu'en général tout corps passant dans un milieu plus résistant se réfractera en s'éloignant de la perpendiculaire; il est visible, par ce nouvel exemple, que tout dépend de la figure du corps, & de la direction qu'il a quand il entre dans le nouveau milieu.

19. On peut employer une méthode semblable à celle de l'art. 17, pour trouver le mouvement du corps dans quelque hypothése de résistance que ce soit, ce corps étant entiérement plongé ou non dans le fluide. Mais il est bon de remarquer, que l'hypothése de la résistance proportionnelle à toute autre fonction de la vîtesse que le quarré, est susceptible de difficultés, même purement mathématiques, dont je pourrai parler ailleurs, & qui ont lieu sur-tout dans le cas où la direction de la résistance est oblique à la surface choquée.

*Fin du trente-quatriéme Mémoire.*

# XXXV^me MÉMOIRE.

## *Réflexions sur les Suites & sur les Racines imaginaires.*

### §. I.

*Réflexions sur les suites divergentes ou convergentes.*

1. SI on éleve $1+\mu$ à la puissance $m$, le terme $n^{e}$ de la serie sera $\mu^{n-1} \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)}{2.3.4\ldots n-1}$, & le suivant, c'est-à-dire le $(n+1)^{e}$, sera $\mu^{n} \times \frac{m(m-1)\ldots(m-n+2)(m-n+1)}{2.3.4\ldots n-1.n}$; donc le rapport du $(n+1)^{e}$ terme au $n^{e}$ sera $\frac{\mu(m-n+1)}{n}$; or pour que la serie soit convergente, il faut que ce rapport (abstraction faite du signe qu'il doit avoir) soit $<$ que l'unité.

2. Remarquons d'abord que la formule précédente donnera le moyen de former très-promptement les termes d'une suite : par exemple, si $m=\frac{1}{2}$, il faudra multiplier le premier terme par $\mu \times \frac{1}{2}$ pour avoir le second ;

le ſecond par $-\mu(1-\frac{1}{4})$ pour avoir le troiſiéme; le troiſiéme par $-\mu(1-\frac{1}{6})$ pour avoir le quatriéme, & ainſi de ſuite, ce qui donne

$$1+\frac{\mu}{2}-\frac{\mu\mu}{2.4}+\frac{\mu^3.3}{2.4.6}-\frac{\mu^4.3.5}{2.4.6.8}+\frac{\mu^5.3.5.7}{2.4.6.8.10}, \text{ \&c.}$$

Si $m=\frac{1}{3}$, on aura de même $1+\frac{\mu}{3}-\frac{2\mu\mu}{3.6}+\frac{\mu^3.2.4}{3.6.8}-\frac{\mu^4.2.4.6}{3.6.8.10}+\frac{\mu^5.2.4.6.8}{3.6.8.10.12}$, &c.

3. Et en général, ſi $m=\frac{p}{q}$, il faudra toujours multiplier le dernier terme trouvé par $\mu\left(-1+\frac{p+q}{qn}\right)$. Voyons maintenant les conditions qui rendent la ſerie convergente.

4. Soit $\mu=\pm(1\pm\nu)$, ce qui repréſentera toutes les ſeries poſſibles; on remarquera d'abord que dans le cas où l'on a $1-\nu$, il faut ſuppoſer $\nu<1$; car ſi $\nu$ étoit $>1$, alors $+(1-\nu)$ retomberoit dans le cas de $-1-\nu$, ou $-1+\nu$, $\nu$ étant dans ce dernier cas $<1$; & $-(1-\nu)$ retomberoit dans le cas de $+1+\nu$, ou $+1-\nu$, $\nu$ étant dans ce dernier cas $<1$.

5. Cela poſé, ſi $\frac{m+1}{n}$ eſt $>1$, le rapport trouvé ci-deſſus du $(n+1)^e$ terme au $n^e$, ſera $\pm(1\pm\nu)\left(\frac{m+1}{n}-1\right)$, ou abſtraction faite du ſigne $\pm$, $(1\pm\nu)\left(\frac{m+1}{n}-1\right)$; & ſi $\frac{m+1}{n}$ eſt $<1$, le rapport ſera $(1\pm\nu)$

$(1 - \frac{m+1}{n})$. La seconde de ces formules sert pour les termes avancés dans la serie; car il est évident que plus $n$ sera grand, plus $\frac{m+1}{n}$ diminuera.

6. Or pour que le premier de ces rapports soit $< 1$, il faut, en supposant $n = 1 + \omega$, que $1 \pm \nu$ soit $< \frac{1+\omega}{m-\omega}$; & pour le second rapport, il faut que $1 \pm \nu$ soit $< \frac{1+\omega}{\omega - m}$.

7. Maintenant, comme $\omega$ est toujours un nombre entier positif, puisque le nombre entier $n = 1 + \omega$ ne sauroit être $< 1$, il résulte des deux formules précédentes, 1°. que dans le cas où $m$ n'est pas un nombre entier positif, seul cas où la serie $(1 + \mu)^m$ ait une infinité de termes, la serie sera convergente dans ses derniers termes si on a $\mu = 1 - \nu$; car en faisant $\omega = \infty$ dans la seconde formule, on a $\frac{1+\omega}{\omega - m} = 1$, & par conséquent $1 - \nu < \frac{1+\omega}{\omega - m}$, au moins vers les derniers termes; 2°. qu'au contraire la serie sera divergente vers sa fin, si on a $\mu = 1 + \nu$.

8. D'où il s'ensuit que la serie donnera *faux*, toutes les fois que $\mu$, pris positivement ou négativement, sera $> 1$, puisque la serie sera alors divergente à son extrémité; & qu'au contraire, lorsque $\mu$ sera $< 1$, la serie pourra toujours être employée, puisqu'elle sera con-

vergente à ſon extrémité, & que ſon dernier terme ſera infiniment petit.

9. Les formules $1 \pm \nu < \frac{1+\omega}{m-\omega}$, & $1 \pm \nu < \frac{1+\omega}{\omega-m}$ donnent les deux conditions $\pm \nu < \frac{1+2\omega-m}{m-\omega}$ ; & $\pm \nu < \frac{1+m}{\omega-m}$ ; la premiere formule ſervira pour le cas où $\omega$ eſt $< m$, & la ſeconde pour celui où $\omega$ eſt $> m$.

10. Si $m$ eſt négatif, il faudra toujours employer la ſeconde formule, parce qu'alors $\omega$ (qui eſt toujours ou zero ou un nombre entier poſitif) eſt $> m$.

11. Si $\mu$ eſt $< 1$, & par conſéquent $\nu$ négatif & $< 1$, on aura dans la premiere formule $-\nu < \frac{1+2\omega-m}{m-\omega}$, 1°. ſi le numérateur eſt poſitif, c'eſt-à-dire, en ſuppoſant $m = \omega + \rho$, ſi $1+\omega$ eſt $> \rho$; 2°. ſi le numérateur eſt négatif, & tel que $\frac{\rho-1-\omega}{\rho}$ ſoit une fraction plus petite que $\nu$; donc $1-\nu < \frac{1+\omega}{\rho}$, ou $\mu < \frac{1+\omega}{\rho}$. Donc ſi $1+\omega$ eſt $< \rho$, & que $\mu$ ſoit $> \frac{1+\omega}{\rho}$, la ſerie ſera divergente dans ſes premiers termes.

12. Or comme $\omega$ ne ſauroit être $< o$, il faut, pour que $1+\omega$ ſoit $< \rho$, que $\rho$ ſoit $> 1$, & par conſéquent à cauſe de $m = \omega + \rho$, que $m$ ſoit auſſi $> 1$. Donc ſi $m$ eſt poſitif & plus petit que 1, la ſerie ſera toujours convergente dans l'hypothéſe de $\nu$ négatif & $< 1$.

13. Dans la même hypothéſe de $\mu < 1$, la ſeconde

formule donnera $-\nu < \frac{1+m}{\omega-m}$, 1°. si $m$ est positif, 2°. si $m$ est négatif, & qu'en faisant $m = \omega - \rho$, on ait $-\nu < \frac{1+\omega-\rho}{\rho}$, ou à cause de $\rho > \omega$, $\frac{\rho-\omega-1}{\rho} < \nu$; ou à cause de $\nu = 1-\mu$, $\mu < \frac{1+\omega}{\rho}$.

14. Nous n'avons pas besoin d'examiner les cas où $\mu$ seroit $> 1$; car nous avons vû que dans ces cas-là la serie seroit divergente dans ses derniers termes, & par conséquent donneroit *faux*, quoiqu'elle pût paroître convergente dans ses premiers termes, ce qui arriveroit, par exemple, si on avoit $\mu = 2$, & $n = \frac{1}{3}$; car alors les deux premiers termes de la serie seroient 1, & $+\frac{2}{3}$, & cependant la serie donneroit *faux*.

15. Cette convergence des premiers termes peut même être poussée fort loin dans une serie qui d'ailleurs finira par être divergente, & qui par conséquent donnera *faux*; par exemple, si on éleve $1+\frac{200}{199}$ à la puissance $\frac{n}{2}$, la serie ne commencera à diverger qu'après le terme dont le quantiéme $n$ soit tel que $\left(1+\frac{1}{199}\right)\left(1-\frac{3}{2n}\right)$ soit $> 1$, c'est-à-dire tel que $n$ soit $> 300$.

16. En général, si $\frac{1}{\nu}+1$ est = à un nombre entier positif, que j'appelle $k$, ce qui donne $1 = \frac{1}{k-1}$ & $1+\nu = \frac{k}{k-1}$, la serie convergera jusqu'à un terme dont

l'exposant $n$ soit tel, qu'on ait $n > (1+m)(1+\frac{1}{\nu})$ ou $(1+m)k$.

17. On auroit donc tort de croire une serie véritablement convergente, parce qu'elle converge, même fort avant, dans ses premiers termes. Il faut nécessairement, pour que la serie ne donne pas faux, que $\mu$ soit $<1$.

18. Par la même raison, il est clair qu'une serie peut être divergente dans ses premiers termes, quoique convergente dans ses derniers, & par conséquent bonne & non fautive, pourvu qu'on la pousse assez loin pour cela; par exemple, soit $a+b$ élevé à la puissance $-3$, & $b > \frac{a}{3}$, mais $< a$, la serie se trouvera dans le cas dont nous parlons. En général, pour que la serie soit toujours convergente, il faut que $-\nu$ soit toujours $< \frac{1+2\omega-m}{m-\omega}$, ou $< \frac{1+m}{\omega-m}$. Soit par exemple $\mu = 1 - \frac{1}{k}$, $m$ un nombre négatif $= -p$, on aura pour condition de la convergence, $-\frac{1}{k} > \frac{1-p}{\omega+p}$ & $\frac{1}{k} > \frac{p-1}{\omega+p}$; donc si $\omega$ est $< kp-k-p$, la serie sera divergente. Soit par exemple $k = 100$, $p = 2$, la serie sera divergente jusqu'au $99^e$ terme; car on aura $kp-k-p = 200-100-2 = 98$; donc, tant que $n$ ou $1+\omega$ sera $< 99$, on aura $\omega < kp-k-p$.

19. On peut remarquer encore, que puisque le rapport du $(n+1)^e$ terme au $n^e$ est $\mu\left(\frac{m+1}{n}-1\right)$ ou $\mu\left(\frac{m-\omega}{1+\omega}\right)$,

ces

ces deux termes ſeront de même ſigne, 1°. ſi $\mu$ eſt poſitif & $m > \omega$; 2°. ſi $\mu$ eſt négatif & $m < \omega$; & au contraire de différens ſignes, ſi $\mu$ eſt poſitif & $m < \omega$, ou ſi $\mu$ eſt négatif & $m > \omega$.

20. Donc ſi $\mu$ eſt négatif, les termes de la ſerie ſeront de même ſigne, à commencer au terme $n$, tel que $n$ ou $1 + \omega$ ſoit $> 1 + m$; au contraire, ſi $\mu$ eſt poſitif, les termes ſeront de ſignes alternatifs, à commencer par celui où $n$ eſt $> 1 + m$.

21. Pour qu'une ſerie ſoit la plus parfaite qu'il eſt poſſible, il faut, 1°. que tous ſes termes aillent en diminuant depuis le premier terme; 2°. que ces termes, s'il eſt poſſible, ſoient de même ſigne; puiſqu'une ſerie, dont il faut ajouter tous les termes, eſt évidemment plus convergente, toutes choſes d'ailleurs égales, qu'une ſerie dont il faut ajouter & ſouſtraire les termes alternativement. On peut toujours abſolument remplir la premiere condition, en partageant la quantité donnée $1 \pm \mu$ en deux, dont l'une ſoit auſſi petite qu'on voudra par rapport à l'autre; par exemple, ſoit propoſé d'extraire la racine quarrée de 2, on pourra mettre $\sqrt{2}$ ſous cette forme $\sqrt{(4-2)}$ ou $2\sqrt{(1-\frac{1}{2})}$, ou $\sqrt{\left(\frac{9-1}{4}\right)} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(1-\frac{1}{9})}$, ou &c. Mais il n'eſt pas de même toujours poſſible de rendre tous les termes de même ſigne; puiſque $\mu$ étant ſuppoſée donnée, on n'eſt pas toujours le maître de faire enſorte que $\mu$ & $m - \omega$ ſoient de même ſigne.

22. Si les termes de la ſerie ſont de même ſigne, à

commencer au terme $n$, tel que $n$ soit $> 1+m$, il eſt aiſé de voir que la ſomme de la ſerie, à commencer au $n^{e}$ terme que je nomme $A$, eſt $< A + A\mu + A\mu^2 + A\mu^3$, &c. & au contraire $> A + A\mu\left(\frac{\omega - m}{1+\omega}\right) + A\mu^2 \times \left(\frac{\omega - m}{1+\omega}\right)^2 + A\mu^3\left(\frac{\omega - m}{1+\omega}\right)^3$, &c.

23. Donc la ſomme des termes, à commencer de $A$, ſera $< \frac{A}{1-\mu}$, & $> \frac{A}{1-\mu\left(\frac{\omega-m}{1+\omega}\right)} = \frac{A}{1-\mu+\frac{\mu(m+1)}{1+\omega}}$; ce qui donne un moyen aſſez commode d'avoir la ſomme d'une ſuite par approximation; l'erreur ſera moindre que $\frac{A\mu(m+1)}{(1-\mu)(1+\omega-\omega\mu+\mu m)}$.

24. Par exemple, ſi on veut tirer la racine quarrée de 2, on mettra d'abord $\sqrt{2}$ ſous cette forme $\sqrt{\left(\frac{9-1}{4}\right)} = \frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{1}{9}\right)}$; donc (en mettant à part le coefficient $\frac{1}{2}$) ſi on fait $n = 10$, ou $\omega = 9$, on aura $A = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot11\cdot13\cdot15}{9^9\cdot2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot10\cdot12\cdot14\cdot16\cdot18}$; & après avoir ajouté enſemble les neuf premiers termes, le reſte de la ſerie ſera $< \frac{A}{1-\frac{1}{9}}$ & $> \frac{A}{1-\frac{1}{9}+\frac{1\cdot3}{9\cdot20}}$.

25. Si on faiſoit ſeulement $n = 5$, on auroit $A = \frac{1\cdot3\cdot5}{9^4\cdot2\cdot4\cdot8}$, & on aura la valeur de la ſerie par les formules précédentes, enſorte que l'erreur ſera moindre que $\frac{A\cdot3}{9\cdot10\times\frac{8}{9}\times\left(\frac{8}{9}+\frac{1}{10}\right)}$.

26. La méthode que je viens de donner, pour ſommer une ſuite par approximation, peut être utile en pluſieurs cas, & j'ai le premier employé une ſemblable méthode dans la théorie de l'action de Jupiter & de Saturne. Voyez mes *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Partie II, pag. 59 & ſuivantes.

27. Voici encore un autre moyen de rendre en pluſieurs cas une ſerie plus approchée qu'elle ne le ſeroit naturellement & ſans transformation. Soit $a - t$ élevé à la puiſſance $m$, $t$ étant beaucoup plus petit que $a$. Soit $ka$ la plus grande valeur de $t$, on mettra d'abord $a - t$ ſous cette forme $a - ka - (t - ka)$; or $t$ étant ſuppoſé d'abord $< ka$, $\frac{a - ka}{ka - t}$ ſera $> \frac{a}{t}$, dès que $at - kat$ ſera $> kaa - at$, c'eſt-à-dire $t > \frac{ka}{2 - k}$; ce qui n'empêchera pas qu'on n'ait $t < ka$, puiſque $ka$ étant ſuppoſé fort petit par rapport à $a$, $\frac{ka}{2 - k}$ eſt ſeulement tant ſoit peu plus grand que $\frac{ka}{2}$. De-là il réſulte, que pour avoir la valeur la plus approchée de $(a - t)^m$, il faut d'abord réduire à l'ordinaire en ſerie $(a - t)^m$, enſuite, lorſque $t$ eſt égal à $\frac{ka}{2 - k}$, réduire en ſerie la quantité équivalente $[a - ka - (t - ka)]^m$, ou $(a' + t')^m$, en faiſant $a - ka = a'$, & $t' = ka - t$. La combinaiſon de ces deux ſeries donnera la valeur la plus approchée, & en même-temps la plus ſimple qu'il ſera poſſible de la quantité qu'on cherche.

28. Si à la place de $a - t$, on écrivoit $a + ka - (t + ka)$, on auroit $\frac{a+ka}{t+ka} < \frac{a}{t}$ ; puiſque $at + kat < at + kaa$. De-là il s'enſuit que ſi on veut élever $a - t$ à la puiſſance $m$, il ſera bon, lorſque $t$ ſera $> \frac{ka}{2-k}$, de mettre $a - t$ ſous la forme $(a - ka) - (t - ka)$ préférablement à toute autre ; puiſque la ſerie en ſera plus convergente dès que $t$ ſera plus grand que $\frac{ka}{2-k}$.

29. Si on avoit $a + t$ à élever à la puiſſance $m$, on remarqueroit d'abord que $\frac{a-ka}{t+ka} < \frac{a}{t}$, & qu'ainſi il ne faut pas changer $a + t$ en $a - ka + t + ka$ ; mais ſi on change $a + t$ en $a + ka + t - ka$, on verra facilement que $\frac{a+ka}{ka-t} > \frac{a}{t}$, ſi $at + kat > kaa - at$, c'eſt-à-dire ſi $t > \frac{ka}{2+k}$ ; c'eſt pourquoi ſi l'on a à développer en ſerie $(a + t)^m$, & que $t$ ſoit $> \frac{ka}{2+k}$, on écrira au lieu de $(a + t)^m$, pour rendre la ſerie plus convergente, la quantité $[a + ka + (t - ka)]^m$, ou $(a' - t')^m$, $a'$ étant $= a + ka$, & $t' = ka - t$.

30. Les recherches précédentes ſur la convergence ou divergence des ſeries, peuvent ſervir de ſupplément à un Mémoire imprimé parmi ceux de l'Académie en 1715, & où M. Varignon n'a fait qu'effleurer cette matiere ; car non-ſeulement il n'y a pas parlé des expoſans fractionnaires ; il ne fait même mention, relativement à

la divergence, que des cas où $a$ eſt $< b$ dans le développement de la quantité $(a+b)^{-m}$, & ne remarque point que la ſerie peut, en pluſieurs cas, être divergente dans un grand nombre de ſes premiers termes, ſi $a$ eſt $< mb$, & ainſi du reſte.

31. Ces réflexions ſur la divergence des ſeries en pluſieurs cas, paroiſſent mériter attention de la part des Géometres dans les démonſtrations qu'ils donnent de certaines vérités. Je n'en citerai qu'un exemple. On ſait que l'expreſſion du ſinus $z$ d'un angle $x$, eſt $z = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \frac{x^7}{2.3.4.5.7}$, &c. Il eſt évident que cette expreſſion, à laquelle on peut parvenir par différentes routes, ne peut être cenſée exacte, qu'autant qu'elle eſt convergente, au moins dans ſes derniers termes; or le $n^e$ terme de cette ſuite étant $\frac{x^{2n+1}}{2.3.....2n+1}$; eſt au précédent comme $\frac{x^2}{2n(2n+1)}$ eſt à l'unité; d'où il eſt viſible que ſi on prend $x =$ à un arc très-grand $k\pi$, $\pi$ étant la demi-circonférence, & $k$ un nombre très-grand, entier ou rompu, la ſerie ſera divergente, juſqu'à ce qu'on arrive à un terme $\frac{x^{2n+1}}{2.3.....2n+1}$, où $k^2\pi^2$ ſoit plus petit que $2n(2n+1)$. De-là il s'enſuit, que comme on peut toujours arriver à un pareil terme, la ſerie dont il s'agit exprimera toujours le ſinus d'un arc quelconque $x$, pourvu qu'on la pouſſe à un très-grand nombre de termes ſi $x$ eſt fort grand; mais ſi on veut avoir une ſerie

très-convergente dès les premiers termes, il faudra, si $x$ eſt plus grand que la circonférence, ſubſtituer dans la formule au lieu de $x$, $x - 2n\pi$, $n$ exprimant un nombre entier poſitif, & $2n\pi$ un arc égal à la circonférence, priſe tant de fois qu'on voudra, de maniere que $2n\pi$ ſoit $< x$, & $(2n+1)\pi > x$; & ſi $x - 2n\pi$ eſt $>$ 90 degrés (car les arcs $x$ & $180 - x$ ont le même ſinus), il faudra mettre dans cette derniere formule $180 - x + 2n\pi$, au lieu de $x - 2n\pi$.

32. La démonſtration que M. Bernoulli a donnée dans ſes Œuvres, Tome IV, pages 20 & 21, de la ſomme de la ſerie $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$, &c. eſt fondée ſur l'expreſſion $x - \frac{x^3}{2.3}$, &c. du ſinus par l'arc; il étoit, ce me ſemble, néceſſaire pour n'avoir aucun ſcrupule ſur cette démonſtration, d'être aſſuré que cette expreſſion, pouſſée à l'infini, donne en effet la valeur de l'arc; précaution que M. Bernoulli, & perſonne que je ſache, n'avoit encore priſe. Elle étoit néanmoins d'autant plus eſſentielle, que l'expreſſion de l'arc par le ſinus, fondée ſur la ſerie connue qui eſt l'intégrale de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, ne peut être regardée comme exacte, c'eſt-à-dire comme repréſentant à-la-fois tous les arcs qui ont le même ſinus; puiſque cette ſerie ne repréſente évidemment qu'un ſeul des arcs qui répondent au ſinus dont il s'agit, ſavoir le plus petit de ces arcs, celui qui eſt inférieur ou tout au plus égal à 90 degrés. Cependant c'eſt d'un autre côté une ſorte de paradoxe remarquable, que l'expreſſion de l'arc

par le ſinus ne repréſentant qu'un ſeul arc de 90 degrés au plus, l'expreſſion du ſinus par l'arc, qu'on peut déduire (par la méthode du retour des ſuites), de l'expreſſion de l'arc par le ſinus, repréſente exactement, étant pouſſée à l'infini, le ſinus de tous les arcs poſſibles, plus petits ou plus grands que 90°, & même que la circonférence ou demi-circonférence priſe tant de fois qu'on voudra. Je laiſſe à d'autres Géometres le ſoin d'éclaircir ce myſtere, ainſi que pluſieurs autres qui peuvent ſe rencontrer dans la théorie des ſuites; théorie qui me paroît encore très-imparfaite, & quant à la partie analytique, & quant à la partie métaphyſique. Pour moi, j'avoue que tous les raiſonnemens & les calculs fondés ſur des ſeries qui ne ſont pas convergentes, ou qu'on peut ſuppoſer ne pas l'être, me paroîtront toujours très-ſuſpects, même quand les réſultats de ces raiſonnemens s'accorderoient avec des vérités connues d'ailleurs.

## §. II.

*Sur l'expreſſion de certaines quantités imaginaires, & à cette occaſion ſur les racines des équations du troiſiéme degré dans le cas irréductible.*

1. J'ai démontré ailleurs, que ſi on éleve $a + b\sqrt{-1}$ à la puiſſance $m$, on aura pour réſultat $(aa + bb)^{\frac{m}{2}} \times (g + h\sqrt{-1})$, $h$ étant le ſinus, & $g$ le coſinus d'un angle $= mA$, lequel angle $A$ a pour tangente $\frac{a}{b}$, & pour

rayon $\sqrt{(aa+bb)}$, c'eſt-à-dire pour ſinus $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$, & pour coſinus $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$. Comme le ſinus $b$ & le coſinus $a$ appartiennent, non-ſeulement à l'angle $A$, mais à l'angle $A \pm n.\ 360°$, $n$ étant un nombre entier tel qu'on voudra, il eſt aiſé de conclure de-là, que ſi on propoſe une quantité telle que $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{p}}$, cette quantité aura $p$ valeurs, correſpondantes aux différentes valeurs de ſin. $\frac{1}{p}(A \pm n.\ 360)$, & coſ. $\frac{1}{p}(A \pm n.\ 360)$, leſquelles, comme l'on ſait, ſont au nombre de $p$.

2. Comme on a $\frac{-b}{-a} = \frac{b}{a}$, (& qu'ainſi la tangente de l'angle, qui a $-b$ pour ſinus & $-a$ pour coſinus, eſt la même que celle de l'angle qui a $b$ pour ſinus & $a$ pour coſinus), on pourroit croire que l'angle $A$ eſt non-ſeulement celui qui a pour ſinus $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$, & pour coſinus $\frac{a}{\sqrt{(aa+bb)}}$, mais encore $\frac{-b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ & $\frac{-a}{\sqrt{(aa+bb)}}$; c'eſt-à-dire l'angle $A \pm n.\ 180°$, d'où il s'enſuivroit que le ſinus $b$ & le coſinus $a$ appartiendroient à l'angle $A \pm n.\ 180°$; ce qui donneroit $2p$ valeurs à $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{p}}$.

3. Mais il faut remarquer, que quoique la tangente $\frac{-b}{-a}$ de l'angle $A \pm n.\ 180$ ſoit égale à $\frac{b}{a}$, on ne doit pas

pas, lorſque l'expreſſion $(a+bV-1)^m$ eſt réduite à $A+BV-1$ par nos méthodes, prendre $b$ & $a$ avec des ſignes contraires à ceux qu'ils ont; en voici la preuve.

4. Soit $m=\frac{1}{3}$, $b=0$, $a=1$, on aura $(a+bV-1)^m = 1^{\frac{1}{3}}$; c'eſt-à-dire $\sqrt[3]{1}$, $\sqrt[3]{1}\left(\frac{-1+V3}{2}\right)$, & $\sqrt[3]{1}\times\left(\frac{-1-V3}{2}\right)$; comme on le ſait d'ailleurs par la réſolution de l'équation du 3e degré $x^3-1=0$, dont les trois racines ſont telles qu'on vient de les donner. Ce qui s'accorde avec la formule générale; car l'angle dont la tangente eſt $\frac{0}{a}$ eſt $=0$, ou $0+360$, ou $0+360\times 2$; les ſinus & coſinus, repréſentés par $B$ & $A$, ſont donc ici, ſin. $\frac{0}{3}=0$, coſ. $\frac{0}{a}=1$; ſin. $\frac{360}{3}=$ ſin. $120=+\frac{V3}{2}$; & coſ. $\frac{360}{3}=$ coſ. $120=-\frac{1}{2}$; ſin. $\frac{360.2}{3}=$ ſin. $240=$ ſin. $180+60=-\frac{V3}{2}$; & coſ. $\frac{360.2}{3}=$ coſ. $240=-\frac{1}{2}$. Après quoi cette ſuite recommence.

5. Mais ſi on prenoit en général l'angle dont la tangente eſt 0, alors cet angle ſeroit également l'angle dont la tangente eſt $\frac{0}{a}$; & $\frac{0}{-a}$; or l'angle dont la tangente eſt $\frac{0}{-a}=180°$, enſorte qu'on auroit outre les trois formules précédentes, ces trois-ci; ſin. $\left(\frac{180}{3}\right)=$ ſin. $60=\frac{V3}{2}$; coſ. $\left(\frac{180}{3}\right)=$ coſ. $60=\frac{1}{2}$; ſin.

$\left(\frac{180+360}{3}\right) =$ ſin. $180 = 0$, coſ. $\left(\frac{180+360}{3}\right) =$ coſ. $180 = -1$; ſin. $\left(\frac{180+360.2}{3}\right) =$ ſin. $300 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, & coſ. $300 = \frac{1}{2}$. Ce qui donne $-1$; $\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)$, qui ſont les racines cubiques de $-1$, & non de $1$.

6. Ainſi, dans la page 142 des *Réflexions ſur les Vents*, il ne faut pas prendre en général, pour la valeur de $\int \frac{a\,db - b\,da}{aa+bb}$, l'angle dont la tangente eſt $\frac{b}{a}$, mais l'angle dont le ſinus eſt $b$ & le coſinus $a$.

7. De même, dans l'expreſſion de $A + B\sqrt{-1}$ qui repréſente $(a+b\sqrt{-1})^m$, il ne faut pas prendre l'angle dont la tangente eſt $\frac{B}{A}$, mais l'angle dont le ſinus eſt $B$ & le coſinus $A$.

8. Il faut remarquer de plus, que dans la formule qui exprime la valeur de $(a+b\sqrt{-1})^m$, trouvée ci-deſſus, les quantités $\sqrt{(aa+bb)}$, & $(aa+bb)^{\frac{m}{2}}$ doivent toujours être ſuppoſées réelles & poſitives; précaution néceſſaire pour ne donner à la formule précédente que l'étendue qu'elle doit avoir. Car ſoit propoſée, par exemple, la quantité $(\text{coſ. } 3\alpha + \text{ſin. } 3\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ laquelle ſera, par la formule précédente, $= \sqrt[6]{1}\,(\text{coſ. } \alpha + \text{ſin. } \alpha \times \sqrt{-1}$; or comme $\sqrt{(aa+bb)}$ eſt ici $\sqrt{[(\text{coſ. } 3\alpha)^2 + (\text{ſin. } 3\alpha)^2]} = \sqrt{1} = \pm 1$, & que $\sqrt[6]{1}$ a d'un autre côté

ſix valeurs, tant réelles qu'imaginaires, il s'enſuivroit donc que $(\text{cof. } 3\alpha + \text{ſin. } 3\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ auroit beaucoup au-delà de trois valeurs, ce qui n'eſt pas.

9. Pour le faire ſentir, ſuppoſons $(\text{cof. } 3\alpha + \text{ſin. } 3\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{1}\,(\text{cof. } \alpha + \text{ſin. } \alpha\sqrt{-1})$; en élévant au cube, on aura $+1 = \sqrt{1}$, ce qui montre que $\sqrt{1}$ doit être pris poſitivement dans le ſecond membre de cette derniere équation, & par conſéquent auſſi $\sqrt[6]{1}$ dans le ſecond membre de la premiere. On voit auſſi que $\sqrt{(aa+bb)}$ ou $\sqrt{(\text{cof. } 3\alpha^2 + \text{ſin. } 3\alpha^2)}$, doit être pris poſitivement; car ſi on le prenoit négativement, alors $\frac{b}{\sqrt{(aa+bb)}}$ ſeroit $= \frac{\text{ſin. } 3\alpha}{-1} = -\text{ſin. } 3\alpha$, & de même $\frac{\text{cof. } 3\alpha}{-1} = -\text{cof. } 3\alpha$; donc au lieu de cof. $\alpha$, & ſin. $\alpha$ dans le ſecond membre, on auroit $-\text{cof. } \alpha$ & $-\text{ſin. } \alpha$. On auroit donc $(\text{cof. } 3\alpha + \text{ſin. } 3\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}} = \sqrt[6]{1} \times (-\text{cof. } \alpha - \text{ſin. } \alpha\sqrt{-1})$; ce qui n'eſt pas, à moins qu'on ne faſſe $\sqrt[6]{1} = \sqrt[3]{(-\sqrt{1})}$, c'eſt-à-dire négatif. Voy. plus bas l'art. 18.

10. Il eſt d'autant plus eſſentiel de ne prendre que trois valeurs de $\sqrt[6]{1}$, que ſans cela on trouveroit une infinité de valeurs à $(\text{cof. } 3\alpha + \text{ſin. } 3\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, quoiqu'il n'y en ait réellement que 3. Car $\sqrt[6]{1}$ a ſix valeurs différentes, comme l'on ſait, ce qui donneroit déja ſix valeurs, en ne donnant même qu'une ſeule valeur à $\text{cof. } \alpha + \text{ſin. } \alpha\sqrt{-1}$, quoiqu'il y en ait trois, ſavoir outre la précédente, $\text{cof. } \alpha + 120 + \text{ſin. } (\alpha + 120)\sqrt{-1}$, $\text{cof. } \alpha +$

$240 + \text{ſin.}\,(a + 240)\sqrt{-1}$; de plus, en mettant $\sqrt[6]{1}$ ſous cette forme $\sqrt[6]{(\text{cof.}\,n.\,360 + \text{ſin.}\,n.\,360\sqrt{-1})}$ ($n$ étant un nombre entier poſitif), on trouveroit $(aa + bb)^{\frac{1}{2m}} = \sqrt[12]{1}\,(\text{cof.}\,n.\,60 + \text{ſin.}\,n.\,60\sqrt{-1})$, ce qui augmenteroit encore les valeurs à l'infini.

11. Mais, dira-t-on, puiſque $\sqrt[6]{1}$ a au moins trois valeurs dans la formule $\sqrt[6]{1}\,(\text{cof.}\,a + \text{ſin.}\,a\sqrt{-1})$, & que $\text{cof.}\,a + \text{ſin.}\,a\sqrt{-1}$ en a trois, il y auroit donc au moins neuf valeurs poſſibles de $(\text{cof.}\,3a + \text{ſin.}\,3a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, quoique ſelon vous il n'y en ait que trois? A cela, je réponds que ces neuf valeurs reviennent à trois ſeulement, comme on le va voir.

12. En effet, les trois valeurs de $(\text{cof.}\,3a + \text{ſin.}\,3a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ ſont, 1°. $\text{cof.}\,a + \text{ſin.}\,a\sqrt{-1} = (\text{cof.}\,a + \text{ſin.}\,a\sqrt{-1}) \times \sqrt[3]{1}$; 2°. $\text{cof.}\,a + 120 + \text{ſin.}\,(a + 120)\sqrt{-1}$ $= (\text{à cauſe de cof.}\,120 = -\frac{1}{2}, \text{ \& ſin.}\,120 = \frac{\sqrt{3}}{2})$ $\frac{\text{cof.}\,a \times -1}{2} - \frac{\text{ſin.}\,a\sqrt{3}}{2} + \frac{\text{ſin.}\,a \times -\sqrt{-1}}{2} +$ $\frac{\text{cof.}\,a\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = (\text{cof.}\,a + \text{ſin.}\,a\sqrt{-1})\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{-1}\right) = (\text{cof.}\,a + \text{ſin.}\,a\sqrt{-1})\left(\frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)$ $= (\text{cof.}\,a + \text{ſin.}\,a\sqrt{-1}) \times \sqrt[3]{1}$; 3°. $\text{cof.}\,a + 240 + \text{ſin.}\,(a + 240)\sqrt{-1} = (\text{à cauſe de cof.}\,240 = -\frac{1}{2}, \text{ \& de ſin.}\,240 = -\frac{\sqrt{3}}{2})\,\text{cof.}\,a \times -\frac{1}{2} + \frac{\text{ſin.}\,a\sqrt{3}}{2} +$ $\frac{\text{ſin.}\,a \times -\sqrt{-1}}{2} = \frac{\text{cof.}\,a\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2} = (\text{cof.}\,a + \text{ſin.}\,a$

$\sqrt{-1}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}.\sqrt{-1}}{2}\right)=(\text{cof.}\,\alpha+\text{fin.}\,\alpha\sqrt{-1})$
$\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)=(\text{cof.}\,\alpha+\text{fin.}\,\alpha\sqrt{-1})\sqrt[3]{1}.$

13. On remarquera de plus que $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-2-2\sqrt{-3}}{4}=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; & que $\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)^2=\frac{-2+2\sqrt{-3}}{4}=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; qu'enfin $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=1$. Ainſi les trois valeurs de $\text{cof.}\,3\alpha+\text{fin.}\,3\alpha\sqrt{-1}$ ſeront $\sqrt[6]{1}\,(\text{cof.}\,\alpha+\text{fin.}\,\alpha\sqrt{-1})$; $\sqrt[6]{1}\,(\text{cof.}\,\alpha+120+\text{fin.}(\alpha+120)\sqrt{-1})$; $\sqrt[6]{1}\,(\text{cof.}\,\alpha+240+\text{fin.}\,(\alpha+240)\sqrt{-1})$, en prenant dans chacun des cas $\sqrt[6]{1}$ égal à 1, ou $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ou $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, c'eſt-à-dire aux trois racines cubiques de 1; chacun de ces trois cas donnera les trois mêmes valeurs trouvées ci-deſſus.

14. D'où l'on voit de nouveau, comme il a déja été obſervé plus haut, que la valeur de $\sqrt[6]{1}$ doit être priſe telle que $\sqrt[6]{1}$ élevé au cube ſoit toujours $=1$, c'eſt-à-dire, que des deux quantités $\sqrt[3]{(\sqrt{1})}$ ou $\sqrt[3]{1}$ & $\sqrt[3]{-1}$ que $\sqrt[6]{1}$ repréſente, il ne faut prendre que la premiere dans les différens cas que renferme la formule $(\text{cof.}\,3\alpha+\text{fin.}\,3\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=\sqrt[6]{1}\,(\text{cof.}\,\alpha+\text{fin.}\,\alpha\sqrt{-1})$.

15. En général, $(\text{cof.}\,m\alpha+\text{fin.}\,m\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}=\sqrt[2m]{1}\times(\text{cof.}\,(\alpha+\frac{n.360}{m})+\text{fin.}\,(\alpha+\frac{n.360}{m})\sqrt{-1})$

$= [$ en mettant pour $\sqrt[2m]{1}$ ſa valeur $\sqrt[m]{\sqrt{1}} = \sqrt[m]{(\text{cof. } n'. 360 + \text{ſin. } n'. 360 . \sqrt{-1})} = \text{cof.}\left(\frac{n'. 360}{m}\right) + \text{ſin.}\left(\frac{n'. 360}{m}\right)\sqrt{-1}$ ), & en remarquant que $(\text{cof. } \omega + \text{ſin. } \omega \sqrt{-1})(\text{cof. } \theta + \text{ſin. } \theta \sqrt{-1}) = \text{cof. } (\omega + \theta) + \text{ſin. } (\omega + \theta)\sqrt{-1}]$ $\text{cof.}\left(\alpha + \frac{(n+n')\,360}{m}\right) + \text{ſin.}\left(\alpha + \frac{(n+n')\,360}{m}\right)\sqrt{-1}$ ; ce qui ne peut donner jamais que $m$ valeurs poſſibles.

16. Pour prouver d'une maniere directe que $\sqrt{(aa+bb)^m}$ doit être tel que $\sqrt{(aa+bb)}$ ſoit pris poſitivement, on obſervera qu'en faiſant $(a+b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1}$, on aura $\sqrt{(AA+BB)} = \sqrt{(aa+bb)^m}$; or cela ne peut être à moins que les deux radicaux ne ſoient de même ſigne ; donc puiſque le rayon $\sqrt{(AA+BB)}$ eſt toujours pris poſitivement, il s'enſuit que $\sqrt{(aa+bb)^m}$ doit auſſi être pris poſitivement.

17. Cependant on pourra prendre $\sqrt{(aa+bb)^m}$ négativement, pourvu que l'on prenne auſſi négativement les quantités $A$ & $B$. Car comme $\sqrt{(AA+BB)} = \sqrt{(aa+bb)^m}$, & qu'en prenant $A$ & $B$ négativement, $\sqrt{(AA+BB)}$ eſt auſſi négatif, il eſt viſible que la quantité $(aa+bb)^{\frac{m}{2}}$, qui eſt $= \sqrt{(AA+BB)}$, doit auſſi alors être négative.

18. C'eſt pourquoi ſi on a, par exemple, à trouver la valeur de $(\text{cof. } 3\alpha + \text{ſin. } 3\alpha\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$, & qu'on pren-

ne $\sqrt[6]{1}$ négativement, il faudra faire alors la quantité proposée $= \sqrt[6]{1} \times (-\text{cos. } a - \text{sin. } a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$; d'où résulte cette autre conséquence, que dans la valeur de $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{p}}$, on peut faire l'angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$, égal à $A \pm n.\ 180$, $n$ étant un nombre quelconque positif, pourvu que dans les cas où $n$ est impair, on prenne $\sqrt{(aa+bb)^{\frac{1}{p}}}$ négativement ; parce qu'alors les valeurs de $A$ & de $B$ seront négatives; par ce moyen, on n'aura jamais que $p$ valeurs de $(a+b\sqrt{-1})^{\frac{1}{p}}$, comme cela doit être.

19. Les remarques précédentes nous donneront lieu d'en faire une sur la formule de Cardan pour la résolution du troisiéme degré. Cette formule qu'on peut réduire à la forme $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}$, représente en effet (quoique plusieurs Géometres ayent avancé le contraire) les trois racines de l'équation; car en regardant $A$ & $B$ (ce qui est toujours possible) comme le cosinus & le sinus d'un angle $= A$, ou $A + 360°$, ou $A + 2 \cdot 360°$, on aura $\sqrt[3]{(A \pm B\sqrt{-1})} = \text{cos. } \frac{A}{3} \pm \text{sin. } \frac{A}{3}\sqrt{-1}$, ou $\text{cos. } \left(\frac{A+360}{3}\right) \pm \text{sin. } \left(\frac{A+360}{3}\right).\sqrt{-1}$, ou $\text{cos. } \left(\frac{A+2\cdot 360}{3}\right) \pm \text{sin. } \left(\frac{A+2\cdot 360}{3}\right).\sqrt{-1}$, ce qui donnera les trois valeurs qu'on cherche, sans qu'il y en ait réellement d'autres de possibles.

20. Si on suppoſoit $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} = a+C\sqrt{-1}$, ce qui donne $\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})} = a-C\sqrt{-1}$, on auroit $A = a^3 - 3aC^2$, & $B = 3a^2C - C^3$, donc $A + 3aC^2 = \frac{B+C^3}{3C} \times a$; donc $a = A:(\frac{B+C^3}{3C} - 3C^2) = \frac{3AC}{B-8C^3}$; ſubſtituant cette valeur dans $B = 3a^2C - C^3$, on voit que l'équation montera au neuviéme degré; & par conſéquent $a$ paroîtra avoir neuf valeurs poſſibles, quoique réellement il n'en ait que trois qui ſatisfaſſent à l'équation $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} = a+C\sqrt{-1}$. Ces neuf valeurs apparentes de $a$ ſont d'autant plus capables d'induire en erreur, que la valeur de $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} + \sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}$ qui repréſente les trois racines de l'équation, étant $= a+C\sqrt{-1}+a-C\sqrt{-1} = 2a$, il s'enſuivroit de-là que l'équation a neuf racines, quoiqu'elle n'en ait réellement que trois. On ne réſoudroit pas cette difficulté, en diſant qu'à cauſe de l'équation ſuppoſée $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} = a+C\sqrt{-1}$, il ne faut prendre parmi les valeurs de $a$ que celles qui ſont réelles; car quoiqu'en élevant au cube l'équation $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})} = a+C\sqrt{-1}$, nous ayons fait ſéparément égales les quantités qui renferment $\sqrt{-1}$, & celles qui ne le renferment pas, cependant les équations $A = a^3 - 3aC^2$, & $B = 3a^2C - C^3$, qui réſultent de cette hypothéſe, ne ſuppoſent point néceſſairement que $a$ & $C$ ſoient réelles, puiſque $a$ & $C$ étant indéterminées, on peut prendre $a$ & $C$ de telle nature qu'on voudra; il ſuffira que $a$ & $C$ ſoient telles que l'équation $A+B\sqrt{-1} = a^3 + 3a^2C\sqrt{-1}$

$-3\alpha\mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}^3\sqrt{-1}$ ait toujours lieu. En effet, on peut toujours ſuppoſer $\sqrt[3]{(A+B\sqrt{-1})}=\alpha+\mathfrak{C}\sqrt{-1}$, & $\sqrt[3]{(A-B\sqrt{-1})}=\alpha-\mathfrak{C}\sqrt{-1}$, ſans qu'il ſoit néceſſaire que $\alpha$ & $\mathfrak{C}\sqrt{-1}$ ſoient réels; comme on peut ſuppoſer deux quantités quelconques inconnues $M$, $N$ égales, l'une à $x+y$, l'autre à $x-y$, ſans ſavoir ſi les inconnues $x$ & $y$, quoique déſignées ſous une forme réelle, ſont en effet ou réelles ou imaginaires, ce qu'on ne pourra connoître qu'après la ſolution des deux équations qui renferment les inconnues $x$ & $y$. Or dans cette hypothéſe générale & illimitée de $(A\pm B\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}=\alpha\pm\mathfrak{C}\sqrt{-1}$, on aura $A+B\sqrt{-1}=\alpha^3+3\alpha^2\mathfrak{C}\sqrt{-1}-3\alpha\mathfrak{C}^2-\mathfrak{C}^3\sqrt{-1}$, & $A-B\sqrt{-1}=\alpha^3-3\alpha^2\mathfrak{C}\sqrt{-1}-3\alpha\mathfrak{C}^2+\mathfrak{C}^3\sqrt{-1}$; équations dont la ſeconde étant ſucceſſivement ajoutée & retranchée de la premiere, donne $A=\alpha^3-3\alpha\mathfrak{C}^2$, & $B=3\alpha^2\mathfrak{C}-\mathfrak{C}^3$; ces deux dernieres équations reviennent au même que les deux précédentes, ſans que nous ayons été obligés, pour y parvenir, de faire ſéparément égales les quantités qui contiennent $\sqrt{-1}$, & celles qui ne le contiennent pas.

21. Il faut donc employer d'autres moyens pour démêler, dans les neuf valeurs de $\alpha$, celles qui doivent entrer dans la valeur de la racine, & celles qui doivent être rejettées. C'eſt à quoi on parviendra aiſément par les conſidérations ſuivantes.

22. Si on appelle $x$ le ſinus du tiers de l'angle $\alpha$, on aura, comme l'on ſait, ſin. $x^3-\frac{3}{4}$ ſin. $x+\frac{\text{ſin. }\alpha}{4}$

$= 0$, ou, en rendant le tout homogene, & prenant $f$ pour ſinus total, ſin. $x^3 - \frac{3ff \text{ ſin. } x}{4} + \frac{ff \text{ ſin. } a}{4} = 0$. Donc ſi on a $z^3 - pz + q = 0$, on aura $ff = \frac{4p}{3}$ ou $f = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}$, & $\frac{ff \text{ ſin. } a}{4}$ ou $\frac{4p \text{ ſin. } a}{4 \cdot 3} = q$; donc ſin. $a = \frac{3q}{p}$, & $\frac{\text{ſin. } a}{f} = \frac{3q\sqrt{3}}{p\sqrt{4p}}$; d'où il s'enſuit, que comme $\frac{\text{ſin. } a}{f}$ ne ſauroit jamais être $> 1$, il faut que $3q\sqrt{3}$ ſoit $=$ ou $< p\sqrt{(4p)}$, ou $-\frac{p^3}{27} =$ ou $> \frac{1}{4}qq$; ce qu'on ſait d'ailleurs.

23. Ayant donc cherché en nombres la valeur de $\frac{3q\sqrt{3}}{p\sqrt{(4p)}}$, qui ſera égale à l'unité ou à une fraction, cette valeur exprimera le ſinus d'un angle $a$. Soit $k$ le ſinus du tiers $d$ de cet angle, & on aura d'abord ſin. $x = fk = \frac{2k\sqrt{p}}{\sqrt{3}}$; enſuite les autres racines ſeront $f$(ſin. $x + 120$), & $f$(ſin. $x + 240$), c'eſt-à-dire $f$(ſin. $x \times \frac{-1}{2} + \frac{\text{cof. } x \cdot \sqrt{3}}{2}$), & $f$(ſin. $x \times \frac{-1}{2} - \frac{\text{cof. } x \cdot \sqrt{3}}{2}$), ou $\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(\frac{-k}{2} + \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(1-kk)}}{2}\right)$, & $\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(\frac{-k}{2} - \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{(1-kk)}}{2}\right)$. Donc ſuppoſant $k$ & $\sqrt{(1-kk)}$ $=$ au ſinus & au coſinus de $d$, les trois valeurs de $x$ ſeront $\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}$ ſin. $d$, $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}(-\text{ ſin. } d + \text{cof. } d\sqrt{3})$, $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}(-\text{ ſin. } d - \text{cof. } d\sqrt{3})$; la ſomme des racines (en changeant

les signes) est $= 0$; la somme des produits deux à deux est $\frac{4p}{3}\left(-\frac{kk}{2}-\frac{kk}{2}+\frac{4kk-3}{4}\right)=-p$, comme elle le doit être; & le produit des trois racines est $\frac{8p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}\times -k\times\left(\frac{4kk-3}{4}\right)$; or à cause de $k=\frac{\text{sin. }x}{f}$, on a $-k\times\left(\frac{4kk-3}{4}\right)=-\frac{\text{sin. }x^3}{f^3}+\frac{3}{4}\times\frac{\text{sin. }x}{f}=\frac{\text{sin. }a}{4f}=\frac{3q\times\sqrt{3}}{4p.2\sqrt{p}}$; donc le produit des trois racines $= q$.

24. Soit maintenant $x^3-px+q=0$; la quantité $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}qq\right)}\sqrt{-1}\right)}$, qui est le premier terme de la valeur de $x$, peut être mise sous cette forme $\sqrt[3]{\left(-\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}\times\sqrt{\frac{p^3}{27}}+\sqrt{\frac{p^3}{27}}\times\sqrt{-1}\sqrt{\left(1-\frac{27q^2}{4p^3}\right)}\right)}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left[\sqrt[3]{\left(-\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}+\sqrt{-1}.\sqrt{\left(1-\frac{27q^2}{4p^3}\right)}\right)}\right]=$ (en supposant $f=1$) $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\times\left(-\text{sin. }a+\text{cos. }a\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\times\left(-\text{cos. }(90-a)+\text{sin. }(90-a)\sqrt{-1}\right)^{\frac{1}{3}}$; donc les valeurs de la quantité radicale, qui est le premier terme de l'expression de $x$, sont,

$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(-\text{cos. }\left(30-\frac{a}{3}\right)+\text{sin. }\left(30-\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}\right)$,

$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(-\text{cos. }\left(150-\frac{a}{3}\right)+\text{sin. }\left(150-\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}\right)$,

$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(-\text{cos. }\left(270-\frac{a}{3}\right)+\text{sin. }\left(270-\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}\right)$,

ce qui donne,

$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cos.}\left(\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{2}\text{sin.}\left(\frac{a}{3}\right)+\frac{1}{2}\text{cosinus}\left(\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}-\text{sin.}\left(\frac{a}{3}\right)\times\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right);\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cos.}\left(\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{2}\text{sin.}\left(\frac{a}{3}\right)+\frac{1}{2}\text{cos.}\left(\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}+\text{sin.}\left(\frac{a}{3}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{-1}\right);\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(\text{sin.}\left(\frac{a}{3}\right)+\text{cos.}\left(\frac{a}{3}\right)\times\sqrt{-1}\right).$

25. On aura de même la valeur de l'autre partie, $\sqrt[3]{\left(-\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}qq\right)}\right)}$ de la valeur de $x$, en changeant dans les quantités précédentes les signes des termes où eſt $\sqrt{-1}$; & ajoutant enſuite les valeurs des deux radicaux, on aura pour les trois valeurs de $x$, $\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cos.}\left(\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{2}\text{sin.}\left(\frac{a}{3}\right)\right)$, $\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\text{cos.}\left(\frac{a}{3}\right)-\frac{1}{2}\text{sin.}\left(\frac{a}{3}\right)\right)$, & $-\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\text{sin.}\left(\frac{a}{3}\right)$, ce qui s'accorde avec les trois valeurs de $x$ trouvées ci-deſſus, art. 23.

26. Reprenons maintenant les équations $A=a^3-3aC^2$, $B=3a^2C-C^3$, de l'art. 20; on aura $\frac{AC-a^3C}{3a}=-C^3=B-3a^2C$; $C=B:\left[\frac{A-a^3}{3a}+3a^2\right]=\frac{3aB}{A+8a^3}$; $A=a^3-3a\times\frac{9a^2B^2}{A^2+16Aa^3+64a^6}$, ou bien

$$64a^9+16Aa^6+A^2a^3-A^3-64Aa^6-27a^3B^2=0,\text{ ou enfin}-16A^2a^3$$

$(a^3 - \frac{A}{4})^3 - \frac{3AAa^3}{16} + \frac{a^3}{16}(-15A^2 - 27 \times BB) = 0.$

27. Soit $a^3 - \frac{A}{4} = \gamma$, on aura $\gamma^3 - \frac{3AA}{16} \times (\gamma + \frac{A}{4}) + (\gamma + \frac{A}{4})(-\frac{15A^2 + 27B^2}{64}) = 0$, ou $\gamma^3 + \gamma(-\frac{27A^2 + 27B^2}{64}) - \frac{27A^3 + 27B^2A}{4.64} = 0$; ce qui donne, à cause de $A = -\frac{1}{2}q$, $\gamma^3 - \frac{\gamma p^3}{64} + \frac{1}{2}q \times \frac{p^3}{4.64} = 0$.

28. En comparant cette équation à l'équation $\gamma^3 - p'\gamma + q' = 0$, ou à l'équation $(\text{sin. } x)^3 - \frac{3}{4}\text{sin. } x + \frac{\text{sin. } a'}{4} = 0$, on aura le sin. de l'angle $a' = \frac{3q'\sqrt{3}}{2p'\sqrt{p'}} = \frac{3q\sqrt{3} \cdot p^3}{2.4.64(\frac{2p^3 \cdot p\sqrt{p}}{8.64})} = \frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}} = \text{sin. } a$; donc les valeurs de $\gamma$ sont, par l'art. 23 précédent, $\frac{2p\sqrt{p}}{8\sqrt{3}} \times \text{sin. } (\frac{a}{3})$, $\frac{2p\sqrt{p}}{8\sqrt{3}} \times \text{sin. } (\frac{a}{3} + 120)$, $\frac{2p\sqrt{p}}{8\sqrt{3}} \times \text{sin. } (\frac{a}{3} + 240)$; or $a^3 = \gamma + \frac{1}{4}A = \gamma - \frac{1}{8}q = \gamma - \frac{1}{4} \times \frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}} \times \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} = \gamma - \frac{1}{4}\text{sin. } a' \cdot \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}$; donc $a^3 = \frac{p\sqrt{p}}{4\sqrt{3}} \times (\text{sin. } (\frac{a'}{3}) - \frac{\text{sin. } a'}{3}) = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}(+\frac{3}{4}\text{sin. } \frac{a'}{3} - \frac{\text{sin. } a'}{4}) = \frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}} \times (\text{sin. } \frac{a'}{3})^3$, à cause de $(\text{sin. } \frac{a'}{3})^3$

$-\frac{3}{4}\text{ sin.}\frac{a'}{3}+\frac{\text{sin. }a'}{4}=0$. Donc $a=\sqrt[3]{\left(\frac{p\sqrt{p}}{3\sqrt{3}}\right)}\times$ sin. $\left(\frac{a'}{3}\right)=\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}$ sin. $\left(\frac{a'}{3}\right)$; & 2 $a$, valeur de la racine $=\frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}$ sin. $\left(\frac{a'}{3}\right)$. Donc les valeurs de $a$ sont $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}$ sin. $\frac{a}{3}$, ou sin. $\left(\frac{a}{3}+120\right)$, ou sin. $\left(\frac{a}{3}+240\right)$; multipliées chacune par 1 ou par $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ou par $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$; desquelles valeurs il y en a trois réelles & six imaginaires.

29. Ainsi, en faisant $d=\frac{a}{3}$, les neuf valeurs de $a$ sont,

1. $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}$ sin. $d$
2. $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\times\left(-\frac{1}{2}\text{ sin. }d+\frac{\sqrt{3}\text{ . cos. }d}{2}\right)$
3. $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2}\text{ sin. }d-\frac{\sqrt{3}\text{ . cos. }d}{2}\right)$
4. $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\text{sin. }d}{2}-\frac{\sqrt{-3}\text{ . sin. }d}{2}\right)$
5. $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(-\frac{\text{sin. }d}{4}+\frac{\sqrt{-3}\text{ . sin. }d}{4}\right)$
6. $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(+\frac{\text{sin. }d}{4}-\frac{\sqrt{3}\text{ . cos. }d}{4}+\frac{\text{sin. }d\sqrt{-3}}{4}-\frac{3\text{ cos. }d\sqrt{-1}}{4}\right)$
7. $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\times\left(+\frac{\text{sin. }d}{4}-\frac{\sqrt{3}\text{ . cos. }d}{4}-\frac{\text{sin. }d\sqrt{-3}}{4}+\right.$

$\frac{3 \text{ cof. } d\sqrt{-1}}{4}$)

8. $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(+\frac{\text{fin. } d}{4}+\frac{\sqrt{3}.\text{cof. } d}{4}+\frac{\text{fin. } d.\sqrt{-3}}{4}+\right.$
$\left.\frac{3 \text{ cof. } d\sqrt{-1}}{4}\right)$

9. $\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{3}}\left(+\frac{\text{fin. } d}{4}+\frac{\sqrt{3}.\text{cof. } d}{4}-\frac{\text{fin. } d.\sqrt{-3}}{4}-\right.$
$\left.\frac{3 \text{ cof. } d.\sqrt{-1}}{4}\right)$.

30. De même, en ſubſtituant dans l'équation $B = 3\alpha^2 \mathcal{C} - \mathcal{C}^3$, la valeur de $\alpha = \frac{3A\mathcal{C}}{B - 8\mathcal{C}^3}$, on aura, après les réductions, $\mathcal{C}^9 + \frac{3}{4}B\mathcal{C}^6 - \frac{15B^2 + 27AA}{64}\mathcal{C}^3 + \frac{B^3}{64}$; & faiſant $\mathcal{C}^3 + \frac{1}{4}B = \gamma$, pour faire évanouir le ſecond terme, on aura $\gamma^3 + \gamma\left(-\frac{3B^2}{16} - \frac{15B^2}{64} - \frac{27AA}{64}\right)$ $+ B^3\left(\frac{3}{64} + \frac{15}{64.4}\right) + \frac{27AAB}{64.4} = 0$, ou $\gamma^3 +$ $\gamma\left(-\frac{27BB + 27AA}{64}\right) + \frac{27B^3}{4.64} + \frac{27BAA}{4.64} = 0$; équation dont les trois racines ſont réelles, car $\frac{1}{27}p^3$ eſt $> \frac{1}{4}qq$, comme il eſt aiſé de le voir, & d'ailleurs le troiſiéme terme a le ſigne —; cette équation aura deux racines poſitives & une négative, ſi $B$ eſt poſitif comme on le ſuppoſe ici.

31. Dans l'équation $\gamma^3 + \gamma\left(-\frac{27B^2 + 27A^2}{64}\right) +$ $\frac{27}{4.64}(B^3 + BAA) = 0$, on a $A^2 = \frac{1}{4}qq$; $B^2 = \frac{1}{27}p^3$

$-\frac{1}{4}qq$; donc la réduite eſt $\gamma^3 - \frac{p^3\gamma}{64} + \frac{1}{4.64}p^3 \times V(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq)$; donc, en employant la même méthode que ci-deſſus, on aura le ſinus de l'angle $a' = \frac{3q'V3}{2p'Vp'} = \frac{3V3.p^3V(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}qq)}{4.64(\frac{2p^3.pVp}{8.64})} = \frac{3V3.V(\frac{1}{27}p^3-\frac{1}{4}qq)}{pVp}$

$= V(1 - \frac{27q^2}{4p^3}) =$ (à cauſe de ſin. $a = \frac{3qV3}{2pVp}$) cof. $a =$ ſin. $(90 - a)$. Par conſéquent les racines de l'équation en $\gamma$ ſont ſin. $(30 - \frac{a}{3})$, ſin. $(150 - \frac{a}{3})$, ſin. $(270 - \frac{a}{3})$, ou $\frac{1}{2}$ cof. $\frac{a}{3} - \frac{V3}{2}$ ſin. $\frac{a}{3}$, $+\frac{1}{2}$ cof. $\frac{a}{3} + \frac{V3}{2}$ ſin. $\frac{a}{3}$, & $-$ cof. $\frac{a}{3}$, chacune de ces quantités étant multipliée par $\frac{2Vp'}{V3} = \frac{2pVp}{8.V3} = \frac{pVp}{4V3}$.

32. Or à cauſe de $\zeta^3 = \gamma - \frac{1}{4}B$, on aura $\zeta^3 = \gamma - \frac{1}{4}V(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq) = \gamma - \frac{1}{4}.\frac{pVp}{3V3}V(1 - \frac{27qq}{4p^3}) = \gamma - \frac{pVp}{4.3V3}$ cof. $a = \gamma - \frac{pVp}{4.3V3}$ ſin. $(90 - a)$. Donc à cauſe de $\zeta^3 = \frac{pVp}{4V3} \times$ ſin. $(\frac{90-a}{3}) - \frac{pVp}{4.3V3}$ ſin. $(90 - a) = \frac{pVp}{3V3} \times (\frac{3}{4}$ ſin. $(\frac{90-a}{3}) - \frac{1}{4}$ ſin. $(90 - a)) = \frac{pVp}{3V3}[$ ſin. $(\frac{90-a}{3})]^3 = \frac{pVp}{3V3}[$ coſinus $(\frac{a}{3})]^3$, les valeurs de $\zeta$ ſeront $\frac{Vp}{V3}$, multiplié par cof.

cos. $\frac{a}{3}$, ou par cos. $(\frac{a}{3} + 120)$, ou par cos. $(\frac{a}{3} + 240)$, chacune de ces quantités étant encore multipliée par 1, ou par $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ou par $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$,

33. Ainsi les neuf valeurs de c seront,

1. $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt{3}}$ cos. $d$

2. $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}$ cos. $d - \frac{\sqrt{3}.\text{sin. } d}{2})$

3. $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt{3}}(-\frac{1}{2}$ cos. $d + \frac{\sqrt{3}.\text{sin. } d}{2})$

4. $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt{3}}(-\frac{\text{cos. } d}{2} - \frac{\text{cos. } d.\sqrt{-3}}{2})$

5. $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt{3}}(-\frac{\text{cos. } d}{2} + \frac{\text{cos. } d.\sqrt{-3}}{2})$

6. $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{4}$ cos. $d + \frac{\text{sin. } d.\sqrt{3}}{4} + \frac{\text{cos. } d.\sqrt{-3}}{4} + \frac{3\text{ sin. } d.\sqrt{-1}}{4})$

7. $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt{3}}(\frac{1}{4}$ cos. $d + \frac{\text{sin. } d.\sqrt{3}}{4} - \frac{\text{cos. } d.\sqrt{-3}}{4} - \frac{3\text{ sin. } d.\sqrt{-1}}{4})$

8. $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt{3}}(\frac{\text{cos. } d}{4} - \frac{\text{sin. } d.\sqrt{3}}{4} + \frac{\text{cos. } d.\sqrt{-3}}{4} - \frac{3\text{ sin. } d.\sqrt{-1}}{4})$

9. $\frac{\sqrt[3]{p}}{\sqrt{3}}(\frac{\text{cos. } d}{4} - \frac{\text{sin. } d.\sqrt{3}}{4} - \frac{\text{cos. } d.\sqrt{-3}}{4} + \frac{3\text{ sin. } d.\sqrt{-1}}{4})$.

34. Donc en général $a+c\sqrt{-1} = (\text{sin. } a' + \text{cos. } a''\sqrt{-1})\sqrt[3]{1}$, ou plutôt $\text{sin. } a' . \sqrt[3]{1} + \text{cos. } a'' . \sqrt[3]{1}$, $a'$ & $a''$ étant $= \frac{a}{3}$, ou $\frac{a}{3} + 120$, ou $\frac{a}{3} + 240$, & $a'$ pouvant n'être pas le même que $a''$ ; ce qui, à cause des trois valeurs de $\sqrt[3]{1}$, donne en apparence 81 valeurs de $a+c\sqrt{-1}$. Mais, 1°. de ces 81 valeurs, il y en a plusieurs qui feront les mêmes, comme on a vu ci-dessus (art. 12 & suiv.) que toutes les valeurs de $\sqrt[3]{1}$ ($\text{cos. } a + \text{sin. } a\sqrt{-1}$) se réduisoient à trois ; 2°. On doit remarquer d'ailleurs, que dans les équations $\gamma^3 - \frac{\gamma p^3}{64} + \frac{p^3 q}{2.4.64} = 0$, & $\gamma'^3 - \frac{p^3\gamma'}{64} + \frac{p^3}{4.64}\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq)} = 0$, les quantités $\frac{q}{2}$, & $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq)}$, doivent représenter les cosinus & sinus d'un même arc, & non de deux arcs différens, quoique les sinus & cosinus de ces arcs différens soient les mêmes ; de sorte que si $\frac{q}{2}$ représente le sinus ou le cosinus de $a'$, $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq)}$ ne sauroit représenter celui d'un angle différent de $a'$, du moins lorsqu'on voudra avoir la valeur de $\gamma + \gamma'$. La raison de cela, est que $(\text{cos. } 3a + \text{sin. } 3a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}$ n'est pas égal à $\text{cos. } a + \text{sin. } (a+120)\sqrt{-1}$ ; car il faudroit pour cela que $(\text{cos. } a + \text{sin. } a + 120\sqrt{-1},)^3$ fut $= (\text{cos. } a + \text{sin. } a\sqrt{-1})^3$, ce qui donneroit, en comparant les quantités réelles, l'équation illusoire $-3\,\text{cos. } a\,\text{sin. } a^2 = -3\,\text{cos. } a(\text{sin. } a + 120)^2$ ; donc, &c. On peut

encore rappeller ici ce qui a été observé dans l'*Encyclopédie* au mot *Cas irréductible*, que le produit de $a + c\sqrt{-1}$, par $a - c\sqrt{-1}$. doit être $= \frac{p}{3}$, & qu'ainsi il faut rejetter les combinaisons qui ne donnent point cette égalité. Par ces moyens réunis, on s'assurera aisément que les valeurs de $a$ & de $c\sqrt{-1}$, combinées comme elles le doivent être, ne donneront jamais réellement que trois valeurs de l'inconnue $z$.

35. A l'occasion de ces remarques sur les racines des équations du troisiéme degré, je renverrai le Lecteur à l'art. *Cas irréductible* qui vient d'être cité, & dont les remarques précédentes sont comme le Supplément. J'ai expliqué dans cet article, si je ne me trompe, (*Encycl.* Tome II, page 737, col. premiere) la vraie raison de la forme imaginaire sous laquelle la racine se présente; & je remarquerai à ce sujet que d'habiles Géometres se sont trompés lorsqu'ils ont prétendu que l'imperfection de la méthode pour la résolution du troisiéme degré, consistoit en ce que la formule qui exprime la racine ne représentoit pas les trois racines à-la-fois. Ces Géometres disent que si on a l'équation du second degré $xx + px + q = 0$; la racine $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{pp}{4} - q\right)}$ donne les deux racines $a$, $b$, en mettant pour $p$ la somme $-a-b$ des deux racines, & pour $q$, leur produit $ab$; que de même dans la formule du troisiéme degré, en supposant $x^3 - px + q = 0$, & mettant dans l'expression de la racine, au lieu $-p$ le produit des racines deux

à deux, & au lieu de $q$ le produit des trois racines, on devroit avoir chacune de ces trois racines ; ce qui n'arrive pas, ſuivant ces Géometres ; en quoi ils ſont dans l'erreur, comme je vais le prouver.

36. Soient $x-a$, $x-b$, $x-c$, les trois racines réelles d'une équation du troiſiéme degré dont le ſecond terme eſt évanoui, enſorte qu'on ait $x^3 - px + q = 0$, $c = -a-b$; $-p = ab+ac+bc$, $q = -abc$; ſoit $a = \alpha + \zeta$, $b = \alpha - \zeta$, $c = -2\alpha$, on aura $p = \zeta^2 + 3\alpha^2$, $\frac{q}{2} = \alpha^3 - \alpha\zeta^2$ ; donc $\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq = \frac{\zeta^6 - 18\zeta^4\alpha^2 + 81\zeta^2\alpha^4}{27}$, & par conſéquent $\sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq)} = \frac{\zeta^3 - 9\alpha\zeta^2}{3\sqrt{3}}$ ; donc la racine $x$, qui eſt $\sqrt[3]{(-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq)}\cdot\sqrt{-1}) + \sqrt[3]{(-\frac{q}{2} - \sqrt{(\frac{1}{27}p^3 - \frac{1}{4}qq)}\cdot\sqrt{-1})}}$, ſera en général $\sqrt[3]{(-\alpha^3 + \alpha\zeta^2 + \sqrt{-1}(\frac{\zeta^3 - 9\alpha^2\zeta}{3\sqrt{3}}))} + \sqrt[3]{(-\alpha^3 + \alpha\zeta^2 - \sqrt{-1}(\frac{\zeta^3 - 9\alpha^2\zeta}{3\sqrt{3}}))}$.

37. Or pour faire voir que cette racine repréſente les trois racines de l'équation, ſoit le premier radical $= m + n\sqrt{-1}$, le ſecond ſera $m - n\sqrt{-1}$ ; les trois valeurs du premier radical (art. 12) ſeront, 1°. $m + n\sqrt{-1}$, 2°. (en ſuppoſant $m = \text{cof. } d$, & $n = \text{ſin. } d$) la ſeconde valeur ſera $\text{cof. } (d + 120^\circ) + \text{ſin. } (d + 120^\circ)\times\sqrt{-1} = m\,\text{cof. } 120^\circ - n\,\text{ſin. } 120^\circ + (n\,\text{cof. } 120^\circ + m\times$

$\sin. 120°) \sqrt{-1} = -\frac{m}{2} - \frac{n\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{m\sqrt{3}}{2} - \frac{n}{2}\right)\sqrt{-1}$ ; 3°. par la même raiſon, la troiſiéme valeur ſera $\cos.(d+240°) + \sin.(d+240°)\sqrt{-1} = m \cos. 240° - n \sin. 240° + (n \cos. 240° + m \sin. 240°)\sqrt{-1} = -\frac{m}{2} + \frac{n\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{m\sqrt{3}}{2} - \frac{n}{2}\right)\sqrt{-1}$. Donc le premier radical étant égal à $m + n\sqrt{-1}$, ou $-\frac{m}{2} - \frac{n\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{m\sqrt{3}}{2} - \frac{n}{2}\right)\sqrt{-1}$, ou enfin $-\frac{m}{2} + \frac{n\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{m\sqrt{3}}{2} - \frac{n}{2}\right)\sqrt{-1}$, le ſecond ſera égal à $m - n\sqrt{-1}$, ou à $-\frac{m}{2} - \frac{n\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{m\sqrt{3}}{2} - \frac{n}{2}\right)\sqrt{-1}$, ou enfin à $-\frac{m}{2} + \frac{n\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{m\sqrt{3}}{2} - \frac{n}{2}\right)\sqrt{-1}$ ; donc les racines de l'équation ou les valeurs de $z$ ſont $2m$, $-m - n\sqrt{3}$, $-m + n\sqrt{3}$.

38. Soit maintenant $c = \gamma\sqrt{3}$, on aura $-a^3 + ac^2 = -a^3 + 3a\gamma^2$ ; $\frac{c^3 - 9a^2c}{3\sqrt{3}} = \gamma^3 - 3a^2\gamma$ ; donc $\sqrt[3]{\left(-a^3 + ac^2 + \sqrt{-1} \times \left(\frac{c^3 - 9a^2c}{3\sqrt{3}}\right)\right)} = \sqrt[3]{(-a^3 + 3a\gamma^2 + \sqrt{-1}(\gamma^3 - 3a^2\gamma))} = -a - \gamma\sqrt{-1} = -a - \frac{c\sqrt{-1}}{\sqrt{3}}$ ; donc $m = -a$, $n = -\frac{c}{\sqrt{3}}$ ; ainſi, en mettant pour $m$ & $n$ leurs valeurs, les trois racines ſeront $-2a = -a - b$, $-a + c = a$, $-a - c = b$ ; ce qui s'accorde avec la ſuppoſition qu'on a

faite sur la valeur des trois racines. Ainsi la formule du troisiéme degré représente les trois racines de l'équation aussi exactement & de la même maniere que la formule du second degré représente les deux racines d'une équation du second degré.

39. En voilà assez sur les équations du troisiéme degré. Revenons aux quantités imaginaires, & faisons encore à ce sujet quelques remarques qui pourront avoir leur utilité en plusieurs occasions.

40. Si $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, $m$ étant déterminé par la méthode expliquée page 383 du Tome III des Mémoires de l'Académie de Turin; il ne s'ensuit pas de-là (ce qui est contraire en apparence aux principes reçus dans l'algébre ordinaire) que $1+h\sqrt{-1} = 1-h\sqrt{-1}$, à moins que $h$ ne soit $= 0$; espéce de paradoxe digne d'être observé. Ce n'est pas tout; de ce que $(1+h\sqrt{-1})^m = (1-h\sqrt{-1})^m$, il n'en faut pas conclure que $(1+h\sqrt{-1})^n = (1-h\sqrt{-1})^n$, $n$ étant un nombre quelconque; à moins que ce ne soit un nombre entier, positif ou négatif.

41. De ce que $\varphi x = \Delta x$, il paroît d'abord s'ensuivre en général que $\Pi(K+\varphi x) = \Pi(K+\Delta x)$, $K$ étant une constante, & $\Pi$ marquant une fonction quelconque. Mais cette conséquence n'est pas vraie sans restriction, si $\varphi x$ & $\Delta x$ contiennent des imaginaires. Car de ce que $(x+hx\sqrt{-1})^m = (x-hx\sqrt{-1})^m$, il ne s'ensuit pas que l'on ait $(x+hx\sqrt{-1})^n = (x-hx\sqrt{-1})^n$.

42. Au fond, il n'eſt guères plus ſurprenant que $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$ ne donne pas $1+h\sqrt{-1}=1-h\sqrt{-1}$, qu'il ne l'eſt que $(+a)^2=(-a)^2$ ne donne pas $+a=-a$. Cependant il y a encore ici cette différence remarquable entre les quantités réelles & les imaginaires, que $+a$ & $-a$ ne différent que par le ſigne, au lieu que $1+h\sqrt{-1}$ & $1-h\sqrt{-1}$ différent par la quantité, ſi on peut dire que des quantités imaginaires différent ainſi.

43. Dans l'équation $(1+h\sqrt{-1})^m=(1-h\sqrt{-1})^m$, ſoit $h=$ tang. $A$; donc cof. $mA+$ ſin. $mA\sqrt{-1}=$ cof. $mA-$ ſin. $mA\sqrt{-1}$. Soit $A=\theta\pi$, $\pi$ étant la demi-circonférence, & ſoit $n$ un nombre entier poſitif, on aura $h=$ tang. $A\pm 2n\pi=$ tang. $\theta\pi\pm 2n\pi$; enfin, puiſque ſin. $mA$ doit être $=-$ ſin. $mA$; on aura, en prenant pour $\mu$ un nombre entier, $mA=\pm\mu\pi$; donc $\pm\mu=m\theta\pm 2mn\pi$. Donc $(1+h\sqrt{-1})^{\pm\frac{\mu}{\theta\pm 2n}}=(1-h\sqrt{-1})^{\pm\frac{\mu}{\theta\pm 2n}}$; par la même raiſon, $(1+h\sqrt{-1})^{\pm\frac{\mu'}{\theta\pm 2n'}}=(1-h\sqrt{-1})^{\pm\frac{\mu'}{\theta\pm 2n'}}$, les quantités $\mu'$ & $n'$ étant des nombres entiers quelconques différens de $\mu$ & de $n$; d'où il s'enſuit que cof. $(\theta\pi\pm 2n'\pi)(\pm\frac{\mu'}{\theta\pm 2n'})+$ ſin. $(\theta\pi\pm 2n'\pi)(\pm\frac{\mu'}{\theta\pm 2n'})\sqrt{-1}=$ cof. $(\theta\pi\pm 2n'\pi)(\pm\frac{\mu'}{\theta\pm 2n'})$

$-\text{ſin.}(\theta\pi+2n'\pi)(\pm\frac{\mu'}{\theta\pm 2n'})\sqrt{-1}$. Soit donc $\theta+2n=\lambda$, & $\theta+2n'=\lambda'$, on aura $\text{cof.}\pm\frac{\mu.\lambda\pi}{\lambda}$ $+\text{ſin.}(\pm\frac{\mu\lambda\pi}{\lambda})\sqrt{-1}=\text{cof.}\pm\frac{\mu.\lambda\pi}{\lambda}-(\text{ſin.}\pm$ $\frac{\mu.\lambda\pi}{\lambda})\sqrt{-1}$; & $\text{cof.}\pm\frac{\mu'.\lambda'\pi}{\lambda'}+(\text{ſin.}\pm\frac{\mu'.\lambda'\pi}{\lambda'})$ $\sqrt{-1}=\text{cof.}\pm\frac{\mu.\lambda'\pi}{\lambda'}-(\text{ſin.}\pm\frac{\mu.\lambda'\pi}{\lambda'})\sqrt{-1}$; donc, en multipliant & réduiſant, les quantités $\text{cof.}[\pm$ $\frac{\mu.\lambda\pi}{\lambda}\pm\frac{\mu'.\lambda'\pi}{\lambda'}]\pm(\text{ſin.}(\pm\frac{\mu.\lambda\pi}{\lambda}\pm\frac{\mu'.\lambda'\pi}{\lambda'}))$ $\sqrt{-1}$, ſont égales; cela eſt exact. Mais il ne faudroit pas dire; de ce que $(\text{cof.}\lambda\pi+(\text{ſin.}\lambda\pi)\sqrt{-1})^{\pm\frac{\mu}{\lambda}}$ $=(\text{cof.}\lambda\pi-(\text{ſin.}\lambda\pi)\sqrt{-1})^{\pm\frac{\mu}{\lambda}}$, & $\text{cof.}\lambda'\pi+$ $(\text{ſin.}\lambda'\pi\sqrt{-1})^{\pm\frac{\mu'}{\lambda'}}=(\text{cof.}\lambda'\pi-(\text{ſin.}\lambda'\pi)\sqrt{-1})^{\pm\frac{\mu'}{\lambda'}}$, donc (ſi $\text{cof.}\lambda'\pi=\text{cof.}\lambda\pi$, & $\text{ſin.}\lambda'\pi=\text{ſin.}\lambda\pi$) $\text{cof.}$ $(\lambda\pi+\text{ſin.}\lambda\pi\sqrt{-1})^{\pm\frac{\mu}{\lambda}\pm\frac{\mu'}{\lambda'}}=(\text{cof.}\lambda\pi-(\text{ſin.}$ $\lambda\pi\sqrt{-1}))^{\pm\frac{\mu}{\lambda}\pm\frac{\mu'}{\lambda'}}$. En voici la raiſon.

44. Soit $(\text{cof.}A+\text{ſin.}A\sqrt{-1})^m=\text{cof.}mA+$ $\text{ſin.}mA\sqrt{-1}$, & $(\text{cof.}B+\text{ſin.}B\sqrt{-1})^n=\text{cof.}nB$ $+\text{ſin.}nB\sqrt{-1}$; & ſoit $B=A+k.360°$, $k$ étant un nombre entier, enſorte que $\text{cof.}B=\text{cof.}A$, & $\text{ſin.}$ $B=\text{ſin.}A$; on aura, en multipliant les deux membres l'un par l'autre, $(\text{cof.}A+\text{ſin.}A\sqrt{-1})^m\times(\text{cof.}B+$ $\text{ſin.}B\sqrt{-1})^n=\text{cof.}(mA+nB)+\text{ſin.}mA+nB$ $\sqrt{-1}$.

$\sqrt{-1}$. Mais si à cause de cos. $A$ = cos. $B$ & sin. $A$ = sin. $B$, on se croyoit en droit de conclure des deux équations ci-dessus, que $(\text{cos. } A + \text{sin. } A\sqrt{-1})^{m+n} = \text{cos. } mA + nB + (\text{sin. } mA + nB)\sqrt{-1}$; cette conclusion seroit fausse; parce que le premier membre donneroit cos. $(m+n)A + \text{sin. } (m+n)A\sqrt{-1}$, que le second (en mettant pour $B$ sa valeur $A + k \cdot 360°$) donneroit cos. $mA + nA + n \cdot k\,360° + (\text{sin. } mA + nA + n \cdot k \cdot 360°)\sqrt{-1}$, & que ces deux membres ne peuvent être égaux, à moins que $n$ ne soit un nombre entier. On peut donc supposer que $(1 + h\sqrt{-1})^{\pm \frac{\mu}{\theta \pm 2n}} \times (1 + h'\sqrt{-1})^{\pm \frac{\mu'}{\theta \pm 2n'}}$ est égal à $(1 - h\sqrt{-1})^{\pm \frac{\mu}{\theta \pm 2n}} \times (1 - h'\sqrt{-1})^{\pm \frac{\mu'}{\theta \pm 2n'}}$, $h$ étant la tangente de $\theta\pi \pm 2n\pi$, & $h'$ celle de $\theta\pi \pm 2n'\pi$; mais non que $(1 + h\sqrt{-1})^{\pm \frac{\mu}{\theta \pm 2n} \pm \frac{\mu'}{\theta \pm 2n'}}$ est égal à $(1 - h\sqrt{-1})^{\pm \frac{\mu}{\theta \pm 2n} \pm \frac{\mu'}{\theta \pm 2n'}}$, quoique $h'$ soit $= h$; par la même raison qu'on a $(a^3)^{\frac{1}{3}} = a$, $(a^3)^{\frac{1}{3}} = a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, $(a^3)^{\frac{1}{3}} = a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$, quoiqu'on ne puisse pas en conclure que $a^{3\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)}$ ou $a^3 = a \times a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \times a\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$.

45. Nous avons dit dans les Mémoires de Turin déja cités, page 383, que si on a $\varphi(x + y\sqrt{-1}) - \varphi(x - y\sqrt{-1}) = 2M\sqrt{-1}$, & que $y = f + hx$, un

des termes qui expriment la valeur de $\varphi x$, eſt $(f+hx)^{\frac{\mu}{\iota}}$, $\mu$ étant un nombre quelconque entier, $\pi$ la demi-circonférence, & $\theta\pi$ l'angle dont la tangente eſt $h$; nous avons fait voir de plus, qu'au lieu de $(f+hx)^{\frac{\mu}{\iota}}$, on pouvoit ſubſtituer $[(f+hx)^{\frac{\mu}{\iota}}+\lambda]^p$, $\mu$ & $p$ étant des nombres entiers poſitifs ou négatifs. Cela eſt évident quand $p$ eſt poſitif, puiſqu'il eſt aiſé de voir que $[(f+hx+h(f+hx)\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\iota}}+\lambda]^p$ ſera $=[(f+hx-h(f+hx)\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\iota}}+\lambda]^p$, équation qui réſulte du développement des termes de chaque membre; or de-là il eſt aiſé de conclure que $[(f+hx+h(f+hx)\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\iota}}+\lambda]^{-p}=[(f+hx-h(f+hx)\sqrt{-1})^{\frac{\mu}{\iota}}+\lambda]^{-p}$.

46. Par la même raiſon, on peut mettre au lieu de $(f+hx)^{-\frac{\mu}{\iota}}$, une ſuite de produits $[(f+hx)^{\frac{\mu}{\iota}}+\lambda]^p \times [(f+hx)^{\frac{\mu'}{\iota'}}+\lambda']^{p'} \times [(f+hx)^{\frac{\mu''}{\iota''}}+\lambda'']^{p''}$, &c. $\mu, \mu'$, &c. & $p, p', p''$, &c. étant des nombres entiers quelconques poſitifs ou négatifs, & $\lambda, \lambda', \lambda''$, &c. des conſtantes arbitraires.

47. Par conſéquent, faiſant $\lambda=0$, $\lambda'=0$, $\lambda''=0$, &c. on pourra mettre au lieu de $(f+hx)^{\frac{\mu}{\iota}}$, $(f+hx)^{\frac{\mu}{\iota}} \times (f+hx)^{\frac{\mu'}{\iota'}}$, &c. $\mu$ & $\mu'$, &c. étant des nombres entiers de ſigne quelconque, & $\theta$, $\theta'$, &c. étant égaux à $\frac{\omega}{\pi} \pm 2n$ ou $2n'$, &c. & $\omega$ le plus petit angle qui ait $h$ pour

tangente ; mais il faut bien remarquer (art. 44) que les produits $(f+hx)^{\frac{\mu}{\theta}} \times (f+hx)^{\frac{\mu'}{\theta'}} \times (f+hx)^{\frac{\mu''}{\theta''}}$, &c. ne doivent point être ſuppoſés égaux à $(f+hx)^{\frac{\mu}{\theta}+\frac{\mu'}{\theta'}+\frac{\mu''}{\theta''}}$, &c.

48. On demandera peut-être ſi au lieu de prendre $\Gamma(f+gx)^{\frac{\mu}{\theta}}+\lambda\Gamma^{p}$, comme dans l'art. 45, & de commencer le développement de la ſerie par $(f+gx)^{\frac{\mu}{\theta}}$, on ne pourroit pas commencer par $\lambda$, auquel cas $p$ ſeroit tout ce qu'on voudroit, & $\mu$ un nombre entier quelconque poſitif ou négatif; & ſi cette conſéquence ne s'étendroit pas à une fonction quelconque de $\Gamma(f+gx)^{\nu}+K\Gamma^{p}$, avec cette reſtriction que $K$ ne ſoit pas $=0$? Car ſi $K$ étoit $=0$, & $\delta=\frac{\mu}{\theta}$, $p$ ne pourroit pas être un nombre quelconque ; puiſqu'il faudroit que $p\mu$ fût un nombre entier, & par conſéquent $p$ un nombre entier.

49. Il eſt certain que le développement de la ſerie, en commençant par $K$, ſembleroit prouver que $p$ peut être en effet tout ce qu'on voudra ; cependant il n'eſt pas moins certain que cette concluſion ſeroit fauſſe ; car en faiſant $K=0$, $p\mu$ devroit être égal à un nombre entier, comme on vient de le dire, & par conſéquent $p$ ne peut être arbitraire en faiſant $K=$ à une conſtante quelconque. Nouvelle raiſon pour rendre ſuſpectes, en cette matiere, & dans d'autres cas ſemblables, les con-

cluſions qui paroiſſent réſulter du développement d'une quantité en ſerie.

50. De ce même développement en ſerie, il paroîtroit réſulter qu'au lieu de $(f+hx)^{\frac{\mu}{\nu}}$, on peut mettre $[(f+hx)^{\frac{k}{\nu}}+\lambda]^p$, pourvû que $p$ & $k$ ſoient tels que $(p-q)k$ ſoit toujours égal à un nombre entier poſitif ou négatif, $q$ étant un nombre entier poſitif quelconque, & $\theta'=\theta\pm 2n$, $n$ étant auſſi un nombre entier quelconque ; mais cette conſéquence pourroit bien n'être pas plus vraie que celle de $p=$ à un nombre quelconque.

51. C'eſt un point que je laiſſe au Lecteur à examiner d'après les principes établis ci-deſſus ; je me contenterai de remarquer, que pour que $(p-q)k$ ſoit un nombre entier poſitif ou négatif, $q$ étant un nombre entier poſitif quelconque, il faut que $(p-q)k$, & $(p-q+1)k$ ſoient des nombres entiers poſitifs ou négatifs. Donc $k$ ſera un nombre entier poſitif ou négatif ; donc $pk$ ſera un nombre entier. Donc $p$ devra être $=\frac{\rho}{k}$, $\rho$ étant un nombre entier poſitif ou négatif.

52. Soit $\frac{k}{\lambda}$ une fraction donnée, & réduite, comme cela eſt toujours poſſible, aux plus petits termes ; on propoſe de trouver une fraction $\frac{\pm\mu}{\theta\pm 2n}$, telle que $\mu$ & $n$ ſoient des nombres entiers poſitifs, & qui ſoit égale à la fraction donnée $\frac{k}{\lambda}$. Pour y parvenir, ſoit la frac-

tion donnée $\theta = \frac{p}{q}$, $q$ étant $> p$; on aura $\frac{k}{\lambda} - = \frac{\pm \mu q}{p \pm 2nq}$; & $\pm \mu = \frac{kp \pm 2nkq}{\lambda q}$; donc faiſant, pour abréger, les nombres entiers donnés $kp = a$, $2kq = b$, $\lambda q = c$, on aura $\frac{a \pm nb}{c} = \pm \mu$; ce qui peut ſe réduire à $\frac{a \pm nc'}{c} = \pm \mu'$, $c'$ étant $< c$; donc $a + nc' = \pm \mu' c$, donc $\frac{\mu' c - a}{c'} = \pm n'$, & $\frac{\mu' c'' - a'}{c'} = \pm n''$, $c''$ étant plus petit que $c'$, & $a'$ étant auſſi $< c'$; en continuant ainſi, on parviendra à rendre le dénominateur toujours plus petit; cela poſé, s'il arrive enfin que dans quelqu'une des équations, par exemple, dans $\frac{\mu' c - a}{c'} = \pm n'$, $c$ ſoit diviſible par $c'$, il faudra que $a$ ſoit diviſible par $c'$ pour que la ſolution ſoit poſſible. Par ce moyen, on verra toujours aiſément ſi la fraction donnée $\frac{k}{\lambda}$ peut être réduite à la forme $\frac{\pm \mu}{\theta \pm 2n}$.

54. Soit ſuppoſé $A(\lambda x + \mathfrak{C} h x \sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} + Bx(\lambda x + \mathfrak{S} h x \sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = 0$; on propoſe de trouver $m$ & $n$.

Soit $(\lambda + \mathfrak{C} h \sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}} = \alpha + \mathfrak{C}' \sqrt{-1}$; $\omega$ l'angle dont le ſinus eſt $\frac{\mathfrak{C} h}{\sqrt{(\lambda\lambda + \mathfrak{C} h^2)}}$, & le coſinus $\frac{\lambda}{\sqrt{(\lambda^2 + \mathfrak{C}^2 h^2)}}$; $\omega'$ l'angle dont le ſinus eſt $\frac{\mathfrak{S} h}{(\sqrt{\gamma^2 + \mathfrak{S}^2 h^2})}$; & le coſinus $\frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + \mathfrak{S}^2 h^2)}}$; on aura, par les méthodes

que j'ai données ailleurs (*a*), $\mathfrak{C}' = \sqrt{(\lambda^2 + \mathfrak{C}^2 h^2)^m} c^{-n\omega} \times$ sin. $[n \log. \sqrt{(\lambda^2 + \mathfrak{C}^2 h^2)} + m\omega] = M$ sin. $P$; & $\alpha = \sqrt{(\lambda^2 + \mathfrak{C}^2 h^2)^m} c^{-n\omega}$ cos. $[n \log. \sqrt{(\lambda^2 + \mathfrak{C}^2 h^2)} + m\omega] = M$ cos. $P$.

55. Faisant de même $(\gamma + \delta h \sqrt{-1})^{m+n\sqrt{-1}}$ égal à $\eta + \theta\sqrt{-1}$, & se souvenant que $\omega'$ est l'angle dont le sinus est $\frac{\delta h}{\sqrt{(\gamma^2 + \delta^2 h^2)}}$, & le cosinus $\frac{\gamma}{\sqrt{(\gamma^2 + \delta^2 h^2)}}$, on aura $\theta = \sqrt{(\gamma^2 + \delta^2 h^2)^m} c^{-n\omega'}$ sin. $[n \log. \sqrt{(\gamma^2 + \delta^2 h^2)} + m\alpha'] = N$ sin. $Q$; & $\gamma = \sqrt{(\gamma^2 + \delta^2 h^2)^m} c^{-n\omega'}$ cos. $[n \log. \sqrt{(\gamma^2 + \delta^2 h^2)} + m\omega'] = N$ cos. $Q$; donc $AM \times$ cos. $P + AN$ sin. $P\sqrt{-1} + BN$ cos. $Q + BN$ sin. $Q\sqrt{-1} = 0$.

56. Donc faisant $A = F + G\sqrt{-1}$, $B = H + L\sqrt{-1}$; on aura $FM$ cos. $P - GN$ sin. $P + NH$ cos. $Q - LN \times$ sin. $Q = 0$; & $GM$ cos. $P + FN$ sin. $P + LN$ cos. $Q + NH$ sin. $Q = 0$.

57. Donc cos. $Q = \frac{FM \text{ cos. } P - GN \text{ sin. } P - LN \text{ sin. } Q}{-NH}$ $= \frac{GM \text{ cos. } P + FN \text{ sin. } P + HN \text{ sin. } Q}{-LN}$; donc sin. $Q = \left[\frac{FM \text{ cos. } P - GN \text{ sin. } P}{NH} - \frac{GM \text{ cos. } P + FN \text{ sin. } P}{LN}\right] : \left[\frac{H}{L} + \frac{L}{H}\right]$.

58. Maintenant cos. $Q^2 +$ sin. $Q^2 = 1$; donc en substituant & réduisant, on aura $\frac{M^2 \text{ cos. } P^2}{H^2} + \frac{N^2 \text{ sin. } P^2}{H^2}$

(*a*) Voyez mes *Recherches sur la cause des Vents*, art. 79; les Mémoires de Berlin 1746, & le troisiéme volume des Mémoires de Turin, page 384.

$$+\frac{M^2 \text{ cof. } P^2}{L^2}+\frac{N^2 \text{ fin. } P^2}{L^2}=\left(\frac{HH+LL}{LH}\right)^2\times\frac{N^2}{F^2+G^2}.$$

59. On conſtruira une ſurface courbe qui ait cette derniere équation, & dont les indéterminées ſoient cof. $P$, $M$ & $N$; on a de plus les deux équations $\frac{m \log.(\gamma^2+\delta^2 h^2)}{2} - n\omega' = \log. N$; & $\frac{m \log.(\lambda^2+\zeta^2 h^2)}{2} - n\omega = \log. M$; $m$, $n$, $N$ étant les indéterminées dans la premiere, & $m$, $n$, $M$ dans la ſeconde; d'où l'on tire une valeur de $m$ & de $n$ en log. $N$ & log. $M$. On ſubſtituera enſuite ces valeurs & celle de ſin. $Q$ (art. 57) dans la premiere des équations de l'art. 55, & on conſtruira une ſeconde ſurface courbe qui aura pour coordonnées $M$, $N$ & cof. $P$, en mettant pour ſin. $P$ ſa valeur $\sqrt{(1-\text{cof. } P^2)}$.

60. On a enfin cof. $[n \log.(\lambda^2+\zeta^2 h^2)+m\omega] =$ ſin. $P$, équation dans laquelle on mettra pour $m$ & pour $n$ leurs valeurs en log. $M$ & log. $N$, & qui ſera l'équation d'une troiſiéme ſurface courbe, dont les coordonnées ſeront ou pourront être ſuppoſées $N$, $M$, cof. $P$. Tous les points communs à cette derniere ſurface courbe, & aux deux ſurfaces courbes conſtruites par l'art. 59, leſquelles ont auſſi pour coordonnées communes $N$, $M$, cof. $P$, donneront les valeurs de $N$ & de $M$, (& par conſéquent celle de $n$ & de $m$) & celle de $P$.

*Fin du trente-cinquiéme Mémoire.*

# XXXVI^ME MÉMOIRE.

*Contenant quelques Ecrits ſur différens Sujets.*

## §. I.

### *Sur la loi de la compreſſion des Reſſorts.*

1. M. Jean Bernoulli le fils, dans une piéce ſur la propagation de la lumiere, qui a remporté le prix de l'Académie en 1736, ſuppoſe que quand un reſſort eſt dans ſon état naturel, la force néceſſaire pour le comprimer ou le dilater (force que j'appellerai $y$) eſt infiniment plus petite que quand le reſſort eſt comprimé ou dilaté d'une quantité finie; car ce Savant ſuppoſe que la courbe qui a pour ordonnées les valeurs de $y$, touche ſon axe à l'origine; en conſéquence de cette ſuppoſition, $y$ eſt infiniment petite au moins du ſecond ordre à l'origine de la courbe; d'où il conclut qu'un reſſort, dans ſon centre d'équilibre *oiſif*, s'il eſt dilaté ou comprimé tant ſoit peu, ne ſauroit faire des vibrations iſochrones, & qu'il

qu'il faut pour l'iſochroniſme qu'il ſoit dans un centre d'équilibre *forcé*, parce qu'il n'y a que ce dernier cas où les forces ſoient proportionnelles aux diſtances du point de repos.

2. A cette occaſion, M. Daniel Bernoulli, dans ſa piéce *ſur les moyens de trouver l'heure en mer*, obſerve avec raiſon que M. Jean Bernoulli a fait une hypothéſe hazardée, en ſuppoſant que la courbe dont il s'agit touche ſon axe à l'origine. Mais M. Daniel Bernoulli fait lui-même une autre ſuppoſition non moins hazardée, en avançant que cette courbe doit avoir un point d'inflexion à l'origine; ſa raiſon eſt que quand le reſſort ſe dilate d'une petite quantité, la force $y$ doit devenir négative, de poſitive qu'elle étoit auparavant; c'eſt comme on prétendoit que la force de l'attraction ne ſauroit être en raiſon inverſe du quarré des diſtances, parce qu'elle ſeroit de même ſigne (& par conſéquent de même direction) des deux côtés oppoſés du corps attirant, quoiqu'elle ſoit réellement de direction contraire. Les idées abſtraites de la Géométrie, comme je l'ai dit ailleurs (*a*), & à l'occaſion même de la queſtion dont il s'agit, ne doivent pas être tranſportées dans la Phyſique; & il pourroit très-bien ſe faire que la courbe des forces $y$ touchât ſon axe à l'origine, & n'eût pas à cette origine de point d'inflexion, quoique les forces changent de direction lorſque le reſſort eſt dilaté au lieu d'être comprimé.

(a) *Traité des Fluides*, art. 80.

3. Ce n'eſt pas tout : les ordonnées $y$ pourroient devenir négatives de l'autre côté de l'axe, ſans qu'il y eût un point d'inflexion à l'origine. Car il ſuffit pour cela que la courbe coupe ſon axe à l'origine ſous un angle fini, c'eſt-à-dire, que $\frac{dy}{dx}$ n'y ſoit pas $= 0$. Il eſt vrai qu'en ce cas les ordonnées négatives ne ſeront pas égales aux ordonnées poſitives, priſes de l'autre côté de l'axe à la même diſtance ſuppoſée très-petite. Mais la théorie & l'expérience même démontrent-elles que les forces de direction contraire, l'une dilatative, l'autre contractive, doivent être *rigoureuſement* égales, lorſque le reſſort eſt dilaté ou comprimé de la même petite quantité ? Il eſt vrai qu'alors l'iſochroniſme des vibrations pourroit bien n'avoir plus lieu, au moins dans certaines hypothèſes, comme nous le remarquerons plus bas, art. 8. Mais l'iſochroniſme des vibrations n'eſt pas non plus une vérité démontrée ; c'eſt une ſimple conſéquence tirée par M. Daniel Bernoulli de la ſuppoſition précaire, que les forces ſoient exactement proportionnelles à la diſtance du point de repos. Enfin, quand même on accorderoit à M. Bernoulli que la courbe a un point d'inflexion à ſon origine, & que par conſéquent les $y$ poſitives ſont ſenſiblement égales aux $y$ négatives à une petite diſtance de cette origine, il ne s'enſuivroit pas de-là que les vibrations fuſſent iſochrones. Car ſi la courbe, avec ce point d'inflexion ſuppoſé, touchoit ſon axe à l'origine, la valeur de $y$ n'y ſeroit pas propor-

tionnelle à $x$, mais elle le ſeroit à $x^m$, $m$ exprimant une puiſſance impaire plus grande que l'unité, ce qui détruit l'iſochroniſme. Il falloit donc prouver, ou par la théorie ou par l'expérience, que la courbe des $y$ coupe ſon axe ſous un angle fini à l'origine ; d'où l'on auroit pu conclure que les petites vibrations ſont ( en certains cas ) ſenſiblement iſochrones, comme nous l'allons voir.

4. Soit un corpuſcule pouſſé vers un point fixe par une force qui ſoit $= ax + Cx^2$, on demande la loi de ſon mouvement.

On aura ( en nommant $u$ la vîteſſe ) $ax\,dx + Cx^2\,dx + u\,du = 0$, & $u^2 = a(a^2 - x^2) + 2C\left(\frac{a^3 - x^3}{3}\right)$, en ſuppoſant $x = a$, lorſque le temps $t = 0$, c'eſt-à-dire au commencement du mouvement. Donc $dt$ ou $-\frac{dx}{u} = -\frac{dx}{\sqrt{\left[a(a^2 - x^2) + 2C\left(\frac{a^3 - x^3}{3}\right)\right]}}$ ; donc en faiſant $a - x = \theta$, on aura $dt = \frac{d\theta}{\sqrt{\left[a(2a\theta - \theta^2) + \frac{2C}{3}(3a^2\theta - 3a\theta^2 + \theta^3)\right]}} = \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}.\sqrt{\left(2aa + 2Ca^2 - a\theta - 2Ca\theta + \frac{2C\theta^2}{3}\right)}}$ ; or la quantité qui eſt ſous le grand ſigne radical peut ſe changer en celle-ci, $\frac{\sqrt{(2C)}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\left(\frac{2aa + 2Ca^2}{2C} \times 3 - \frac{a\theta + 2Ca\theta}{2C} \times 3 + \theta^2\right)}$ ; maintenant $\sqrt{(P + Q\theta + \theta^2)} = \sqrt{\left(\theta + \frac{Q}{2} + \frac{\sqrt{(QQ - 4P)}}{2}\right)} \times \sqrt{\left(\theta + \frac{Q}{2} - \frac{\sqrt{(QQ - 4P)}}{2}\right)}$

$= \sqrt{\left(-\theta - \frac{Q}{2} - \frac{\sqrt{(QQ-4P)}}{2}\right)} \times \sqrt{\left(-\theta - \frac{Q}{2} + \frac{\sqrt{(QQ-4P)}}{2}\right)}$; or en ſuppoſant $QQ$ très-grand par rapport à $P$, on a $\sqrt{(QQ-4P)} = Q - \frac{2P}{Q}$ à très-peu près; donc $\sqrt{(P+Q\theta+\theta^2)} = \sqrt{\left(-\frac{P}{Q}-\theta\right)} \times \sqrt{\left(-Q+\frac{P}{Q}-\theta\right)} = \left(\sqrt{\left[\frac{2aa+2\mathfrak{C}a^2}{a+2\mathfrak{C}a}\right]}-\theta\right) \times \sqrt{\left(\frac{a+2\mathfrak{C}a}{\frac{2\mathfrak{C}}{3}} - \frac{2aa+2\mathfrak{C}a^2}{a+2\mathfrak{C}a} - \theta\right)}$; donc en faiſant $\frac{2aa+2\mathfrak{C}a^2}{a+2\mathfrak{C}a} = \omega$, & $\frac{a+2\mathfrak{C}a}{\frac{2\mathfrak{C}}{3}} - \frac{2aa+2\mathfrak{C}a^2}{a+2\mathfrak{C}a}$ ou $\frac{a+2\mathfrak{C}a}{\frac{2\mathfrak{C}}{3}} - \omega = n$, on peut mettre la quantité à intégrer ſous cette forme $\frac{d\theta}{\frac{\sqrt{2\mathfrak{C}}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(\omega\theta-\theta^2)} \cdot \sqrt{(n-\theta)}}$; ou (en ſuppoſant $n$ très-grand par rapport à $\theta$) $\frac{d\theta}{\frac{\sqrt{2\mathfrak{C}}}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(\omega\theta-\theta\theta)}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{\theta}{2n}\right)$, dont l'intégrale (en ſe ſouvenant que $\int \frac{\theta\, d\theta}{\sqrt{(\omega\theta-\theta\theta)}} = -\sqrt{(\omega\theta-\theta\theta)} + \frac{\omega\, d\theta}{2\sqrt{(\omega\theta-\theta\theta)}}$) eſt $\frac{1}{\frac{\sqrt{2\mathfrak{C}}}{\sqrt{3}}} \times \left[\left(1+\frac{\omega}{4n}\right)\int \frac{d\theta}{\sqrt{(\omega\theta-\theta\theta)}} - \frac{\sqrt{(\omega\theta-\theta\theta)}}{2n}\right]$ à très-peu près.

5. Soit maintenant $a = \frac{f}{a'}$, & $\mathfrak{C} = \frac{\phi}{a'a'}$; & ſoit

ſuppoſé $\varphi = mf$; on aura $\omega = \frac{\frac{2fa}{a'} + \frac{2\varphi a^2}{a'^2}}{\frac{f}{a'} + \frac{2\varphi a}{a'^2}}$ égal à $\frac{2fa a' + 2mfa^2}{fa' + 2mfa}$; $n = \frac{\frac{f}{a'} + \frac{2\varphi a}{a'^2}}{\frac{2}{3a'^2}} - \omega = \frac{3fa'}{2\varphi} + 3a - \omega$.

6. Soit $F$ la force à la diſtance $b$, on aura $F = \frac{fb}{a'} + \frac{\varphi b^2}{a'^2} = \frac{fb}{a'}\left(1 + \frac{mb}{a'}\right)$; on remarquera que la condition que $n$ ſoit grand par rapport à $\omega$, demande que $\frac{fa'}{\varphi a}$ ou $\frac{a'}{ma}$ ſoit grand; du reſte on aura $\frac{\sqrt{(2Gn)}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\left(\frac{f}{a'} + \frac{2\varphi a}{a'^2} - \frac{2\varphi\omega}{3a'^2}\right)}$ = à très-peu près $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a'}} \times \left(1 + \frac{\varphi a}{fa'} - \frac{\varphi\omega}{3a'f}\right)$ = (en mettant pour $\omega$ ſa valeur approchée $2a$) $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a'}}\left(1 + \frac{\varphi a}{fa'} - \frac{2\varphi a}{3a'f}\right)$ qui ſe réduit à $\frac{\sqrt{f}}{\sqrt{a'}}\left(1 + \frac{\varphi a}{3fa'}\right)$.

7. Donc lorſque $\omega = 0$, c'eſt-à-dire après une vibration entiere, le temps ſera à très-peu près $\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{f}} \times \int \frac{d\theta}{\sqrt{(\omega\theta - \theta\theta)}} \times \left(1 - \frac{\varphi a}{3fa'} + \frac{\omega}{4n}\right) = \frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{f}} \times \int \frac{d\theta}{\sqrt{(\omega\theta - \theta\theta)}} \times \left(1 - \frac{\varphi a}{3fa'} + \frac{4\varphi a}{4 \cdot 3fa'}\right) = \frac{\sqrt{a'}}{\sqrt{f}} \times \int \frac{d\theta}{\sqrt{(\omega\theta - \theta\theta)}}$, c'eſt-à-dire conſtant. D'où l'on voit que ſi la force eſt $ax + Gx^2$, les vibrations ſeront ſenſiblement iſochrones.

8. Si la force étoit $\alpha x + \mathfrak{C} x^3$, on trouveroit que l'expreſſion de la vîteſſe auroit cette forme $V\theta . V(A + B\theta + C\theta^2 + D\theta^3)$ qui peut aiſément être changée en $V(M\theta - \theta\theta) \times (G + E\iota + F\theta^2)$, $M$ étant la valeur de $\theta$ lorſque $A + B\theta + C\theta^2 + D\theta^3 = 0$, laquelle valeur differe très-peu de $-\frac{A}{B}$. Or cela poſé, il eſt aiſé de voir que quand $V(M\theta - \theta^2) = 0$, c'eſt-à-dire après une vibration entiere, le tems ſera exprimé par $Q\int \frac{d\theta}{V(M\theta - \theta\theta)}$; $Q$ déſignant une conſtante dans laquelle la conſtante indéterminée $\alpha$ peut entrer, quoiqu'elle diſparoiſſe dans le cas où la force eſt $\alpha x + \mathfrak{C} x^2$; c'eſt une diſcuſſion que j'abandonne à d'autres.

## §. II.

### *Sur un problême concernant les ſinus.*

1. On propoſe de trouver la valeur de $z$ dans l'équation ſin. $nz = \lambda$ ſin. $z$, les nombres $\lambda$ & $n$ étant donnés.

2. Je commencerai par réſoudre cette équation pour le cas de $\lambda = -n$; enſuite je ferai voir comment on peut la réſoudre d'une maniere générale.

3. On voit d'abord que ſin. $z$, pris poſitivement ou négativement, ne ſauroit être plus grand que $\frac{1}{n}$, puiſque ſin. $nz$, qui eſt $= -n$ ſin. $z$, ne ſauroit être $> 1$.

4. Soit maintenant ſin. $z = u$; comme ce ſinus $u$ appartient à une infinité d'angles, ſavoir $t$, $\pi p + t$, &c.

$\pi$ exprimant la circonférence, & $p$ un nombre entier quelconque, ou $t$, $\frac{\pi r}{2} - t$, &c. $r$ exprimant un nombre impair quelconque ; ſoit ſuppoſé d'abord ſin. $t = u$, $t$ étant plus petit que 90 degrés, pris poſitivement ou négativement, & $u$ n'étant pas $> \pm \frac{1}{\nu}$ ; on aura, par une ſuite très-convergente, $t = u + Au^3 + Bu^5$, &c. $A$, $B$ étant des coefficiens connus. Soit pris enſuite un ſinus $= -\nu u$, & l'angle correſpondant le plus petit poſſible ſera (ſi $u$ eſt poſitif) égal à $-\nu u - A\nu^3 u^3 - B\nu^5 u^5$, &c. & ſi $u$ eſt négatif, cet angle ſera $= \nu u + A\nu^3 u^3 + B\nu^5 u^5$, &c. Cela poſé, on aura $\pi p + t = z$ ; & $\nu z = \nu\pi p + \nu t = \nu\pi p + \nu u + \nu A u^3 + \nu B u^5 +$ &c. Or (*hyp.*) ſin. $\nu z = -\nu$ ſin. $z = -\nu u$ ; donc l'angle $\nu z$ eſt $=$ à l'angle dont le ſinus eſt $-\nu u$, cet angle étant augmenté de la circonférence priſe un certain nombre de fois. Donc la valeur de $\nu z$ qu'on vient de trouver, doit être égale (en nommant $\sigma$ un nombre entier quelconque) à $\sigma\pi - \nu u - A\nu^3 u^3 - B\nu^5 u^5$.

5. Soit $\nu = \mu + \alpha$, $\mu$ étant un nombre entier & $\alpha$ une fraction, commenſurable ou non, & négligeons d'abord les puiſſances de $u$ ; on aura $\mu\pi p + \alpha\pi p - \sigma\pi = -2(\mu+\alpha)u$, $p$ & $\sigma$ étant deux indéterminées, & la plus petite valeur approchée de $u$ qui doit être $<$ ou $= +\frac{1}{\nu} = \frac{1}{\mu+\alpha}$, ſera telle que l'on aura $\mu\pi p + \alpha\pi p - \sigma\pi = -2k$, $k$ étant $=$ ou plus petit que l'unité, & le rayon étant pris pour l'unité.

6. Soit d'abord $\alpha = \frac{p}{q}$, $p$ & $q$ étant des nombres rationnels, ſans diviſeur commun; il eſt viſible qu'en faiſant $\rho = q$, & $\sigma = \mu q + p$, on aura $k = 0$; donc alors $u = 0$; donc $t = 0$, donc $z = \rho\pi = q\pi$. C'eſt la plus ſimple des valeurs de $z$ qui ſatisfaſſe à l'équation propoſée.

7. Donc $z = A\rho\pi = Aq\pi$, ſatisferoit auſſi, en prenant $A$ égal à un nombre entier quelconque.

8. Soit enſuite $\rho = q - n$, $n$ étant un nombre entier, & $\sigma$ = au plus grand nombre entier contenu dans $\mu(q-n) + \frac{p}{q}(q-n)$, c'eſt-à-dire $= \mu(q-n) + p -$ le plus petit nombre entier plus grand que $\frac{pn}{q}$; ſoit $\zeta$ la fraction reſtante, on aura $-\zeta\pi = -2k$, ou $\zeta\pi = 2kr$, en appellant $r$ le rayon; ſi cette équation $\zeta\pi = 2kr$ étoit rigoureuſement exacte, il s'enſuivroit que $\zeta$ ne ſauroit être $> \frac{2r}{\pi}$; mais comme l'équation $\zeta\pi = 2kr$ n'eſt vraie qu'à peu près, à cauſe des puiſſances de $u$ négligées dans le calcul, il s'enſuit au moins que la fraction $\zeta$ ne doit pas être beaucoup $> \frac{2r}{\pi}$, ſans quoi il n'y aura point de ſolution poſſible que $u = 0$, & $k = 0$.

9. On eſſayera donc toutes les valeurs poſſibles de $\rho$ depuis 1 juſqu'à $q$, & ſuppoſant $k = 1$ $u = (\mu + \frac{p}{q})u$, on verra ſi elles peuvent ſatisfaire à l'équation $\mu\rho\pi + \frac{p\pi\rho}{q}$ —

$-\sigma\pi = -2k - A\left(k^3 + \frac{k^3}{(\mu+\frac{p}{q})^2}\right) - B\left(k^5 + \frac{k^5}{(\mu+\frac{p}{q})^4}\right)$, &c. $\sigma\pi$ étant toujours le plus petit des nombres entiers plus grands que $\mu p\pi + \frac{p\pi\varrho}{q}$, & $k$ étant une fraction ; la ſolution approchée de cette équation (ſi la ſolution eſt poſſible) donnera la valeur de $k$.

10. Si $k$ eſt négatif, il faudra pour lors que $\sigma\pi$ ſoit le plus grand des nombres entiers plus petits que $\mu\pi + \frac{p\pi\varrho}{q}$.

11. Si $\alpha$ eſt une fraction incommenſurable, alors on peut toujours trouver une fraction $\frac{p}{q}$ plus grande ou plus petite que $\alpha$ d'une quantité auſſi petite qu'on voudra. Soit donc $\alpha = \frac{p}{q} \pm \zeta$, $\zeta$ étant une quantité qu'on peut ſuppoſer auſſi petite qu'on voudra. Cela poſé :

12. Il eſt d'abord évident qu'en prenant $\rho = q$, & $\sigma = \mu q + p$, il ne reſtera que l'équation $\pm\zeta\pi = -2k - A\left(k^3 + \frac{k^3}{(\mu+\frac{p}{q}\pm\zeta)^2}\right) - B\left(k^5 + \frac{k^5}{(\mu+\frac{p}{q}\pm\zeta)^4}\right)$, &c. qu'on pourra toujours réſoudre, puiſque $\zeta$ peut être ſuppoſé auſſi petit qu'on en aura beſoin.

13. Il faudra de plus rétrograder alors ſur les valeurs de $\rho$ en prenant $\rho < q$, & voir ſi on parviendroit dans ce cas à une équation $\mu\pi\rho + \frac{p\pi\varrho}{q} \pm \zeta\pi\rho - \sigma\pi =$

$+ 2k - A\left(k^3 + \frac{k^3}{(\mu + \frac{p}{q} \pm \zeta)^2}\right)$, &c. qui fût poſſible; la plus petite valeur de $p$, qui donneroit une telle équation, ſeroit celle à laquelle il faudroit s'arrêter.

14. Puiſqu'on a $u = t + A't^3 + B't^5$ exprimé par une ſerie très-convergente & très-connue, on aura $-\nu u = -\nu t - A'\nu t^3 + B'\nu t^5$, &c. & l'arc correſpondant $= -\nu t - A't^3 - B't^5$, &c. Donc on aura $\nu\pi p + \nu t = \sigma\pi - \nu t - A't^3 - B't^5$, &c. ce qui conduira à des équations encore plus ſimples.

15. En général, ſi on a ſin. $\nu z = \lambda$ ſin. $z$, on aura les équations $\lambda u = \lambda t + \lambda A't^3 + \lambda B't^5 +$ &c. & l'arc correſpondant $= \lambda t + A't^3 + B't^5$, &c. Donc $\nu\pi p + \nu t = \sigma\pi + \lambda t + A't^3 + B't^5$, &c. D'où l'on tirera, comme ci-deſſus, & par une méthode ſemblable, la valeur de $t$, laquelle ſera évidemment toujours poſſible; puiſque quand $\nu$ eſt commenſurable, on peut toujours avoir au moins $t = 0$; & qu'on peut avoir $t$ auſſi petit qu'on voudra quand $\nu$ eſt incommenſurable.

16. Nous n'en dirons pas davantage ſur le problême propoſé, les méthodes expoſées ci-deſſus nous paroiſſant ſuffiſantes pour parvenir à la ſolution complette. Il ne faut pas oublier d'obſerver que pour arriver à cette ſolution, on doit non-ſeulement ſuppoſer $\nu z = \nu\pi p + \nu t$, mais $\nu z = \frac{\nu\pi r}{2} - \nu t$, $r$ étant un nombre impair; & qu'on doit faire auſſi l'angle dont le ſinus eſt $\lambda u$, égal à $\frac{\Sigma\pi}{2}$

$- \lambda u -$ &c. $\Sigma$ étant un nombre impair. En voilà assez sur ce sujet, que d'autres Mathématiciens pourront traiter plus à fond, s'ils le jugent à propos.

17. Je me contenterai de remarquer encore que si $\nu = \frac{p}{q}$, $p$ & $q$ étant des nombres entiers, & qu'on fasse sin. $\left(\frac{z}{q}\right) = u$, sin. $z = t$, sin. $\left(\frac{pz}{q}\right) = \sigma$, on aura, par les formules connues, une équation algébrique entre $u$ & $t$, & une autre entre $u$ & $\sigma$; & ces équations combinées avec l'équation donnée $t = \lambda \sigma$, serviront à résoudre le problême. Cette solution est plus directe que celle que nous avons donnée ou indiquée; mais celle-ci est moins compliquée & plus praticable, & elle a d'ailleurs l'avantage de pouvoir s'appliquer au cas où $\nu$ renferme des incommensurables, & dans lequel la solution algébrique se trouve en défaut.

18. On pourroit encore, pour la solution du problême dont il s'agit, construire d'abord la courbe dont l'abscisse seroit $z$, & l'ordonnée $\lambda$ sin. $z$; c'est-à-dire construire une trochoïde ordinaire dont les ordonnées sin. $z$ soient diminuées ou augmentées en raison de $\lambda$ à 1; & ensuite construire une autre courbe dont les abscisses étant $z$, les ordonnées soient sin. $\nu z$, ce qui revient à la construction d'une trochoïde allongée ou accourcie dans le rapport de $\nu$ à 1; les points d'intersection de ces courbes donneront les valeurs de $z$ telles que sin. $\nu z$ soit $= \lambda$ sin. $z$. Mais cette solution méchanique est encore moins simple & moins commode pour la pratique, que celle que nous avons proposée.

## §. III.

### *Sur les Tables de mortalité.*

Quelques Mathématiciens m'ont demandé la preuve de ce que j'ai avancé dans le Volume précédent ( vingt-ſeptiéme Mémoire, §. II, art. 37 ) au ſujet des différens réſultats ſur la probabilité de la vie, tirés des Tables de mortalité de Suede. Ces tables de mortalité ſe trouvent dans le Supplément de l'Ouvrage de M. Deparcieux, imprimé en 1760, page. 33. On voit d'abord aiſément que la moitié des années qui reſtent à écouler juſqu'à cent ans, à commencer par 0, c'eſt-à-dire par le moment de la naiſſance, eſt repréſentée par la ſeconde colomne verticale de la table ſuivante ; & la vie moyenne pour chaque âge, laquelle marque, ſuivant la plûpart des Auteurs, la probabilité de la durée de la vie, eſt exprimée par les nombres de la troiſiéme colomne. Pour avoir les nombres de la quatriéme colomne, qui marquent, ſuivant M. de Buffon, cette probabilité, il faut conſidérer que ſi à 0 années il exiſte 10000 perſonnes qui viennent de naître, il n'en exiſtera plus ſuivant les tables de Suede que la moitié ou 5000 entre 7 & 8 ans ; qu'à un an, il n'exiſte plus que 6939 perſonnes, dont la moitié eſt 3469, & qu'il n'y aura plus que cette moitié d'exiſtante entre 38 & 39 ans ; d'où il ſuit, en retranchant un an, que 37 à 38 ſera la probabilité de la vie, ſuivant M. de Buffon, pour les perſonnes âgées d'un an ; on trouvera de

même, par les tables, qu'à l'âge de deux ans il ne reſte que 6245, dont il n'exiſte plus que la moitié 3122 à l'âge d'environ 44 ans; d'où il s'enſuit, en retranchant 2 ans, que la probabilité de la vie ſera 42 ans, ſuivant M. de Buffon, pour les perſonnes âgées de 2 ans; de même à 3 ans il ne reſtera que 5757 perſonnes, dont il n'exiſtera que la moitié 2878 à l'âge d'environ 51 ans; d'où il s'enſuit que 51 — 3 ou 48 ſera la probabilité de la vie, ſuivant M. de Buffon, pour les perſonnes âgées de 3 ans. Par ce moyen, on formera la quatriéme colomne de la table ſuivante. Or il eſt aiſé de voir que les nombres de la ſeconde colomne ſont plus grands que ceux de la troiſiéme, & que ceux de la troiſiéme ſont auſſi plus petits que ceux de la quatriéme, dans les années de la vie qui s'étendent juſqu'à 40 ans, excepté dans la premiere année. On trouve un réſultat à peu près ſemblable par la table de l'ordre de mortalité ſuivant les recherches de M. le Curé de ***, que M. Deparcieux a jointe à la table de Suede.

On peut encore confirmer cette remarque par la derniere colomne de la table, qui marque le nombre des morts de chaque année, ſavoir 3061 dans l'intervalle de la naiſſance à un an, 694 dans l'intervalle d'un an à deux ans, & ainſi de ſuite. Il eſt aiſé de voir que ce nombre, au lieu d'être décroiſſant comme il devroit l'être d'année en année, ſi la courbe de mortalité étoit toute convexe vers ſon axe, croît au contraire depuis 15 ans juſqu'à 30, & depuis 45 juſqu'à 70; d'où il réſulte évidemment

que la courbe de mortalité n'eſt ni toute convexe ni toute concave vers ſon axe, mais qu'elle a des points d'inflexion & des ſerpentemens.

| Ages. | | Ans. | Mois. | Ans. | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 50 | 27 | | 7 | |
| 1 | 49 ½ | 37 | 1 | 39 | 3061 |
| 2 | 49 | 40 | 1 | 42 | 694 |
| 3 | 48 ½ | 42 | 5 | 48 | 488 |
| 4 | 48 | 44 | 0 | 49 | 335 |
| 5 | 47 ½ | 44 | 11 | 51 | 226 |
| 6 | 47 | 45 | 3 | 50 | 438 |
| 10 | 45 | 44 | 11 | 46 | 224 |
| 15 | 42 ½ | 42 | 0 | 42 | 187 |
| 20 | 40 | 38 | 8 | 40 | 218 |
| 25 | 37 ½ | 35 | 0 | 36 | 223 |
| 30 | 35 | 32 | 0 | 33 | 261 |
| 35 | 32 ½ | 29 | 2 | 29 | 228 |
| 40 | 30 | 26 | 0 | 25 | 279 |
| 45 | 27 ½ | 23 | 2 | 21 | 246 |
| 50 | 25 | 20 | 0 | 18 | 287 |
| 55 | 22 ½ | 17 | 0 | 14 ½ | 299 |
| 60 | 20 | 14 | 0 | 11 ½ | 380 |
| 65 | 17 ½ | 11 | 3 | 9 | 415 |
| 70 | 15 | 9 | 0 | 7 | 491 |
| 75 | 12 ½ | 7 | 3 | 6 | 399 |
| 80 | 10 | 6 | | 5 | 299 |
| 85 | 7 ½ | 5 | | | 191 |
| 90 | 5 | 5 | | | 70 |
| 95 | 2 ½ | | | | 29 |
| 100 | 0 | | | | |

Il ſe pourroit au reſte que d'autres tables de mortalité donnaſſent des réſultats différens ; je ne parle ici que

de celle qui a été dreſſée en Suede, & qui paroît avoir été faite avec ſoin; d'autres tables de mortalité donnent des réſultats très-différens pour la vie moyenne; & il en eſt, parmi celles même que M. Deparcieux rapporte, qui donnent juſqu'à 12 ans de différence entre les réſultats des vies moyennes. Voyez la table XIII de ſon Ouvrage. On voit auſſi dans cette même table, que ſelon les Regiſtres de Londres, la moitié des enfans nés enſemble eſt morte au commencement de la troiſiéme année; ſelon les tables de M. Halley (en ſuppoſant 1300 enfans nés à-la-fois) au commencement de la onziéme année; & ſelon les tables de Hollande, au commencement de la trente-uniéme année; différence conſidérable, & qui prouve, ou combien les tables de mortalité différent ſelon les différens pays, ou peut-être combien ces tables ſont imparfaites, & ont beſoin d'être dreſſées avec plus de ſoin & de préciſion qu'elles ne l'ont été juſqu'ici.

## §. IV.

### *Sur quelques différentielles réductibles à des arcs de ſections coniques.*

1. J'ai démontré dans les Mémoires de Berlin de 1748, pag. 268 & ſuiv. §. XIX & XX, que toute quantité de cette forme $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$; ($q$ & $s$ étant des nombres entiers poſitifs) étoit intégrable par des arcs de ſections coniques, & qu'on pouvoit

même intégrer, par le moyen de ces arcs, toutes les quantités de cette forme $\frac{(lx+n)^p dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$; pourvu que $q+s-p-2$ fût = ou plus grand que zero. La démonstration assez singuliere que j'ai donnée de ces deux propositions dans l'endroit cité, & qui est fondée sur des transformations assez compliquées, a cela de particulier, qu'elle laisse en doute si dans les transformations il se trouve des quantités de cette forme $\frac{du}{u^n\sqrt{(P+Qu+Su^2+Ru^3)}}$; & comme l'intégration de ces dernieres quantités dépend de celle de $\frac{du}{u\sqrt{(P+Qu+Su^2+Ru^3)}}$, ainsi que je l'ai fait voir dans le même Mémoire, il restoit donc encore incertain si les quantités $\frac{du}{u\sqrt{(P+Qu+Su^2+Ru^3)}}$ dépendoient ou non des arcs de sections coniques.

2. Ayant eu depuis quelque temps occasion de repenser à cette matiere, j'ai trouvé que les quantités de cette forme $\frac{du}{u^n\sqrt{(P+Qu+Su^2+Ru^3)}}$ ne peuvent jamais se rencontrer dans les transformées dont il s'agit, & c'est ce que je vais démontrer ici; d'où il résultera qu'on n'a point encore de méthode connue pour réduire $\frac{du}{u^n\sqrt{(P+Qu+Su^2+Ru^3)}}$ à la rectification des sections coniques.

3. Soit donc d'abord à intégrer la différentielle

telle $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$, que je mets sous cette forme $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}} \times \left(\frac{e+fx+gxx}{a+bx+cxx}\right)^{\frac{s}{2}}}$ $= \frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}} \times (\varphi + \frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx})^{\frac{s}{2}}}$. En supposant $\frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx} = \frac{1}{z}$, (Mémoires de Berlin 1748, page 268) on aura $x = \frac{\gamma z-b}{2c} \pm \sqrt{\left(\frac{(\gamma z-b)^2}{4cc} + \frac{\delta z-a}{c}\right)}$; donc nommant $R$ le radical, on aura $x = \frac{\gamma z-b}{2c} \pm R$, & $\gamma xz + \delta z$ ou $a+bx+cxx = z\left(\frac{\gamma\gamma z-b\gamma}{2c} + \delta \pm \gamma R\right)$; donc $(a+bx+cxx)^{\frac{q+s}{2}} = z^{\frac{q+s}{2}}\left(\frac{\gamma\gamma z-b\gamma}{2c} + \delta \pm \gamma R\right)^{\frac{q+s}{2}}$; donc multipliant le haut & le bas par $\left(\frac{\gamma\gamma z-b\gamma}{2c} + \delta \mp \gamma R\right)^{\frac{q+s}{2}}$, on aura au dénominateur $z^{\frac{q+s}{2}} \times \left(-\frac{\delta b\gamma}{c} + \delta\delta + \frac{\gamma\gamma a}{c}\right)^{\frac{q+s}{2}}$; donc, en négligeant le coefficient constant, le dénominateur, dans les termes les plus composés, sera $z^{\frac{q+s}{2}}(\varphi + \frac{1}{z})^{\frac{s}{2}} \sqrt{\left(\frac{\gamma\gamma zz - 2b\gamma z + 4c\delta z - 4ac + bb}{4cc}\right)}$;

qu'on peut rendre encore plus général en mettant $\pm$ devant les termes où $z$ se trouve avec une dimension impaire, ce qui suppose $\frac{\gamma x+\delta}{a+bx+cxx} = \pm\frac{1}{z}$, & donne pour dénominateur $z^{\frac{q+s}{2}} \times \left(\varphi \pm \frac{1}{z}\right)^{\frac{s}{2}} \times \sqrt{\left(\frac{\gamma\gamma zz \mp 2b\gamma z \pm 4c\delta z - 4ac + bb}{4cc}\right)}$; cela posé, & faisant dans la transformée $\frac{1}{z} = \frac{u}{m}$, il est aisé de voir que l'intégration des termes les plus composés, dépendra de quantités de cette forme, $\frac{du}{u^r\left(\varphi + \frac{u}{m}\right)^{\frac{s}{2}}\sqrt{(k+lu+nu^2)}}$ ($r$ étant un nombre entier positif), c'est-à-dire, $\frac{du}{u^r(A+Bu)^{\frac{s-1}{2}}\sqrt{(Q+Pu+Ru+Su^3)}}$, $\frac{s-1}{2}$ étant évidemment un nombre entier positif. Or $\frac{du}{u^r(A+Bu)^{\frac{s-1}{2}}}$ se réduit à une suite de quantités de cette forme $\frac{\alpha du}{u^r} + \frac{\beta du}{u^{r-1}} + \frac{\gamma du}{u^{r-2}} \ldots + \frac{\varkappa du}{u} + \frac{\epsilon du}{(A+Bu)^\lambda} + \frac{\zeta du}{(A+Bu)^{\lambda-1}} \ldots + \frac{\mu du}{A+Bu}$; donc l'intégration se réduira à celle de quantités de la forme suivante $\frac{du}{u^r\sqrt{(Q+Pu+Ru+Su^3)}}$, & $\frac{du}{(A+Bu)^\sigma\sqrt{(Q+Pu+Ru+Su^3)}}$ ou $\frac{du}{(A+Bu)^{\frac{\sigma+1}{2}}\sqrt{(k+lu+mu^2)}}$, dont la seconde

s'intégre par la rectification des ſections coniques, & la premiere dépend de $\frac{du}{uV(Q+Pu+Ru^2+Su^3)} =$ $\frac{du}{u\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}V(k+lu+mu^2)}$; ce qui confirme pleinement ce qui a été dit page 268 des Mémoires de Berlin de 1748, que la quantité différentielle propoſée $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{s}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$; dépend, ou de la rectification des ſections coniques ſeulement, ou de cette rectification, & de plus de l'intégration de la différentielle $\frac{du}{uV(Q+Pu+Ru^2+Su^3)}$, ſi dans la transformée le coefficient de cette derniere différentielle n'eſt pas $= 0$.

4. En ſuppoſant (pag. 270 des Mémoires de Berlin 1748) $\frac{\varphi+\frac{u}{m}}{\pm A+Bu-uu} = \frac{1}{B'\zeta\pm\frac{A}{\varphi}}$, on aura $u^2 - Bu \pm \frac{Au}{\varphi m} + \frac{B'\zeta u}{m} = -\varphi B'\zeta$; donc $u = \frac{B}{2} \mp \frac{A}{2\varphi m} - \frac{B'\zeta}{2m} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{B}{2}\mp\frac{A}{2\varphi m}-\frac{B'\zeta}{2m}\right)^2 - \varphi B'\zeta\right]}$; où l'on voit que la quantité qui eſt ſous le radical peut ſe réduire à $V(\alpha+\beta\zeta+\gamma\zeta\zeta)$, $\alpha$ & $\gamma$ étant poſitifs; d'où il eſt aiſé de tirer la concluſion énoncée à la page 270 déja citée, paragraphe III, ſavoir que la différentielle $\frac{du}{u\sqrt{(\varphi+\frac{u}{m})}\times V(\pm A+Bu-uu)}$, dans laquelle $uu$ a le ſigne

$-$, dépend de la rectification des sections coniques, & de la différentielle $\frac{dz}{z\sqrt{(B'z \pm \frac{A}{r})} \times \sqrt{(\alpha + \zeta z + zz)}}$, $\alpha$ étant une quantité positive, & $zz$ ayant le signe $+$.

5. Soit donc $\frac{du}{u(\sqrt{\varphi} + ku).\sqrt{(g + nu + u^2)}}$ une différentielle à intégrer, $g$ étant positif; on aura, suivant les calculs de la p. 268 des Mém. cités, $k = \frac{1}{m}$, $\gamma = \frac{\gamma^2 m^2}{bb - 4ac} = \frac{\gamma^2}{k^2(bb - 4ac)}$; $n = \frac{4c\delta m - 2b\gamma m}{bb - 4ac} = \frac{4c\delta - 2b\gamma}{k(bb - 4ac)}$; d'où l'on tire $\gamma = \pm k\sqrt{(bb - 4ac)}$; $\delta = \frac{nk(bb - 4ac) + 2b\gamma}{4c}$. Ainsi, en supposant que le coefficient de $\frac{du}{u\sqrt{(\varphi + \frac{u}{m})}} \times \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\gamma^2 m^2}{b^2 - 4ac} + \frac{4cmu - 2b\gamma mu}{bb - 4ac} + u^2\right)}}$ ne soit pas nul, l'intégration se réduit à celle d'une quantité de la forme $\frac{dx}{(a + bx + cxx)^{\frac{r}{s}} \times [\varphi(a + bx + cxx) + \gamma x + \delta]^{\frac{s}{2}}}$, $r$ ou $s$ étant $> 1$; car si $r$ & $s$ sont $= 1$, on a vû (Mémoires de Berlin 1746, page 223) que le coefficient de $\frac{du}{u\sqrt{(P + Qu + Ru^2 + Su^3)}}$ dans la transformée étoit $= 0$.

6. Voilà où nous en étions restés dans les Mémoires de Berlin. Il s'agit à présent, comme nous l'avons annoncé ci-dessus (art. 2) de démontrer d'abord qu'il ne se trouvera point de quantités de la forme

$\frac{du}{u^m V(P+Qu+Su^2+Ru^3)}$ dans les transformées des différentielles de cette forme $\frac{dx}{(a+bx+bxx)^{\frac{q}{2}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$.

Pour en venir à bout, nous commencerons par obſerver que l'équation $x = \frac{\gamma z - b}{2c} \pm V\left(\frac{(\gamma z-b)^2}{4cc} + \frac{\delta z - a}{c}\right)$ donne $dx = \frac{\gamma dz}{2c} + \left(\frac{(\gamma z-b).\gamma dz}{4cc} + \frac{\delta dz}{2c}\right) \times \frac{\pm 1}{V\left(\frac{(\gamma z-b)^2}{4cc} + \frac{\delta z-a}{c}\right)} = \frac{dz}{\pm R \times 2c} \times \left(\frac{\gamma\gamma z - b\gamma}{2c} + \delta \pm \gamma R\right)$, ou encore $\frac{dz}{\pm R \times 2c} \times (\gamma x + \delta)$. Cela poſé, dans la transformée de l'art. 3 ci-deſſus, il eſt aiſé de voir que le dénominateur ſe réduit à $z^{\frac{q}{2}}\left(\frac{\gamma\gamma z - bz}{2c} + \delta \pm \gamma R\right)^{\frac{q+s}{2}} (\varphi z \pm 1)^{\frac{s}{2}}$; or ſi $\frac{q+s}{2}$ eſt $= -t$, $t$ étant un nombre entier poſitif, il n'y aura point de préparation à faire en multipliant haut & bas par $\left(\frac{\gamma\gamma z - bz}{2c} + \delta \mp \gamma R\right)^{\frac{q+s}{2}}$, parce que $\left(\frac{\gamma\gamma z - bz}{2c} + \delta \pm \gamma R\right)^{-t}$ ſera alors au dénominateur; ou, ce qui revient au même, $\left(\frac{\gamma\gamma z - bz}{2c} + \delta \pm \gamma R\right)^{t}$ au numérateur. En ce cas $z^{\frac{q}{2}} = z^{\frac{-2t-s}{2}}$; de plus, la plus haute puiſſance de $z$, dans le numérateur, eſt $z^t$, & la plus baſſe $z^0$; ainſi, les termes de la premiere eſpéce

étant multipliés par la différence de $x$, laquelle eſt $= \frac{d\zeta}{\pm R \times 2c} \times \left( \frac{\gamma\gamma\zeta - b\gamma}{2c} + \delta \pm \gamma R \right)$, donneront différens termes de la forme $\frac{\zeta^{t+1-\omega} d\zeta}{\zeta^{\frac{-2t-s}{2}} (\phi\zeta \pm 1)^{\frac{s}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{(\omega + \nu\zeta + \mu\zeta\zeta)}}$, $\omega$ étant un entier poſitif ou zero, & $t+1-\omega$ étant poſitif ou zero ; leſquels termes, en ſuppoſant $\zeta = u^{-1}$, donneront, après les réductions, des quantités de cette forme $\frac{u^{-2t-2+\omega} du}{(\gamma u + \varrho)^{\frac{s}{2}} \sqrt{(\alpha + \beta u + \delta u^2)}}$.

Or $t+1-\omega = k$, $k$ étant poſitif ou zero ; donc $-2t-2+\omega = -2k-\omega$ ; donc l'expoſant de $u$ n'eſt jamais poſitif dans cette hypothèſe de $\frac{q+s}{2} = -t$ ; donc lorſque $\frac{q+s}{2} = -t$, la différentielle ne dépend pas ſeulement de la rectification des ſections coniques, mais encore de $\frac{du}{u(\gamma u + \varrho)^{\frac{s}{2}} \sqrt{(\alpha + \beta u + \delta u^2)}}$ ;

7. Si $\frac{q+s}{2} = +t$, alors (ayant multiplié par la valeur de $dx$) l'expoſant de $\frac{\gamma\gamma\zeta - b\zeta}{2c} + \delta \pm \gamma R$ (qui ſera pour lors au dénominateur) deviendra $t-1$ ; il faudra donc multiplier haut & bas par $\left( \frac{\gamma\gamma\zeta - b\zeta}{2c} + \delta \mp \gamma R \right)^{t-1}$, ce qui donnera des termes de cette forme

$\frac{z^{t-1-\omega}dz}{z^{\frac{2t-s}{2}}(\varphi z+1)^{\frac{s}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{(\varpi+\nu z+\mu zz)}}$, $\omega$ étant zero, ou un nombre entier positif, & $t-1-\omega$ n'étant jamais $<0$; or cette différentielle (Mém. de Berlin 1748) en faisant $z=u^{-1}$, donne une quantité de cette forme à chaque terme $\frac{u^{\omega}du}{(\varphi+u)^{\frac{s}{2}}\sqrt{(\varpi+\lambda u+\sigma u^2)}}$, qui se réduit à la rectification des sections coniques.

8. Il est donc évident que dans la transformation de la différentielle $\frac{dx}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$ ($q$ & $s$ étant des nombres entiers impairs) il ne se rencontre point de quantités de cette forme $\frac{dx}{u^m\sqrt{(P+Qu+Su^2+Ru^3)}}$, tant que $\frac{q+s}{2}$ est un nombre entier positif; & qu'ainsi ces différentielles se rapportent à des arcs de sections coniques; ce que je n'avois démontré dans les Mémoires de Berlin de 1748, que pour le cas où $q$ & $s$ étoient supposés positifs l'un & l'autre.

9. Voyons présentement ce qui doit arriver dans la transformation des quantités de la forme suivante $\frac{(lx+n)^p}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$, $p$ étant supposé un nombre entier positif. Et d'abord nous remarquerons que $lx+n=\frac{l}{\gamma}(\gamma x+\delta)+n-\frac{\lambda\delta}{\gamma}$; ainsi $(lx+n)^p$ ($p$ étant supposé positif) est égal à une suite de

termes de cette forme $A(\gamma x + \delta)^r$, $r$ étant positif $=$ ou $< p$, ou $= 0$. Or dans le cas où $\frac{q+s}{2} = +t$, on aura au dénominateur de la transformée $(\gamma x + \delta)^t$, & par conséquent, en réduisant, on aura une suite de termes qui auront $(\gamma x + \delta)^{t-r}$ au dénominateur, $r$ étant positif & $=$ ou $< p$, ou étant zero ; donc, substituant pour $dx$ sa valeur, l'exposant $t - r$ deviendra $t - r - 1$ ; multipliant haut & bas chacun de ces termes par $\left(\frac{\gamma\gamma\xi - b\xi}{2c} + \delta \mp \gamma R\right)^{t-r-1}$, on aura des termes de cette forme $\frac{\xi^{t-r-1}\, d\xi}{\xi^{\frac{2t-s}{2}} (\phi\xi + 1)^{\frac{s}{2}} \sqrt{(m + n\xi + r\xi\xi)}}$, où il faut bien remarquer que $t - r - 1$ est supposé zero ou positif ; donc faisant $\xi = u^{-1}$, on aura une transformée de cette forme $\frac{u^r\, du}{(\phi + u)^{\frac{s}{2}} \sqrt{(\varpi + \lambda u + \sigma u^2)}}$, qui est réductible aux arcs des sections coniques, tant qu'on suppose $t - r - 1 = 0$ ou positif, c'est-à-dire $q + s - 2r - 2 =$ ou $> 0$. Mais si $t - r - 1$ étoit négatif, alors on auroit au numérateur $(\gamma x + \delta)^{-t+r+1}$ ; & la transformée, en faisant $x = u^{-1}$ sans aucune autre opération préalable, contiendroit $u^{+2t-r-2}$ au numérateur ; & comme cette quantité a un exposant positif, si $2t$ ou $q + s$ est $=$ ou $> r + 2$, il s'ensuit qu'on peut alors réduire la proposée à des arcs de sections coniques.

10. Si $\frac{q+s}{2} = -t$, on aura, au lieu de $(\gamma x + \delta)^{t-r-1}$ au dénominateur, la quantité $(\gamma x + \delta)^{-t-r-1}$, c'est-à-dire

c'eſt-à-dire $(\gamma x + \delta)^{t+r+1}$ au numérateur ; faiſant donc $z = u^{-1}$, on aura pour expoſant de $u$ dans le numérateur de la réduite, $-2t-r-2$, qui doit être poſitif ; c'eſt-à-dire, que $q+s-r-2$ doit être $>$ ou $= 0$.

11. Donc en général, ſi $q+s$ eſt $=$ ou $> r+2$, $r$ étant poſitif ou zero, & $=$ ou $< p$, la différentielle propoſée $\frac{(lx+n)^p}{(a+bx+cxx)^{\frac{q}{2}}(e+fx+gxx)^{\frac{s}{2}}}$ ſe réduira à des arcs de ſections coniques. Dans les Mémoires de Berlin de 1748, page 271, où l'on eſt arrivé à la même concluſion, on a ſuppoſé $q$ & $s$ poſitifs ; on voit ici que la propoſition eſt encore vraie, pourvu que $q+s$ ſoit poſitif.

12. A l'occaſion de ces nouvelles différentielles réductibles à des arcs de ſections coniques, je remarquerai une eſpéce d'inconvénient qui ſe rencontre en certains cas dans cette réduction. Lorſqu'il s'agit, par exemple, d'intégrer $\frac{dz\sqrt{z}}{\sqrt{(bb \pm fz - zz)}}$, on fait (comme je l'ai preſcrit dans les Mémoires de Berlin 1746, page 203) $z = \frac{bb}{u}$, & l'intégrale ſe trouve $-\frac{2\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}{\sqrt{u}} + \int \frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}$. Or lorſque $z = 0$, $u$ eſt infinie ; donc, lorſque $z$ eſt une quantité finie, cette intégrale eſt la différence (finie) d'un arc d'hyperbole infini, & d'une ligne droite infinie. Ainſi, cette maniere d'intégrer ou de conſtruire la différentielle propoſée, a l'inconvé-

nient de repréſenter une intégrale finie par la différence de deux quantités infinies.

13. Pour réſoudre cette difficulté, il faut d'abord tâcher de transformer $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu\pm fu-bb)}}$ en une autre différentielle de la même forme $\frac{dy\sqrt{y}}{\sqrt{(yy\pm fy-bb)}}$, à l'intégration de laquelle elle ſe réduiſe, & dans laquelle $y$ ne ſoit que finie quand $u$ eſt infinie.

14. Soit ſuppoſé pour cet effet $u=\frac{qy-q}{y-q}$, on aura $y=\frac{qu-q}{u-q}$, & par conſéquent $y$ finie & $=q$ lorſque $u$ eſt infinie. Enſuite ſoit priſe la différence de $\sqrt{(1+u)}\times\sqrt{(1+y)}$, on aura $\frac{1}{2}\left(\frac{du}{\sqrt{(1+u)}}\cdot\sqrt{(1+y)}+\frac{dy}{\sqrt{(1+y)}}\times\sqrt{(1+u)}\right)=$ (à cauſe de $1+y=\frac{qu+u}{u-q}$, & $1+u=\frac{qy+y}{y-q}$) $\frac{1}{2}\frac{du\sqrt{u}.\sqrt{(q+1)}}{\sqrt{(uu-qu+u-q)}}+\frac{1}{2}\frac{dy\sqrt{(q+1)}}{\sqrt{(yy-qy+y-q)}}$; donc en faiſant $-q+1=\pm f$, & $q=bb$, on aura $\frac{du\sqrt{u}}{\sqrt{(uu\pm fu-bb)}}=\frac{2d\sqrt{(1+u)}.\sqrt{(1+y)}}{\sqrt{(q+1)}}-\frac{dy}{\sqrt{(yy\pm fy-bb)}}$; donc mettant pour $y$ ſa valeur en $u$, l'intégrale del'art. 12 ſera $-\frac{2\sqrt{(uu\pm fu-bb)}}{\sqrt{u}}+\frac{2\sqrt{(1+u)}.\sqrt{((q+1).u-2q)}}{\sqrt{(u-q)}.\sqrt{(1+q)}}-\frac{2\int dy\sqrt{y}}{\sqrt{(yy\pm fy-bb)}}$, plus ou moins une conſtante $C_2$ qu'on ajoutera s'il eſt néceſſaire; & comme $\sqrt{(uu\pm fu-bb)}=\sqrt{(1+u)}.\sqrt{(u-q)}$, il eſt aiſé de voir que par la réduction en ſerie, les quantités in-

finies disparoîtront des premiers termes du binome $-\frac{2\sqrt{(uu \pm fu - bb)}}{\sqrt{u}} - 2\sqrt{(1+u)} \times \frac{\sqrt{((q+1).u-2q)}}{\sqrt{(u-q)}}$.

Car lorsque $u$ est infinie, $\sqrt{(Auu+Bu+C)}$ devient $\pm\sqrt{A}+\frac{B}{2\sqrt{A}}$, &c. & $\sqrt{(Pu+N)}$ devient $\sqrt{u}\sqrt{P}+\frac{N}{2\sqrt{P}.\sqrt{u}}$, &c. en négligeant les autres termes. Ainsi, la difficulté qui restoit dans le calcul est entiérement levée, & n'exige pas que nous entrions dans un plus grand détail. On voit de plus qu'en supposant $1=a$, on aura $qaa=bb$, & $a-qa=\pm f$; donc $q=\frac{bb}{aa}$; ou ce qui est la même chose ici, $1 \mp \frac{f}{a}$.

15. En général, soit $u=\frac{ay+b}{cy+e}$, on aura $y=-\frac{eu-b}{cu-a}$; donc $e$ doit être $=-a$, si l'on veut que les deux valeurs de $y$ & de $u$ soient de même forme. Maintenant différentions $2\sqrt{(f+hu)}.\sqrt{(l+my)}$, nous aurons $\frac{h\,du}{\sqrt{(f+hu)}} \times \frac{1}{\sqrt{(cu-a)}} \times \sqrt{(lcu-la-meu+bm)} + \frac{m\,dy}{\sqrt{(l+my)}} \times \frac{1}{\sqrt{(cy+e)}} \times \sqrt{(fcy+fe+hay+hb)}$. Or en premier lieu, pour que $fcu-ahu-fa+hcuu$ soit de la même forme que $lcy+mey+el+mcyy$, il faut que $\frac{fc-ah}{hc}=\frac{lc+me}{mc}$, & $\frac{el}{mc}=\frac{-fa}{hc}$, c'est-à-dire (à cause de $x=+a$) $\frac{l}{m}$

$= -\frac{f}{h}$ ; de plus, soit $\frac{l}{m} = \frac{a}{b}$, il est évident qu'on aura dans les radicaux supérieurs $-la + bm = 0$ ; $fe + hb = 0$ ; & les deux différentielles seront de la forme $\frac{K dy \sqrt{y}}{\sqrt{(Pyy + Qy + R)}}$, & $\frac{N du \sqrt{u}}{\sqrt{(Puu + Qu + R)}}$. Il faut encore, pour la réduction à la rectification de l'hyperbole, que les radicaux $\sqrt{(f + hu)} . \sqrt{(cu - a)}$ ; se réduisent à cette forme $\sqrt{\left(u + \frac{f}{h}\right)} . \sqrt{\left(u - \frac{a}{c}\right)}$ ; $-\frac{f}{h}$ & $\frac{a}{c}$ étant positifs, ou $-\frac{f}{h}$ négatif, & $\frac{-a}{c}$ positif ; il en est de même de $\sqrt{(l + my)} . \sqrt{(cy + e)}$ ; il faut que $\frac{l}{m}$ soit positif & $\frac{e}{c}$ négatif, ou réciproquement.

16. La méthode que nous venons d'employer pour réduire la rectification d'un arc hyperbolique à celle d'un autre, est absolument analogue à celle qui est aujourd'hui connue des Géometres, par les savantes recherches de MM. Fagnani & Euler. On sait en effet que dans la différentielle de l'arc hyperbolique (savoir $\frac{dx \sqrt{((q+1).xx - aa)}}{\sqrt{(xx - aa)}}$, qui peut aisément se réduire à $\frac{dx \sqrt{(xx - k)}}{\sqrt{(xx - 1)}}$, $k$ étant $< 1$) si on fait $zz = \frac{xx - k}{xx - 1}$, on aura de même $xx = \frac{zz - k}{zz - 1}$ ; d'où les savans Géometres que nous venons de citer, ont tiré des méthodes ingénieuses pour réduire la rectification d'un arc d'hy-

perbole à un autre arc de la même hyperbole. Nous remarquerons à cette occaſion, que ſi on fait en général $zz = \frac{px^2 - q}{rx^2 - s}$, il faut, pour la bonté de la méthode, que quand $rx^2 - s = 0$, $zz$ ne ſoit pas négatif; donc puiſque (*hyp.*) $x^2 = \frac{s}{r}$, & que $x^2$ doit être $> \frac{q}{p}$, on aura $\frac{ps}{r} > q$; il faut de plus que quand $x = \infty$, $zz$ (s'il ſe rapporte à la même hyperbole) ne ſoit pas plus petit que $\frac{s}{r}$, qui eſt la plus petite valeur de $x^2$, donc $\frac{p}{r}$ (valeur de $zz$ quand $x = \infty$) doit être $=$ ou $> \frac{s}{r}$; donc $p > s$. Maintenant, $zz = \frac{px^2 - q}{rx^2 - s}$ donne $x^2 = \frac{szz - q}{rz^2 - p}$; donc la différence de $xz$ ou $x\,dz + z\,dx$ ſera $dz\,\frac{\sqrt{s}}{\sqrt{r}} \times \frac{\sqrt{(zz - \frac{q}{s})}}{\sqrt{(zz - \frac{p}{r})}} + dx\,\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{r}} \times \frac{\sqrt{(xx - \frac{q}{p})}}{\sqrt{(xx - \frac{s}{r})}}$; donc on réduira aiſément par ce moyen, à la rectification réciproque l'un de l'autre, les arcs de deux hyperboles. L'une d'elles a pour demi-grand axe $\sqrt{\frac{p}{r}}$, que j'appelle $a$, & pour parametre une quantité $p'$ telle que $\frac{2a}{2a + p'} \times \frac{p}{r} = \frac{q}{s}$; d'où l'on voit que $\frac{q}{s} < \frac{p}{r}$, comme cela doit être en

effet, ainſi qu'on vient de le remarquer. L'autre hyperbole aura pour demi-grand axe, $\sqrt{\frac{s}{r}} = a'$, & pour parametre une quantité $q'$ telle que $\frac{s}{r} \times \frac{2a'}{2a'+q'} = \frac{q}{p}$; d'où l'on tire $\frac{s}{r} > \frac{q}{p}$; ce qui s'accorde avec la condition précédente. On remarquera encore que $xx$ doit être toujours $> \frac{s}{r}$, & $zz >$ que $\frac{p}{r}$; or on a $zz = \frac{pxx-q}{rxx-s}$; donc ſuppoſant $\lambda =$ ou $> 1$, il eſt néceſſaire que $\frac{\frac{p\lambda s}{r}-q}{\frac{\lambda r s}{r}-s}$ ſoit $> \frac{p}{r}$, ou $ps > qr$; ce qui a lieu en effet, comme on vient de le voir.

17. En terminant ici ces recherches ſur les intégrales qui ſe rapportent à la rectification des ſections coniques, je donnerai une méthode pour rectifier une ellipſe ou hyperbole fort allongée. Soit $\frac{dx\sqrt{(aa+\frac{p-2a}{2a}xx)}}{\sqrt{(aa-xx)}}$ l'élément d'une ellipſe; ſi cette ellipſe eſt fort allongée, on ne peut pas réduire $\sqrt{(aa+\frac{p-2a}{2a}xx)}$ en ſerie lorſque $x$ ne différe que peu de $a$, parce qu'alors la ſerie ſeroit trop peu convergente; mais on peut conſidérer que cette ellipſe, vers ſon ſommet, différe peu d'une parabole, enſorte que faiſant $x = a - z$, on aura l'élément de l'ellipſe $= \frac{dz\sqrt{(2az-zz+\frac{pa}{2}-pz+\frac{pzz}{2a})}}{\sqrt{(2az-zz)}}$

$$= \frac{dz\sqrt{\left(2az+\frac{pa}{2}\right)}}{\sqrt{(2az)}\sqrt{\left(1-\frac{z}{2a}\right)}} \times \sqrt{\left(1-\frac{2apz+2azz-pzz}{2a\left(2az+\frac{pa}{2}\right)}\right)};$$

or comme $\frac{z}{2a}$ eſt fort petit, on peut négliger $\frac{pzz}{2a}$ par rapport à $pz$, ce qui donnera l'élément cherché = à très-peu près $\frac{dz\sqrt{\left(2az+\frac{pa}{2}\right)}}{\sqrt{(2az)}} \times \left(1+\frac{z}{4a}\right) \times 1 - \frac{zz+pz}{2\left(2az+\frac{pa}{2}\right)}$. Et ſi l'on veut même faire le calcul exactement, on verra, en réduiſant en ſerie les radicaux $\sqrt{\left(1-\frac{z}{2a}\right)}$, & $\sqrt{\left(1-\frac{2apz+2azz-pzz}{2a\left(2az+\frac{pa}{2}\right)}\right)}$, que tant que $z$ peut être regardé comme petit par rapport à $a$, l'intégration dépendra toujours d'une quantité de cette forme $z^{\frac{n}{2}}\,dz\,(Az+B)^{\frac{m}{2}}$, $n$ & $m$ étant des nombres impairs poſitifs ou négatifs. Or on ſait que ces ſortes de quantités ſe réduiſent aiſément en fractions rationnelles. Si on avoit à rectifier une hyperbole très-allongée, on s'y prendroit d'une maniere ſemblable, cette hyperbole vers ſon ſommet étant peu différente d'une parabole.

*Fin du trente-ſixiéme Mémoire & de la premiere Partie.*

# OPUSCULES

# OPUSCULES

## *MATHÉMATIQUES.*

### SECONDE PARTIE.

# OPUSCULES
## *MATHÉMATIQUES.*

### SECONDE PARTIE,

*Contenant principalement de nouvelles Recherches ſur différens points importans d'Aſtronomie Phyſique.*

## XXXVII^ME MÉMOIRE.

*Remarques ſur une difficulté ſinguliere qui ſe rencontre dans la ſolution du problême de la préceſſion des équinoxes ; avec quelques autres réflexions ſur ce problême.*

1. LE fameux problême de la préceſſion des équinoxes, dont j'ai donné le premier la ſolution en 1749, a été depuis bien ou mal réſolu par beaucoup d'autres Géometres. M. de la Lande, dans un vaſte Recueil qu'il a pu-

blié ſous le titre d'*Aſtronomie*, n'ayant pas diſtingué celles de ces ſolutions qui ſont défectueuſes d'avec celles qui ne le ſont pas, s'eſt contenté de les indiquer toutes *in globo*, & de dire qu'elles *ne ſont pas d'accord*. J'aurois lieu d'être étonné de peu de juſtice que l'Auteur a rendu à mes Recherches ſur cette matiere, ſi je ne voyois, par le choix & le commentaire qu'il a fait de la ſolution très-fautive de M. Simpſon, qu'il n'a point connu les difficultés du problême. D'ailleurs, des Géometres, vraiment capables d'apprécier mon travail, ont abondamment ſuppléé à tout autre témoignage, en déclarant que j'ai ouvert le premier la route pour réſoudre ce genre de queſtions (*a*). Cependant, ni moi, ni aucun de ceux qui depuis moi ont traité ce problême, n'avons fait mention juſqu'ici d'une difficulté qu'il renferme, qui paroît avoir échappé à tous les Mathématiciens, & qui mérite d'être examinée. J'en avois déja parlé en peu de mots dans les Mémoires de la Société Royale des Sciences de Turin, Tome III, page 388; mais j'ai cru que pour l'utilité des Mathématiciens, il ſeroit bon de la développer ici, d'autant que j'y joindrai pluſieurs autres remarques utiles & curieuſes.

2. Cette difficulté conſiſte en ceci; $d\iota$ étant le mouvement inſtantané de l'axe de la terre projetté ſur l'écliptique, & $d\pi$ le mouvement de ce même axe perpendiculairement à l'écliptique, on trouve par notre ſolution, & par toutes celles qui ſont exactes, une formule

(*a*) Voy. les Mémoires de l'Académie des Sciences de Pruſſe de 1750, p. 413.

pour la valeur de $di$, & une autre pour la valeur de $d\pi$, d'où l'on tire les valeurs, ou plutôt la loi de la préceſſion & de la nutation, telle que les obſervations la donnent. Cependant ces valeurs de $di$ & de $d\pi$, quoiqu'exactes, au moins à peu près, ont un inconvénient dans l'expreſſion ſous laquelle elles ſe préſentent; c'eſt que quand $i$ ou $\zeta = 0$, c'eſt-à-dire au commencement du mouvement, elles devroient être $= 0$, quelle que fût la poſition de l'axe par rapport à la direction des forces perturbatrices; & cependant l'expreſſion ſous laquelle elles ſe préſentent ne les donne pas telles. Développons davantage cette difficulté, & nous en donnerons enſuite la ſolution qui nous conduira à des conſéquences curieuſes & importantes. Mais auparavant il faut obſerver qu'il y a deux axes à diſtinguer dans la terre, relativement à la ſolution du problême qui va nous occuper. Le premier eſt l'*axe de figure*, qui diviſe tous les méridiens en deux parties égales & ſemblables, & que nous appellerons ſimplement l'*axe*; le ſecond eſt l'*axe de rotation*, celui autour duquel la terre tourne à chaque inſtant, & dont la poſition eſt variable, quoiqu'il s'écarte toujours très-peu de l'axe de figure. Cela poſé.

3. En conſervant les mêmes noms que dans nos *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes* (art. 45) (*a*), faiſons un moment abſtraction de la lune pour ſim-

(*a*) Je ſuppoſe ici que le Lecteur ait ſous les yeux mes Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes, qu'il faut néceſſairement connoître pour entendre ce Mémoire.

plifier la queſtion, c'eſt-à-dire, faiſons $1 + 6 = 0$, &
ſuppoſons $\frac{6A \cos.\pi \cos.\nu}{M+K} = \varphi$, nous aurons
$\varphi dz^2 \cos.\pi \sin.\nu = d(d\epsilon \cos.\pi^2) + k\,dz\,d(\sin.\pi)$;
$ddπ = \varphi dz^2 \sin.\pi \cos.\nu - d\epsilon^2 \sin.\pi \cos.\pi + k\,d\epsilon\,dz \times \cos.\pi$.
Soit $\delta$ la valeur de $d\pi$ au premier inſtant, & $\gamma$ celle de $d\epsilon$; il eſt évident que $dd\epsilon = \gamma$ lorſque $\epsilon = 0$, & $dd\pi = \delta$, puiſqu'on ſuppoſe qu'avant l'action du ſoleil, la terre tournoit uniformément autour de ſon axe, & que ſon axe étoit fixe & ſans mouvement. Donc au premier inſtant, on a
$\varphi dz^2 \cos.\pi \sin.\nu = \gamma \cos.\pi^2 - 2\gamma\delta \sin.\pi \cos.\pi + k\,dz \times \delta \cos.\pi$;
$\delta = \varphi dz^2 \sin.\pi \cos.\nu - \gamma^2 \sin.\pi \cos.\pi + k\gamma\,dz \cos.\pi$.
Donc en négligeant $\gamma\delta$, qui non-ſeulement peut être négligé, mais doit l'être, puiſque $\gamma\delta$ eſt infiment petit par rapport à $\gamma$, on a au premier inſtant $\gamma = \frac{\varphi dz^2 \sin.\nu}{\cos.\pi} - \frac{k\delta\,dz}{\cos.\pi}$; & $\delta = \varphi dz^2 \sin.\pi \cos.\nu - \sin.\pi \cos.\pi \times \left(\frac{\varphi^2 dz^4 \sin.\nu^2}{\cos.\pi^2} - \frac{2k\delta dz^3 . \varphi \sin.\nu}{\cos.\pi^2} + \frac{k^2\delta^2 dz^2}{\cos.\pi^4}\right) + \varphi k\,dz^3 \sin.\nu - k^2\delta\,dz^2$.
Donc en négligeant les quantités infiniment petites par rapport aux autres, c'eſt-à-dire réellement nulles dans le cas préſent, on aura $\delta = \varphi \sin.\pi \cos.\nu\,dz^2$; & $\gamma = \frac{\varphi dz \sin.\nu}{\cos.\pi}$; d'où l'on voit que les valeurs véritables de

$di$ & de $d\pi$, ſont de l'ordre de $dz^2$ lorſque $z = 0$, & que par conſéquent $\frac{di}{dz}$ & $\frac{d\pi}{dz}$, ſont $= 0$ lorſque $z = 0$.

4. Cependant les équations générales que donne notre ſolution, ſavoir $\varphi\, dz^2$ cof. $\pi$ ſin. $\nu = k\, dz\, d(\text{ſin. } \pi)$, & $\varphi\, dz^2$ ſin. $\pi$ cof. $\nu = -k\, di\, dz$ cof. $\pi$, en négligeant les autres termes, comme nous l'avons preſcrit avec raiſon dans l'art. 52 de l'Ouvrage cité, donnent en général $d\pi = \frac{\varphi\, dz \text{ ſin. } \nu}{k} = \frac{3A \text{ ſin. } 2\nu \text{ cof. } \pi\, dz}{k}$; & $di = -\frac{\varphi\, dz \text{ ſin. } \pi \text{ cof. } \nu}{k \text{ cof. } \pi} = -\frac{6A\, dz \text{ cof. } \nu^2 \text{ ſin. } \pi}{k}$; quantités qui ne ſont point égales à zero (comme elles le devroient être) quand $z = 0$.

5. On dira peut-être qu'elles ſont $= 0$, ſi cof. $\nu = 0$, c'eſt-à-dire ſi $\nu = \pm 90$ degrés. Cela eſt vrai; mais dans ce ſeul cas: au lieu que la nature de la queſtion & les formules de l'art. 4 précédent demandent que $\frac{di}{dz}$ & $\frac{d\pi}{dz}$ ſoient $= 0$, lorſque $i = 0$, quelle que ſoit la valeur de $\nu$. Je dis que la nature de la queſtion demande que $\frac{di}{dz}$ & $\frac{d\pi}{dz}$ ſoient $= 0$, lorſque $i$ ou $z = 0$. En effet, les mouvemens $di$ & $d\pi$ de l'axe venant uniquement de la force $\varphi$, ces mouvemens par la nature des forces accélératrices doivent être tels qu'au premier inſtant, $\frac{d\,di}{dt}$ & $\frac{d\,d\pi}{dt}$ ſoient de l'ordre de $\varphi$. Or au premier inſtant $d\,di = di$, & $d\,d\pi = d\pi$. Donc au premier inſtant, $\frac{di}{dz}$ & $\frac{d\pi}{dz}$

doivent être de l'ordre de $\varphi\, d\zeta$, c'eſt-à-dire infiniment petits, ou, ce qui eſt la même choſe, égaux à zero. Donc les valeurs de ces quantités, tirées de la ſolution générale de l'art. 4 ci-deſſus, ſont très-différentes des valeurs véritables quand $t = 0$.

6. Il y a plus. Les formules de la page 99 du Tome I de nos *Opuſcules*, prouvent que ſi au premier inſtant du mouvement, l'axe de rotation a été l'axe même de figure, & que l'axe de figure ait eu durant le premier inſtant les mouvemens $\delta$ & $\gamma$, perpendiculairement & parallélement au plan de l'écliptique, l'axe de rotation du corps changera de poſition au ſecond inſtant; que l'angle qu'il fait avec l'écliptique ſera augmenté de la quantité $\frac{\gamma \cos. \pi}{k\, d\zeta}$; & que ſon mouvement projetté ſur l'écliptique ſera $\frac{\delta}{k\, d\zeta \cos. \pi}$; c'eſt ce qu'on déduit aiſément des formules citées; donc $\delta'$ étant au premier inſtant le mouvement de l'axe de rotation perpendiculairement au plan de l'écliptique, & $\gamma'$ ſon mouvement projetté ſur le même plan, on aura $\delta' = \frac{\gamma \cos. \pi}{k\, d\zeta}$; & $\gamma' = \frac{\delta}{k\, d\zeta . \cos. \pi}$; donc ſi on fait $\delta' = d\pi'$, & $\gamma' = -d\iota'$ (je mets $-d\iota'$, parce que $\gamma'$ doit être du côté oppoſé à $\gamma$, ſi $\delta'$ & $\delta$ ſont l'un & l'autre du même côté) on aura $d\pi' = \frac{\varphi\, d\zeta \sin. \nu}{k}$; & $-d\iota' = \frac{\varphi \sin. \pi \cos. \nu\, d\zeta}{k \cos. \pi}$,

ou $d\pi' = \frac{3A \cos. \pi \sin. 2\nu\, d\zeta}{k}$; & $-d\iota' = \frac{6A \sin. \pi\, d\zeta \cos. \nu^2}{k}$.

Or

Or il eſt aiſé de voir que ces formules s'accordent, quant au premier inſtant, avec celles de la ſeconde ſolution que nous avons donnée du problême de la préceſſion des équinoxes, & qui fait trouver à chaque inſtant la poſition de l'axe de rotation. Voyez l'art. 116 de l'Ouvrage cité.

7. Mais ſi au premier inſtant on prenoit $\frac{3A \text{ ſin. } 2\nu \text{ cof. } \pi d\zeta}{k}$ & $-\frac{6A \text{ ſin. } \pi d\zeta \text{ cof. } \nu^2}{k}$ pour les mouvemens $d\pi$ & $d\epsilon$ de l'axe de figure, on auroit pour les mouvemens de l'axe de rotation au premier inſtant, les équations ſuivantes; $d\pi' = \frac{d\epsilon \text{ cof. } \pi}{k d\zeta} = -\frac{6A \text{ ſin. } \pi \text{ cof. } \pi \text{ cof. } \nu^2}{kk}$; & $-d\epsilon' = \frac{d\pi}{k d\zeta \text{ cof. } \pi} = \frac{3A \text{ ſin. } 2\nu}{kk}$; quantités qui different beaucoup des précédentes; d'où il réſulte de nouveau que les valeurs de $d\pi$ & $d\epsilon$, tirée de la ſolution générale lorſque $t = 0$, ne ſont pas les véritables.

8. En général, ſoit $\downarrow d\zeta^2 = d(d\epsilon \text{ cof. } \pi^2) + k d\zeta \times d(\text{ſin. } \pi)$; & $dd\pi = \Gamma d\zeta^2 - d\epsilon^2 \text{ ſin. } \pi \text{ cof. } \pi + k d\epsilon d\zeta \text{ cof. } \pi$; on aura au premier inſtant, par un calcul ſemblable à celui qu'on a déja fait ci-deſſus pour trouver $\gamma$ & $\delta$, $\gamma = \frac{\downarrow d\zeta^2}{\text{cof. } \pi^2} - \frac{k\delta d\zeta}{\text{cof. } \pi} = \frac{\downarrow d\zeta^2}{\text{cof. } \pi^2}$; & $\delta = \Gamma d\zeta^2$; donc $\delta'$ ou $d\pi' = \frac{\downarrow d\zeta}{k \text{ cof. } \pi}$; & $\gamma'$ ou $-d\epsilon' = \frac{\Gamma d\zeta}{k \text{ cof. } \pi}$. Mais ſi on prenoit, comme il paroît réſulter de la ſolution générale, $\downarrow d\zeta^2 = k d\zeta d(\text{ſin. } \pi)$, & $\Gamma d\zeta^2 + k d\epsilon d\zeta \text{ cof. } \pi = 0$, ce qui donne $d\pi = \frac{\downarrow d\zeta}{k \text{ cof. } \pi}$, & $d\epsilon$

$= -\frac{\Gamma d\zeta}{k \cos.\pi}$ ; on auroit $d\pi'$ ou $\frac{d\epsilon \cos.\pi}{k d\zeta} = \frac{\Gamma}{kk}$ ; & $-d\epsilon'$ ou $\frac{d\pi}{k \cos.\pi . d\zeta} = \frac{\downarrow}{kk \cos.\pi^2}$.

9. On voit donc que les deux ſolutions données dans nos *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, art. 52 & 116, donnent des réſultats différens ſur la poſition de l'axe de rotation au premier inſtant ; car par la premiere ſolution, les mouvemens $d\pi$ & $d\epsilon$ de l'axe de figure au premier inſtant, étant ſuppoſés $\frac{\downarrow d\zeta}{k \cos.\pi}$ & $\frac{\Gamma d\zeta}{k \cos.\pi}$ ; les mouvemens de l'axe de rotation réel ſeront $\frac{\Gamma}{kk}$ & $\frac{\downarrow}{kk \cos.\pi^2}$ ; au lieu que par notre ſeconde ſolution, les mouvemens de l'axe de rotation au premier inſtant, ſont $\frac{\downarrow d\zeta}{k \cos.\pi}$ & $\frac{\Gamma d\zeta}{k \cos.\pi}$ ; & on peut remarquer en paſſant, que ces mouvemens ſont les mêmes que ceux que nous avons trouvés dans la premiere ſolution pour l'axe de figure.

10. Non-ſeulement les deux ſolutions donneront des réſultats très-différens : l'un eſt même infiniment plus grand que l'autre ; la premiere donne le mouvement de l'axe de figure au premier inſtant de l'ordre de $d\zeta$, au lieu que la ſeconde le donne de l'ordre de $d\zeta^2$ ; car cette ſeconde donne le mouvement de l'*axe de rotation* de l'ordre de $d\zeta$ ; ce qui ſuppoſe que le mouvement de l'axe de figure eſt de l'ordre de $d\zeta^2$, comme il eſt aiſé de le voir ; en effet, l'angle entre l'axe de rotation & l'axe de

figure étant de l'ordre de $dz$, le mouvement de l'extrémité de l'axe de figure eſt évidemment de l'ordre de $dz^2$.

11. Or il eſt certain que c'eſt le réſultat de cette ſeconde ſolution qui eſt le véritable; autrement une force accélératrice, qui étant infiniment petite, ne doit déranger l'axe de rotation qu'infiniment peu au premier inſtant, le dérangeroit d'une quantité finie; car l'axe de figure ayant un mouvement de l'ordre de $dz$, l'axe de rotation doit être dérangé d'une quantité finie.

12. D'un autre coté néanmoins, ſi on examine les deux ſolutions en elles-mêmes, il eſt certain que la premiere eſt préférable, en ſuppoſant que dans les formules données par cette ſolution, on ne néglige rien; car dans la ſeconde ſolution, on néglige pluſieurs circonſtances, entr'autres la figure du ſphéroïde qu'on regarde comme une ſphere. Il faut donc préférer les formules de la premiere, pourvû qu'elles ſoient bien traitées, & avec toute l'exactitude & la rigueur réquiſe.

13. Auſſi a-t-on déja vu (art. 3) que ces formules, quand elles ſont bien maniées, donnent un réſultat conforme à celui de la ſeconde ſolution, quant à la poſition de l'axe de rotation au premier inſtant. Ce ſont donc les formules de la premiere ſolution que nous allons développer dans les calculs ſuivans, pour en déduire les vrais mouvemens de l'axe de figure & de l'axe de rotation.

14. Puiſque $\gamma$ & $\varphi$ ſont de l'ordre de $dz^2$ au premier inſtant, donc $\frac{d\gamma}{dz}$ & $\frac{d\varphi}{dz}$ ſont $= 0$ au premier inſtant.

Mais pour rendre la ſolution plus générale, nous ſuppoſerons qu'au premier inſtant ces quantités ayent une valeur donnée. Nous ſuppoſerons donc qu'on ait au premier inſtant $dt = \mu\, dz$, $d\pi = \nu\, dz$, & $\pi = \pi'$.

15. Cela poſé, on aura en général ($k'$ étant $= \frac{2Kk}{M+K}$),

$dz \int \psi\, dz = dt \cdot \text{cof. } \pi^2 - \mu\, dz \cdot \text{cof. } \pi'^2 + k'\, dz \cdot \text{ſin. } \pi - k'\, dz \cdot \text{ſin. } \pi'$;

$dd\pi = \Gamma\, dz^2 - dt^2 \cdot \text{ſin. } \pi \cdot \text{cof. } \pi + k'\, dt\, dz \cdot \text{cof. } \pi$;

ou, en faiſant $\pi = \pi' + \alpha$, & négligeant ce qu'on peut négliger,

$$dd\alpha = \Gamma\, dz^2 - \text{ſin. } \pi' \cdot \text{cof. } \pi' \left[ \frac{dz^2 (\int \psi\, dz)^2}{\text{cof. } \pi^4} + \mu^2\, dz^2 + \frac{k'^2 \alpha^2\, dz^2}{\text{cof. } \pi^2} + \frac{2\, dz^2 \cdot \mu \int \psi\, dz}{\text{cof. } \pi^2} - \frac{2k'\alpha\, dz^2 \int \psi\, dz}{\text{cof. } \pi^3} - \frac{2k\alpha\mu\, dz^2}{\text{cof. } \pi} \right] + k'\, dz^2 \cdot \text{cof. } \pi \left( \frac{\int \psi\, dz + \mu \cdot \text{cof. } \pi' - k'\alpha \cdot \text{cof. } \pi}{\text{cof. } \pi^2} \right);$$

ou, en regardant $k'$ comme très-grand, & négligeant encore ce qui doit être négligé en conſéquence de cette hypothèſe,

$$dd\alpha + \alpha\, k'^2\, dz^2 = \frac{k'\, dz^2}{\text{cof. } \pi} \int \psi\, dz + k'\mu \cdot \text{cof. } \pi\, dz^2 + \Gamma\, dz^2.$$

16. Soit $\psi = \lambda \cdot \text{cof. } (\gamma + \mathfrak{C} z)$, $\mathfrak{C}$ étant ſuppoſé très-petit; & $\int \psi\, dz = \frac{\lambda \cdot \text{ſin. } (\gamma + \mathfrak{C} z)}{\mathfrak{C}} - \frac{\lambda \cdot \text{ſin. } \gamma}{\mathfrak{C}} = - \frac{\lambda \cdot \text{cof. } (90^\circ + \mathfrak{C} z + \gamma)}{\mathfrak{C}} + \frac{\lambda \cdot \text{cof. } (90^\circ + \gamma)}{\mathfrak{C}}$ : ſoit auſſi $\Gamma = \zeta + \rho \cdot \text{ſin. } (\gamma + \mathfrak{C} z) = \zeta - \rho \cdot \text{cof. } (90^\circ + \mathfrak{C} z + \gamma)$; $\zeta$ & $\rho$ étant des conſtantes : cela poſé,

17. Une équation de cette forme $dd t + N^2 t\, dz^2 + G x$

$\sin.(L+Sz)\,dz^2=0$, se transforme en $ddt+N^2t\,dz^2 - G\cos.(L+90^\circ+Sz)\,dz^2=0$, dont l'intégrale est (*Recherches sur le système du Monde*, Part. I, pag. 27)

$$t=\delta\cos.Nz+\frac{s\sin.Nz}{N}+\frac{G}{N^2-S^2}\times\cos.(L+90^\circ+Sz)-\frac{G}{2N}\left(\frac{\cos.(L+90^\circ+Nz)}{N-S}+\frac{\cos.(L+90^\circ-Nz)}{N+S}\right)$$

$$=\delta\cos.Nz+\frac{s\sin.Nz}{N}-\frac{G}{N^2-S^2}\sin.(L+Sz)+\frac{G}{2N}\left(\frac{\sin.(L+Nz)}{N-S}+\frac{\sin.(L-Nz)}{N+S}\right),$$

en supposant que lorsque $t=0$, on ait $t=\delta$ & $\frac{dt}{dz}=s$.

18. Or dans le cas présent, on a cette équation-ci;

$$ddu+uk'^2\,dz^2+\frac{k\,dz^2}{\cos.\pi}\times\frac{\lambda\sin.\gamma}{\zeta}-k'\mu\cos.\pi\,dz^2+\frac{k'\lambda\,dz^2}{\zeta\cos.\pi}\cos.(90^\circ+\gamma+\zeta z)-\zeta\,dz^2+\rho\,dz^2\cos.(90^\circ+\gamma+\zeta z)=0;$$

de plus (*hyp.*) $u=0$ quand $z=0$, & $\frac{du}{dz}=1$;

l'intégrale est donc

$$u=\frac{1\sin.k'z}{k'}+\left(\frac{k'\lambda\sin.\gamma}{\zeta\cos.\pi}-k'\mu\cos.\pi-\zeta\right)\times\left(\frac{\cos.k'z-1}{k'k'}\right)+\left(\frac{k'\lambda}{\zeta\cos.\pi}+\rho\right)\frac{1}{2k'}\left(\frac{\cos.(90^\circ+\gamma+k'z)}{k'-\zeta}+\frac{\cos.(90^\circ+\gamma-k'z)}{k'+\zeta}\right)-\left(\frac{k'\lambda}{\zeta\cos.\pi}+\rho\right)[\cos.(90^\circ+\gamma+\zeta z)]:(k'k'-\zeta\zeta);$$

ce qui se réduit (à cause de $\cos.90^\circ+\gamma\pm kz=\mp$

$\sin.\gamma \pm k\zeta = -\sin.\gamma \cos.k\zeta \mp \sin.k\zeta \cos.\gamma$) à l'expreſſion ſuivante;

$$\alpha = \frac{\nu \sin.k'\xi}{k'} + \left(\frac{k'\lambda \sin.\gamma}{\mathfrak{C}\cos.\pi} - \zeta - k'\mu\cos.\pi\right)\left(\frac{\cos k'\xi - 1}{k'k'}\right)$$
$$+ \left(\frac{k'\lambda}{\mathfrak{C}\cos.\pi} + \rho\right)\left(-\frac{\sin.\gamma\cos.k'\xi}{k'k' - \mathfrak{C}\mathfrak{C}} - \frac{\mathfrak{C}\sin.k'\xi\cos.\gamma}{k'(k'k' - \mathfrak{C}\mathfrak{C})}\right)$$
$$+ \left(\frac{k'\lambda}{\mathfrak{C}\cos.\pi} + \rho\right) \times \frac{\sin.(\gamma + \mathfrak{C}\zeta)}{k'k' - \mathfrak{C}\mathfrak{C}}.$$

19. Lorſque $\mathfrak{C}$ eſt très-petit & $k$ très-grand, comme on le ſuppoſe ici, cette derniere expreſſion ſe réduit à $\frac{\nu \sin.k'\xi}{k'} - \frac{\lambda \sin.\gamma}{\mathfrak{C}k'\cos.\pi} + \frac{\mu\cos.\pi}{k'} - \frac{\mu\cos.\pi\cos.k'\xi}{k'}$

$+ \frac{\lambda}{k\,\mathfrak{C}\cos.\pi}\,[\sin.(\gamma + \mathfrak{C}\zeta)]$.

20. Or la ſolution générale des *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, donne $\alpha = \frac{\lambda}{k'\mathfrak{C}\cos.\pi}\,[\sin.(\gamma + \mathfrak{C}\zeta) - \sin.\gamma]$; ce qui s'accorde avec l'expreſſion précédente, lorſque $\nu$ & $\mu$ ſont $= 0$, c'eſt-à-dire lorſque l'axe de figure n'a reçu aucun mouvement primitif.

21. L'accord qu'on vient de remarquer entre les deux ſolutions, lorſque $\nu$ & $\mu$ ſont $= 0$, a encore lieu, du moins ſenſiblement & à très-peu près, tant que $\nu$ & $\mu \times \cos.\pi$ ſont très-petites par rapport à $\frac{\lambda}{\mathfrak{C}\cos.\pi}$. Or (art. 44 de l'Ouvrage cité) $\frac{\lambda}{k'\mathfrak{C}\cos.\pi} = \frac{\sin.\pi}{k'\mathfrak{C}} \times \frac{3A(1+\mathfrak{C})}{M+K} \times m' =$ à très-peu près $\frac{3A(1+\mathfrak{C})\sin.\pi}{k'(M+K)} \times \frac{1}{2}$, à cauſe de $\mathfrak{C} = \frac{1}{178}$ environ, & de $m' =$ environ $\frac{1}{12}$. Donc, pour

que $\frac{\mu \text{ cof. } \pi}{t}$ puiſſe être négligé par rapport à $\frac{\lambda}{k\,\epsilon \text{ cof. } \pi}$, il faut, ou que cof. $\pi$ ſoit très-petit, ou que $\mu$ ſoit beaucoup plus petit que $\frac{3A(1+\epsilon)}{M+K} \times \frac{3 \text{ ſin. } \pi}{2 \text{ cof. } \pi}$; & à l'égard de $\nu$, il doit être beaucoup plus petit que $\frac{3A(1+\epsilon)}{M+K} \times \frac{3 \text{ ſin. } \pi}{2}$; d'où il s'enſuit qu'à moins que cof. $\pi$ ne ſoit très-petit, $\mu$ & $\nu$ doivent être l'un & l'autre beaucoup plus petits que $\frac{3A(1+\epsilon)}{M+K} \times \frac{3 \text{ ſin. } \pi}{2}$. Or en nommant $\Delta$ la denſité de chaque couche, $f$ ſon rayon, & $F\alpha$ ſon elliplicité, on a (*Préceſſion des Equinoxes*, art. 80) $\frac{A}{M+K} =$ à très-peu près $\frac{\int \Delta \alpha (\alpha F f^5)}{2 \int \Delta d (f^5)}$; donc ſubſtituant cette valeur dans le calcul précédent, il faudra que $\mu$ & $\nu$ ſoient beaucoup plus petites que $\frac{3(1+\epsilon)\int \Delta d(\alpha F f^5)}{2 \int \Delta d (f^5)} \times \frac{3 \text{ ſin. } \pi}{2}$.

22. Or l'angle entre l'axe de figure & l'axe de rotation, à la fin du premier inſtant, eſt $\frac{\sqrt{(\mu^2 \text{ cof. } \pi^2 + \nu^2)}}{k}$; c'eſt de quoi il eſt très-aiſé de s'en aſſurer par cette ſeule conſidération, que $\mu$ étant la vîteſſe angulaire du pole de la terre, rapportée au plan de l'écliptique, $\mu \times$ cof. $\pi$ ſera ſa vîteſſe angulaire réelle, parallélement à l'écliptique, par conſéquent $dz \sqrt{(\mu^2 \text{ cof. } \pi^2 + \nu^2)}$ ſera le petit eſpace que parcourt le pole autour de l'axe réel

de rotation, l'eſpace que chaque point de l'équateur parcourt dans le même temps étant à très-peu près $k' d\zeta$; d'où il eſt aiſé de voir que $\frac{\sqrt{(\mu^2 \text{ cof. } \pi^2 + \nu^2)}}{k'}$ eſt l'angle entre l'axe de rotation & l'axe de figure; donc cet angle doit être beaucoup plus petit que $\frac{3A(1+\epsilon) \text{ ſin. } \pi}{k'(M+K)} \times \frac{3}{2}$, autrement les valeurs de $\alpha$ ne répondroient pas aux obſervations.

23. D'où l'on voit que la terre a pu être primitivement pouſſée par une puiſſance qui ne ſoit point exactement perpendiculaire à un méridien, ni paſſant par l'équateur, enſorte que l'axe de rotation primitive au premier inſtant, a pu être différent de l'axe de figure; mais que cependant l'écart a dû être fort petit, pour que le réſultat du calcul réponde (comme il fait) aux phénomenes obſervés de la préceſſion & de la nutation.

24. A l'égard de la valeur de $d\iota$, elle ſera égale à $-\frac{k' \alpha d\zeta}{\text{cof. } \pi} + \frac{d\zeta \int \downarrow d\zeta}{\text{cof. } \pi^2} + \mu d\zeta =$ (en mettant pour $\alpha$ ſa valeur tirée de l'art. 18) $+ \frac{k' d\zeta}{\text{cof. } \pi} \left( \frac{k' \lambda \text{ ſin. } \gamma}{k'^2 \epsilon \text{ cof. } \pi} - \frac{k' \mu \text{ cof. } \pi}{k'^2} - \frac{\zeta}{k'^2} \right) + \left( \mu - \frac{\lambda \text{ ſin. } \gamma}{\epsilon \text{ cof. } \pi^2} \right) d\zeta + \frac{\lambda d\zeta}{\epsilon \text{ cof. } \pi^2} \times \text{ſin. } (\gamma + \epsilon\zeta) - \frac{\nu d\zeta \text{ ſin. } k'\zeta}{\text{cof. } \pi} - \frac{d\zeta}{k' \text{ cof. } \pi} \left( \frac{k' \lambda \text{ſin. } \gamma}{\epsilon \text{ cof. } \pi} - k' \mu \right.$

$\times \text{cof. } \pi - \zeta) \times \text{cof. } k'\zeta + \frac{d\zeta \text{ ſin. } \gamma}{k' \text{ cof. } \pi} \left( \frac{k' \lambda}{\epsilon \text{ cof. } \pi} + \rho \right) \text{cof. } k'\zeta + \frac{\epsilon d\zeta \text{ cof. } \gamma}{k' k' \text{ cof. } \pi} \times \text{ſin. } k'\zeta \left( \frac{k' \lambda}{\epsilon \text{ cof. } \pi} + \rho \right) - \frac{d\zeta}{k' \text{ cof. } \pi} \times$

$\left( \frac{k' \lambda}{\epsilon \text{ cof. } \pi} \right.$

$\left(\frac{k'\lambda}{\zeta \cos.\pi} + \rho\right)(\sin.\gamma + \zeta z)$; en effaçant ce qui se détruit, cette quantité se réduit à $-\frac{\zeta dz}{k'\cos.\pi} - \frac{\nu dz \sin.k'z}{\cos.\pi}$ $+\mu dz \cos.k'z + \frac{\zeta dz \cos.k'z}{k'\cos.\pi} + \frac{\varrho dz \sin.\gamma \cos.k'z}{k'\cos.\pi} +$ $\frac{\lambda dz \cos.\gamma}{k'\cos.\pi^2} \times \sin.k'z + \frac{\zeta\varrho \cos.\gamma . dz \sin.k'z}{k'k'\cos.\pi} -$ $\frac{\varrho dz \sin.(\gamma+\zeta z)}{k'\cos.\pi}$; & comme $k'$ est très-grand & $\zeta$ très-petit, cette valeur de $dt$ étant intégrée, dans la supposition de $\nu$ & $\mu = 0$, ou de $\nu$ & $\mu \cos.\pi$ très-petites par rapport à $\frac{\varrho}{\zeta}$, se réduit à $t = -\frac{\zeta z}{k'\cos.\pi} + \frac{\varrho}{k'\cos.\pi} \times \left(\frac{-\cos.\gamma}{\zeta} + \frac{\cos.(\gamma+\zeta z)}{\zeta}\right)$; ce qui s'accorde encore avec les formules de nos *Recherches sur la précession des Equinoxes*.

25. Ces formules sont donc suffisamment exactes, au moins pour le cas où l'on suppose $k'$ très-grand & $\zeta$ très-petit, supposition qui a lieu dans le mouvement de la terre, & à laquelle il faut ajouter celle-ci, que $\mu$ & $\nu$ soient $= 0$, ou très-petites par rapport à $\frac{\lambda}{\zeta}$ & $\frac{\varrho}{\zeta}$. D'autres suppositions auroient besoin d'un autre calcul; mais ce n'est pas de quoi il s'agit quant à présent.

26. Rendons maintenant plus générale la solution précédente; pour cela soit $\psi dz^2 = d(dt \cos.\pi^2) + d(k' dz \sin.\pi)$; & puisque l'on a $dd\alpha + \alpha k'^2 dz^2$

$-\frac{k' dz^2 \int \downarrow dz}{\text{cof.}\,\pi} - k' \mu \,\text{cof.}\,\pi\, dz^2 - \Gamma\, dz^2 = 0$, l'intégrale eſt

$$\alpha = \frac{\nu}{k'} \,\text{ſin.}\, k' z + \frac{k' \mu \,\text{cof.}\,\pi}{k'^2} (1 - \text{cof.}\, k' z) +$$
$$\text{cof.}\, k' z \int \frac{k' dz \,\text{ſin.}\, k' z}{k' k'} \times \left( - \frac{k'}{\text{cof.}\,\pi} \int \downarrow dz - \Gamma \right)$$
$$- \,\text{ſin.}\, k' z \int \frac{k' dz \,\text{cof.}\, k' z}{k' k'} \left( - \frac{k' \int \downarrow dz}{\text{cof.}\,\pi} - \Gamma \right).$$

Or $\int \frac{dz \,\text{ſin.}\, k' z}{\text{cof.}\,\pi} \int \downarrow dz = - \frac{\text{cof.}\, k' z}{k'} \int \frac{\downarrow dz}{\text{cof.}\,\pi} +$
$\int \frac{\text{cof.}\, k' z}{k'} \times \frac{\downarrow dz}{\text{cof.}\,\pi}$, & $\int dz \,\text{cof.}\, k' z \times \int \frac{\downarrow dz}{\text{cof.}\,\pi} =$
$\frac{\text{ſin.}\, k' z}{k'} \int \frac{\downarrow dz}{\text{cof.}\,\pi} - \int \frac{\downarrow dz \,\text{ſin.}\, k' z}{k' \,\text{cof.}\,\pi}$. Donc la quantité qui renferme $\int \downarrow dz$ dans la valeur de $\alpha$, ſe réduit à celle-ci ;

$$\left( - \frac{\text{cof.}\, k' z^2}{k'} \right) \int \frac{\downarrow dz}{\text{cof.}\,\pi} + \frac{\text{ſin.}\, k' z^2}{k'} \int \frac{\downarrow dz}{\text{cof.}\,\pi} - \frac{\text{cof.}\, k' z}{k'} \times$$
$$\int \frac{\downarrow dz \,\text{cof.}\, k' z}{\text{cof.}\,\pi} - \frac{\text{ſin.}\, k' z \int \downarrow dz \,\text{ſin.}\, k' z}{k' \,\text{cof.}\,\pi} ;$$ qui ſe réduit encore à

$$\int \frac{\downarrow dz}{k' \,\text{cof.}\,\pi} - \frac{\text{cof.}\, k' z \int \downarrow dz \,\text{cof.}\, k' z + \text{ſin.}\, k' z \int \downarrow dz \,\text{ſin.}\, k' z}{k' \,\text{cof.}\,\pi} ;$$ à

quoi ajoutant les termes qui viennent de la quantité $\Gamma$, on aura

$$\alpha = \frac{\nu}{k} \,\text{ſin.}\, k' z + \frac{\mu \,\text{cof.}\,\pi}{k'} (1 - \text{cof.}\, k' z) + \int \frac{\downarrow dz}{k' \,\text{cof.}\,\pi} +$$
$$\frac{\Gamma}{k' k'} - \frac{\Gamma'}{k' k'} - \frac{\text{cof.}\, k' z \int \downarrow dz \,\text{cof.}\, k' z + \text{ſin.}\, k' z \int \downarrow dz \,\text{ſin.}\, k' z}{k' \,\text{cof.}\,\pi}$$
$$- \frac{\text{cof.}\, k z \int d\Gamma \,\text{cof.}\, k' z + \text{ſin.}\, k' z \int d\Gamma \,\text{ſin.}\, k' z}{k' k'},$$

$\Gamma'$ étant la valeur de $\Gamma$ lorſque $z = 0$ ; or cette valeur

de $\alpha$ est très-différente de la valeur $\int \frac{\psi d\zeta}{k' \text{cos.} \pi}$, que donneroit l'équation $\psi d\zeta^2 = d(k d\zeta \text{ sin. } \pi)$, dans laquelle on auroit négligé le terme $d(d\epsilon \text{ cos. } \pi^2)$.

27. A l'égard de $d\epsilon$, elle sera $= \frac{d\zeta \int \psi d\zeta}{\text{cos. } \pi^2} + \mu d\zeta - \frac{k' \alpha d\zeta}{\text{cos. } \pi} = - \frac{k' d\zeta}{\text{cos. } \pi} \times \left( \frac{\nu \text{ sin. } k'\zeta}{k'} - \frac{\mu \text{ cos. } \pi \text{ cos. } k'\zeta}{k'} + \frac{\Gamma}{k' k'} - \frac{\Gamma'}{k' k'} - \text{cos. } k'\zeta \left[ \int \frac{\psi d\zeta \text{ cos. } k'\zeta}{k' \text{cos. } \pi} + \int \frac{d\Gamma \text{ cos. } k'\zeta}{k' k'} \right] - \text{sin. } k'\zeta \left[ \int \frac{\psi d\zeta \text{ sin. } k'\zeta}{k' \text{cos. } \pi} + \int \frac{d\Gamma \text{ sin. } k'\zeta}{k' k'} \right] \right)$. Or cette valeur de $d\epsilon$, même en supposant $\nu$ & $\mu = 0$, n'est point égale à $- \frac{\Gamma d\zeta}{k' \text{cos. } \pi}$, qui résulteroit de l'équation $\Gamma d\zeta^2 + k d\epsilon d\zeta \text{ cos. } \pi = 0$, dans laquelle on auroit négligé les termes $dd\pi$ & $- d\epsilon^2 \text{ sin. } \pi \text{ cos. } \pi$.

28. Mais lorsque $\psi = \text{cos. } (\gamma + \zeta\zeta)$, & $\Gamma = \zeta + \rho \times \text{sin. } (\gamma + \zeta\zeta)$, $\zeta$ étant une quantité assez petite, & que de plus $k'$ est fort grand, le terme $\int \frac{\psi d\zeta}{k' \text{cos. } \pi}$ reste seul dans la premiere formule, parce qu'il est beaucoup plus grand que les autres, ayant $\zeta$ au dénominateur, & il en est de même du terme $- \frac{\Gamma d\zeta}{k' \text{cos. } \pi}$ dans la seconde; parce que ce terme étant intégré, donnera une partie qui contient des arcs de cercle, savoir $- \frac{\zeta\zeta}{k' \text{cos. } \pi}$, & une partie qui aura $\zeta$ au dénominateur.

29. On voit par ce calcul, que les valeurs de $d\epsilon$ &

de $d\alpha$, prises rigoureusement & sans rien négliger, sont $= 0$ lorsque $\zeta = 0$, comme elles le doivent être; mais qu'en intégrant ces valeurs, & négligeant les termes qui par l'intégration se trouvent très-petits par rapport aux autres, on tombe dans les expressions qui résultent de nos *Recherches sur la précession des Equinoxes*, & qu'ainsi ces expressions sont exactes; mais le détail où nous venons d'entrer étoit nécessaire pour en constater pleinement l'exactitude.

30. Pour trouver le vrai axe de rotation à chaque instant, on considérera que le mouvement de cet axe en latitude, ou plutôt sa distance en latitude de l'axe de figure, est $= \frac{d\epsilon \cos. \pi}{k' d\zeta}$ (*Opusc.* Tom. I, pag. 99); & que la distance en longitude, rapportée sur le plan de l'écliptique, est $\frac{d\alpha}{k' d\zeta} \times \frac{1}{\cos. \pi}$.

31. Donc puisque $d\alpha$ & $d\epsilon$ sont les mouvemens instantanés de l'axe de figure, ceux de l'axe de rotation à chaque instant seront, en latitude $\alpha + \frac{d\epsilon \cos. \pi}{k' d\zeta}$, & leur projection en longitude $= \epsilon + \frac{d\alpha}{k' d\zeta \cos. \pi}$. D'où il est aisé de voir, 1°. que puisque les mouvemens $d\epsilon$ en longitude sont fort petits, ainsi que les mouvemens $\alpha$, les mouvemens en latitude $\alpha + \frac{d\epsilon \cos. \pi}{k' d\zeta}$ le seront aussi; 2°. que si $\cos. \pi$ étoit très-petit, $\frac{d\alpha}{\cos. \pi}$ pourroit être considérable, quoique $\alpha$ fût assez petit; & qu'ainsi les va-

riations en latitude seroient alors très-grandes & très-sensibles; mais c'est ce qui n'a pas lieu dans la terre; & nous ne nous proposons pas d'examiner cet objet quant à présent en général.

32. On peut appliquer aisément les recherches & les réflexions précédentes au cas où la terre seroit réduite à un seul anneau solide, placé dans le plan de l'équateur. Les équations pour ce cas-là seront analogues (*Précession des Equinoxes*, art. 129) à celles que donne le sphéroïde, & on trouvera de même que $-\frac{dt}{dz}$ & $\frac{d\pi}{dz}$ doivent être rigoureusement nulles ou infiniment petites quand $t=0$, quoiqu'en n'intégrant pas les équations à la rigueur, on trouve les résultats indiqués dans l'Ouvrage & l'article déja cités. Je reviens maintenant à la terre considérée comme un sphéroïde, & je vais examiner le mouvement & la variation que la précession des équinoxes & la nutation de l'axe de figure peuvent produire dans son axe de rotation réel.

33. En conservant les noms donnés dans le second Mémoire de nos *Opuscules*, Tome I, page 99, soit $\xi$ la valeur de $X$ lorsque $t=0$, & soit en général $X=P+\zeta$, ensorte que $\zeta=\xi$ lorsque $t=0$; soit aussi, pour simplifier le calcul, $a-b=1$, on aura $ff=\frac{de^2\cos.\pi^2+d\alpha^2}{k^2\,dz^2}$; ce qui donne la valeur de $f$ à chaque instant, ou de la tangente de l'angle entre l'axe de figure & l'axe de rotation; tangente dont la valeur ne différe pas sensiblement de celle de l'angle même, à cause que

$de$ & $d\alpha$ ſont fort petits par rapport à $k' d\zeta$. On a de plus $f$ ſin. $X = f$ ſin. $(P + \zeta) = f$ ſin. $P$ cof. $\zeta + f$ ſin. $\zeta$ cof. $P = \frac{d\alpha}{k' d\zeta}$; & par la même raiſon, $f$ cof. $P \times$ cof. $\zeta - f$ ſin. $P$ ſin. $\zeta = \frac{de \cos. \pi}{k' d\zeta}$; donc $f$ ſin. $\zeta = \frac{d\alpha \cos. P}{k' d\zeta} - \frac{de \cos. \pi \sin. P}{k' d\zeta}$, & $f$ cof. $\zeta = \frac{d\alpha \sin. P}{k' d\zeta} + \frac{de \cos. \pi \cos. P}{k' d\zeta}$, ou $\frac{d\alpha}{k' d\zeta} = \frac{\cos. k'\zeta}{k'}\left(\mu - \int \frac{\downarrow d\zeta \sin. k'\zeta}{\cos. \pi} - \int \frac{d\Gamma \sin. k'\zeta}{k'}\right) + \frac{\sin. k'\zeta}{k'}\left(\mu \cos. \pi + \int \frac{\downarrow d\zeta \cos. k'\zeta}{\cos. \pi} + \int \frac{d\Gamma \cos. k'\zeta}{k'}\right)$; & $- \frac{de \cos. \pi}{k' d\zeta}$ (art. 27) $= \frac{\sin. k'\zeta}{k'} \times \left(\mu - \int \frac{\downarrow d\zeta \sin. k'\zeta}{\cos. \pi} - \int \frac{d\Gamma \sin. k'\zeta}{k'}\right) - \frac{\cos. k'\zeta}{k'}\left(\mu \cos. \pi + \int \frac{\downarrow d\zeta \cos. k'\zeta}{\cos. \pi} + \int \frac{d\Gamma \cos. k'\zeta}{k'}\right) + \frac{\Gamma - \Gamma'}{k'\zeta}$; de plus on ſe ſouviendra que ſin. $A$ cof. $P \pm$ cof. $A$ ſin. $P =$ ſin. $(A \pm P)$, & cof. $A$ cof. $P \pm$ ſin. $A$ ſin. $P =$ cof. $(A \mp P)$; d'où l'on tire, après toutes les réductions, $f$ ſin. $\zeta = \frac{\cos. (k'\zeta - P)}{k'}\left(\mu - \int \frac{\downarrow d\zeta \sin. k'\zeta}{\cos. \pi} - \int \frac{d\Gamma \sin. k'\zeta}{k'}\right) + \int \frac{\sin. (k'\zeta - P)}{k'}\left(\mu \cos. \pi - \int \frac{\downarrow d\zeta \cos. k'\zeta}{\cos. \pi} - \int \frac{d\Gamma \cos. k'\zeta}{k'}\right) + \frac{(\Gamma - \Gamma') \sin. P}{k' k'}$.

34. On peut encore ſimplifier cette expreſſion, en conſidérant que ſuivant les noms donnés dans nos *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, art. 44, on a $k' = \frac{2k\mathrm{K}}{M + \mathrm{K}}$, & $P = -\pi + k\zeta$. Donc ſi on fait

$\epsilon = \vartheta z$, $\vartheta$ étant fort petit, & $k' = k + \rho k$, $\rho$ étant auſſi fort petit, on aura $k' z - P = \vartheta z \sin. \pi + \rho k z = \Omega z$, $\Omega$ étant un coefficient très-petit.

35. Suppoſant pour plus de ſimplicité $\nu = 0$, $\mu = 0$; & remarquant outre cela que les termes où ſe trouvent $\Gamma$ & $\Gamma'$ ſont très-petits par rapport aux autres, tant à cauſe du diviſeur $k'$ qui eſt fort grand, qu'à cauſe du coefficient très-petit $\mathfrak{C}$ qui ſe trouve dans le terme $d\Gamma$, on aura à très-peu près $ff$ ou $\frac{1}{k'^2 dz^2} \times (d\alpha^2 + d\epsilon^2 \text{ cof. } \pi^2) =$ $\frac{1}{k'^2} \times \left(\int \frac{\psi dz \sin. k' z}{\text{cof. } \pi}\right)^2 + \frac{1}{k'^2}\left(\int \frac{\psi dz \text{ cof. } k' z}{\text{cof. } \pi}\right)^2$; d'où il eſt très-aiſé de voir (en ſe rappellant la valeur de $\alpha$ trouvée ci-deſſus art. 19) que $f$ ſera conſidérablement plus petit que $\alpha$ dans la raiſon de $\mathfrak{C}$ à $k'$ à très-peu près; & qu'ainſi l'axe de rotation ſera toujours à une diſtance abſolument inſenſible de l'axe de figure.

36. Si $\psi$ & $\Gamma$ étoient égaux à zero, mais non pas $\mu$ & $\nu$, on auroit $f = \frac{\sqrt{(\nu^2 + \mu^2 \text{ cof. } \pi^2)}}{k'}$ à très-peu près, & $\sin. \zeta = \frac{1}{k' f}[\nu \text{ cof. } (k' z - P) + \mu \text{ cof. } \pi \sin. (k' z - P)]$. Or $P = -\epsilon \sin. \pi + kz$, & dans le cas préſent ou $\psi = 0$, & $\Gamma = 0$, on a (art. 27) $\epsilon = -\frac{\nu}{k' \text{ cof. } \pi} \times (1 - \text{cof. } k' z) + \frac{\mu}{k} \sin. k' z$, quantité très-petite & inſenſible.

37. De-là il eſt évident, que $k' z - P$ étant ſenſible-

ment égal à $k\zeta\left(\frac{2K}{M+K}-1\right)=\frac{k\zeta(K-M)}{2K}$ à très-peu près, on aura $f$ sin. $\zeta=$ à très-peu près $\frac{1}{k}[\nu$ cosinus $\left(\frac{k\zeta(K-M)}{2K}\right)+\mu$ cos. $\pi$ sin. $\left(\frac{k\zeta(K-M)}{2K}\right)]$; d'où il est aisé de conclure que la plus grande valeur de $f$ sin. $\zeta$ sera lorsque tang. $\frac{k\zeta(K-M)}{2K}$ sera $=\frac{\mu\cos.\pi}{\nu}$.

38. Puisqu'on a trouvé (art. 36) l'équation $f$ sin. $\zeta=\frac{\nu\cos.(k'\zeta-P)+\mu\cos.\pi\sin.(k'\zeta-P)}{k'}$, on aura $f\cos.\zeta=-\frac{\nu\sin.(k'\zeta-P)}{k'}+\frac{\mu\cos.\pi\cos.(k'\zeta-P)}{k'}$.

39. Supposons pour plus de simplicité $\nu=0$, & on aura $f\cos.\zeta=-\frac{\mu\cos.\pi}{k'}$ lorsque $k'\zeta-P$ sera $=180°$; & $f\cos.\zeta=\frac{\mu\cos.\pi}{k'}$ lorsque $k'\zeta-P$ sera $=0$, c'est-à-dire lorsque $\zeta$ sera $=0$; d'où il s'ensuit que l'axe de rotation de la terre feroit avec l'écliptique un angle qu'il faudroit augmenter ou diminuer successivement de la quantité $\frac{2\mu\cos.\pi}{k'}$ depuis le moment où $\zeta=0$, jusqu'à celui où $k\zeta-P=180°$, & ainsi de suite de 180 en 180 degrés.

40. On pourroit expliquer par cette formule, du moins en partie, la diminution annuelle apparente de l'obliquité de l'écliptique, si l'angle $k'\zeta-P$ étoit tel qu'il ne fût $=180°$ qu'au bout de plusieurs siécles; mais

mais c'eſt ce qui n'eſt pas. Car $k'\zeta - P =$ à très-peu près $k\zeta \times \left(\frac{K-M}{2K}\right)$ (art. 37). Or on trouvera par un calcul facile, & en retenant les noms de l'art. 80 des *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, qu'en regardant la terre comme un ſolide elliptique de révolution, dont les couches ſoient de différentes figures & de différentes denſités, on a $K = \frac{4}{15} \times [\int \Delta\, d(f^5) + 4\int \Delta\, d(\alpha f^5 F)$; & $M = \frac{4}{15}[\int \Delta\, d(f^5) + 2\int \Delta\, d(\alpha f^5 F)]$; de plus $A = \frac{4}{15}\int \Delta\, d(\alpha f^5 F)$; d'où l'on voit que $\frac{K-M}{K+M}$ ou $\frac{K-M}{2K}$ à très-peu près $= \frac{A}{K}$. Or on a (*Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, pag. 62) $\frac{3A}{2K.k}(2 + \mathfrak{C})$ ſin. $\pi \times 360^\circ = 50''$; donc (pag. 96 *ibid.*) $\frac{A}{K}$, ou $\frac{K-M}{2K} =$ à très-peu près $\frac{1}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 12}$; donc $k\zeta\left(\frac{K-M}{2K}\right)$ = à très-peu près $\frac{360\cdot\zeta}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 12}$ ou $\frac{10\zeta}{9}$; d'où l'on voit qu'au bout de 6 mois $k'\zeta - P$ ſera $> 180^\circ$.

41. On ne ſauroit donc (au moins dans l'hypothèſe que la terre ſoit un ſolide elliptique de révolution) expliquer la diminution de l'obliquité de l'écliptique par la ſuppoſition que l'axe de la terre ait reçu quelque impulſion au premier inſtant; mais on peut d'un autre côté prouver par les formules précédentes que ce mouvement a dû être, ou abſolument nul, ou tout-à-fait inſenſible. En effet, ſi $\frac{\mu \text{ cof. } \pi}{k'}$ n'étoit pas tout-à-fait inſenſible,

on s'appercevroit tous les ans d'un mouvement de nutation dans l'axe de la terre, lequel dépendroit de l'angle $k' \zeta - P$. Par exemple, si $\mu$ étoit seulement $= \frac{1}{60}$, la nutation totale $\frac{2\mu \cos. \pi}{k'}$ seroit d'environ 8″. Je laisse à d'autres à examiner si on pourroit expliquer ce phénomene, en supposant que la terre ne soit pas un solide de révolution, ou même ne soit pas un solide formé par la révolution d'une ellipse.

42. Quoique nous venions de prouver que l'axe de figure de la terre n'a reçu aucun mouvement par l'impulsion primitive de cette planete, cependant, comme ce cas pourroit avoir lieu dans quelque autre planete, on peut demander quelle doit être la valeur & la direction de la force impulsive primitive, pour que $\frac{d\theta}{d\zeta'}$, $\frac{d\pi}{d\zeta'}$ & $\frac{dP}{d\zeta'}$ ayent au commencement du mouvement des valeurs données $\mu, \nu, q$; $d\zeta'$ exprimant le mouvement du centre dans son orbite.

43. D'abord on considérera que la force impulsive peut être imaginée réduite à deux forces, dont l'une $\downarrow$ soit perpendiculaire au plan de l'écliptique, & l'autre dans ce plan même; c'est ce qu'on verra aisément, en imaginant que la direction de la force impulsive soit prolongée jusqu'à ce qu'elle rencontre le plan de l'écliptique.

44. En second lieu, la force qui est dans le plan de l'écliptique peut être regardée comme composée de deux forces, chacune dans le plan $BCD$, (*Fig.* 31) & pas-

ſant par le même point par où paſſe la force $\downarrow$ : l'une de ces forces que j'appelle $\varphi$ ſera parallèle à la ligne $CB$, tirée à volonté dans le plan de l'écliptique, & qu'on peut ſuppoſer (pour ſimplifier le calcul) dans la direction que le mouvement du centre $C$ eſt ſuppoſé avoir dans ce plan. L'autre force que j'appelle $\gamma$ ſera parallèle à $CD$, c'eſt-à-dire perpendiculaire à $CB$.

45. De-là il eſt aiſé de voir qu'on aura (*Opuſcules*, Tome I, page 83) $\xi' = 0$, $\zeta' = 0$, $\chi' = \mu'$; & $\theta' = \nu'$. De plus, comme on ſuppoſe que le mouvement du centre $C$ ſe fait dans l'écliptique & dans la direction de $CB$, on aura (*Opuſcules*, Tome I, ſecond Mémoire) $dq = 0$, $ds = 0$, & par conſéquent $\downarrow = 0$, $\gamma = 0$. Mais quoique $\downarrow$ & $\gamma$ ſoient $= 0$, ce n'eſt pas à dire que $\downarrow \nu'$ & $\downarrow \mu'$ ſoient $= 0$, non plus que $\gamma \mu'$, parce que $\mu'$ & $\nu'$ peuvent être infinies.

46. Maintenant on mettra dans les quatre dernieres équations de la page 83 citée ci-deſſus, ou plutôt dans les équations correſpondantes des pag. 84 & 85, $-\frac{d\zeta'}{dt}$, au lieu de $-\frac{ddx \cdot p\theta^2}{2adt^2}$; $-\frac{du}{dt}$, $-\frac{d\pi}{dt}$, & $-\frac{d\zeta}{dt}$, au lieu de $-\frac{ddu \cdot p\theta^2}{2adt^2}$; $-\frac{dd\pi \cdot p\theta^2}{2adt^2}$; & $-\frac{dd\zeta \cdot p\theta^2}{2adt^2}$; enfin, ſubſtituant pour $d\zeta$, $d\pi$, $du$, leurs valeurs (qu'on ſuppoſe données au premier inſtant) on aura quatre équations, dont les trois dernieres donneront la valeur de $\downarrow \nu' - \gamma \xi'$, ou ſimplement $\downarrow \nu'$ à cauſe

de $\xi' = 0$, celle de $\gamma\chi' - \varphi\theta'$, ou $\gamma\mu' - \varphi\nu'$, & celle de $\psi\mu' - \varphi\zeta'$ ou $\psi\mu'$ à cauſe de $\zeta' = 0$.

47. Pour rendre le calcul encore plus général, nous ſuppoſerons, que ni $\gamma$, ni $\psi$ ne ſoient égales à zero; & nous aurons, au premier inſtant de l'impulſion, (*Opuſcules*, Tome I, page 84)

$$\psi = \int \frac{G\,dq}{dt}$$

$$\gamma = \int \frac{G\,ds}{dt}$$

$$\varphi = \int \frac{G\,dx}{dt}$$

$$\int G\left(\frac{\pi\,du - u\,d\pi}{du}\right) = -\psi\nu'$$

$$\int G\left(\frac{u\,dz - z\,du}{dt}\right) = -\gamma\mu' + \varphi\nu'$$

$$\int = \left(\frac{\pi\,dz - z\,d\pi}{dt}\right) = -\psi\mu'.$$

48. Or nous avons fait voir ailleurs (*Opuſcules*, Tom. IV, Mémoire 22, page 35);

1°. que $u\,dz - z\,du = \rho\,d\varpi - \varpi\,d\rho - de\,(\varpi\varpi + \rho\rho)$ $= -\lambda f dP$ cof. $\Pi$ cof. $X - ff dP$ ſin. $\Pi + ff d\Pi$ cof. $\Pi$ cof. $X$ ſin. $X + f^{\wedge} d\Pi$ ſin. $\Pi \times$ ſin. $X - de\,(\lambda^2$ cof. $\Pi^2 - 2f\lambda$ cof. $X$ ſin. $\Pi$ cof. $\Pi + ff - ff$ cof. $X^2$ cof. $\Pi^2)$; d'où il eſt évident qu'à cauſe de $\int G\lambda f$ ſin. $X = 0$, $\int G\lambda f$ cof. $X = 0$, $\int G\lambda f$ cof. $X$ ſin. $X = 0$, $\int Gf^2 \times$ cof. $X^2 = \int \frac{Gf^2}{2}$, on aura

$$\varphi\nu' - \gamma\mu' = \int -Gff \times dP \text{ ſin. } \Pi - \int G\lambda^2 \text{ cof. } \Pi^2\,dt + \int \frac{Gff}{2} \text{ cof. } \Pi^2\,dt - \int Gff\,dt;$$

2°. Nous avons fait voir au même endroit que $\pi\, dz - z\, d\pi = (\pi\, d\varpi - \varpi\, d\pi)\cos. e - \pi\, \rho\, de \cos. e + (\rho\, d\pi - \pi\, d\rho)\sin. e - \pi\, \varpi\, de \sin. e$;

& $\pi\, du - u\, d\pi = (\pi\, d\varpi - \varpi\, d\pi) \times \sin. e - \pi\, \rho\, de \sin. e - (\rho\, d\pi - \pi\, d\rho)\cos. e + \pi\, \varpi\, de \cos. e$.

49. Donc $-\psi\mu' \cos. e - \psi\nu' \sin. e = \int G[\pi\, d\varpi - \varpi\, d\pi - \pi\, \rho\, de]$; & $-\psi\mu' \sin. e + \psi\nu' \cos. e = \int G(\rho\, d\pi - \pi\, d\rho - \pi\, \varpi\, de)$.

Or $\pi\, d\varpi - \varpi\, d\pi = f\lambda\, dP \sin. \Pi \cos. X + ff\, dP \cos. \Pi - f\lambda\, d\Pi \cos. \Pi \times \sin. X + ff\, d\Pi \sin. \Pi \cos. X \sin. X = ff\, dP \cos. \Pi$, en omettant comme nuls les termes où ſe trouvent $\sin. X$ & $\cos. X$;

$\rho\, d\pi - \pi\, d\rho = \lambda^2\, d\Pi + f^2\, d\Pi \cos. X^2 - f\lambda\, dP \sin. X = \lambda^2\, d\Pi + \frac{f^2\, d\Pi}{2}$ par les mêmes raiſons;

$\varpi\, \pi = f\lambda \sin. \Pi \sin. X + ff \cos. \Pi \sin. X \cos. X = 0$;

enfin, $\pi\, \rho = \lambda^2 \sin. \Pi \cos. \Pi + f\lambda \cos. X (\cos. \Pi^2 - \sin. \Pi^2) - ff \cos. X^2 \sin. \Pi \cos. \Pi = (-\frac{ff}{2} + \lambda^2) \times \sin. \Pi \cos. \Pi$.

50. Donc $-\psi\mu' \cos. e - \psi\nu' \sin. e = \int G\, ff\, dP \cos. \Pi - \int G\, de \times \sin. \Pi \cos. \Pi (\lambda^2 - \frac{f^2}{2})$; & $-\psi\mu' \sin. e + \psi\nu' \cos. e = \int G\, d\Pi (\lambda^2 + \frac{f^2}{2})$.

51. On a de plus $\int \frac{G\, ff}{2} =$ à très-peu près $\int G\lambda^2$ (*Préceſſion des Equinoxes* (art. 43 & 44); donc les équations ſeront $\varphi\nu' - \gamma\mu' = -\frac{dP}{dt} \sin. \Pi \int \frac{G\, ff}{2} - \frac{d\iota}{dt} \int G\, ff$;

$$-\downarrow\mu' \text{ cos. } e - \downarrow\nu' \text{ sin. } e = \frac{dP \text{ cos. } \Pi}{dt} \int G ff;$$

$$-\downarrow\mu' \text{ sin. } e + \downarrow\nu' \text{ cos. } e = \frac{d\Pi}{dt} \int G ff:$$

d'où l'on tirera les valeurs de $\downarrow\nu'$ & de $\downarrow\mu'$, & celle de $\varphi\nu' - \gamma\mu'$; & on peut remarquer en passant que si $\varphi$ est supposée donnée, & non égale à zero, & qu'au contraire $\downarrow$ & $\gamma$ soient $= 0$, comme dans l'art. 45, il faut nécessairement que $\nu'$ soit $= 0$; autrement $\downarrow$ étant déja $= 0$, $\nu'$ ne pourroit être qu'infinie, & par conséquent $\varphi\nu'$ seroit infinie, ce qu'on ne doit pas supposer. D'où l'on voit encore que dans ce cas-là, on aura $\frac{dP \text{ cos. } \Pi}{\text{cos. } e} = \frac{d\Pi}{\text{sin. } e}$. On peut remarquer de plus, que dans le cas de $\downarrow = 0$, $\gamma = 0$, toutes les forces se réduiront à une seule, parallèle au plan de l'écliptique. On voit aussi que dans ce cas $\mu'$ sera infinie.

52. Si l'on vouloit que les forces $\downarrow$ & $\gamma$ fussent $= 0$, ainsi que $\nu'$, $\mu'$, $\xi'$ & $X'$, & qu'il n'y eût d'agissante qu'une seule force $\varphi$ parallèle à $CB$, & distante du plan $BCD$ de la quantité $\zeta'$, & du plan $ECB$ de la quantité $\theta'$, on auroit (*Opuscules*, Tome I, second Mémoire, page 83)

$$\varphi\theta' = -\frac{dP}{dt} \text{ sin. } \Pi \int \frac{Gff}{2} - \frac{de}{dt} \int G ff;$$

$$\varphi\zeta' \text{ cos. } e = \frac{dP}{dt} \text{ cos. } \Pi \int G ff;$$

$$\varphi\zeta' \text{ sin. } e = \frac{d\Pi}{dt} \int G ff:$$

d'où l'on voit que dans ce cas, si on suppose $e = 0$, $d\Pi$

doit être $= 0$ ; & qu'on aura $\varphi\theta'$ & $\varphi\zeta'$ par le moyen de $\frac{dP}{dt}$ & de $\frac{d\epsilon}{dt}$, $\varphi$ étant d'ailleurs connue par l'équation $\varphi = \int \frac{G\,dx}{dt}$.

53. De-là, & de l'art. précédent, il s'enſuit que ſi $dP$, $d\Pi$, $d\epsilon$, ſont donnés à volonté, ainſi que $e$, on ne pourra pas ſuppoſer que l'impulſion primitive vienne d'une ſeule force parallèle à l'écliptique ; il faut donc en ſuppoſer au moins deux : or comme le mouvement du centre $C$ & le mouvement de rotation autour du centre, ne donnent que les ſix quantités $dq$, $ds$, $dx$, $dP$, $d\epsilon$, $d\Pi$, (qu'on ſuppoſe connues lorſque $t = 0$) & qu'en rendant la ſolution la plus générale qu'il eſt poſſible, on a neuf quantités à déterminer $\varphi$, $\gamma$, $\psi$, $\mu'$, $\nu'$, $\chi'$, $\theta'$, $\xi'$, $\zeta'$, on pourra ſuppoſer trois de ces quantités égales à ce qu'on voudra, pourvu qu'on conſerve au moins deux forces. Par exemple, nous avons vû ci-deſſus qu'on peut toujours faire $\gamma = 0$ ; & ſuppoſant de plus que les momens de cette force $\gamma$, par rapport au centre $C$, ſoient égaux à zero, c'eſt-à-dire, que $\chi' = 0$, $\xi' = 0$, on n'aura plus que ſix inconnues à déterminer, ſavoir $\varphi$, $\psi$, $\mu'$, $\nu'$, $\zeta'$, $\theta'$, qu'on trouvera par les équations ſuivantes (art. 46 & 47)

$$\psi = \frac{dq}{dt} \int G$$

$$\varphi = \frac{dx}{dt} \int G$$

$$\int \frac{G(\pi\,du - u\,d\pi)}{dt} = -\psi\nu'$$

$$\int \frac{G(u\,dz - z\,du)}{dt} = \varphi\,\theta'.$$

$$\int \frac{G(\pi\,du - z\,d\pi)}{dt} = -\downarrow\mu' + \varphi\,\zeta'.$$

Et dans ces équations, il y a encore une inconnue qu'on peut prendre à volonté ; par exemple, on peut ſuppoſer $\nu' = \theta'$ ; ce qui réduira ( comme il eſt aiſé de le voir ) les forces $\varphi$ & $\downarrow$ à une ſeule, dont la direction ſera oblique à l'écliptique.

54. Enfin, ſi l'on veut, pour ſimplifier & généraliſer à-la-fois le problême le plus qu'il eſt poſſible, qu'on ait $\downarrow = 0$, $\gamma = 0$, c'eſt-à-dire, que le mouvement du centre $C$, au premier inſtant, ſoit dans l'écliptique & parallèle à $CB$, ou plutôt dans la direction de $CB$, on n'aura qu'à mettre dans les équations précédentes ( art. 51 ) $\downarrow\nu' - \gamma\,\xi'$ au lieu de $\downarrow\nu'$, $\downarrow\mu' - \varphi\,\zeta'$ au lieu de $\downarrow\mu'$, & $\gamma\chi' - \varphi\,\theta'$ au lieu de $\gamma\mu' - \varphi\,\nu'$ ; & l'on aura ( en ſuppoſant $\alpha$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{S}$, des quantités données ) les équations $\downarrow\nu' - \gamma\,\xi' = \alpha$ ; $\downarrow\mu' - \varphi\,\zeta' = \mathfrak{C}$ ; $\gamma\chi' - \varphi\theta' = \mathfrak{S}$, équations dans leſquelles on pourra encore ſuppoſer, ſi l'on veut, $\mu' = 0$, $\chi' = 0$, $\xi' = 0$ ; ce qui réduit les forces primitives 1°. à une force $\varphi$ parallèle à $CB$, diſtante du plan de l'écliptique d'une quantité $\zeta'$, & diſtante de la quantité $\theta'$ d'un autre plan $E'CB$, perpendiculaire à l'écliptique, & paſſant par le centre $C$ ; 2°. deux forces égales & oppoſées, placées chacune de différens côtés du centre $C$, perpendiculaires à la ligne $CD$ & au plan $BCD$, & dont la ſomme des momens, par rapport au centre $C$, ſoit $= \downarrow\nu'$.

55.

55. Ce ſeroit peut-être ici le lieu d'examiner les différentes ſolutions qui ont été données du *Problême de la préceſſion des Equinoxes*, & de faire voir en quoi pêchent pluſieurs de ces ſolutions, non-ſeulement celles dont le réſultat eſt fautif & contraire à celui que nous avons trouvé, mais même celles dont le réſultat eſt exact. Comme cet examen détaillé me meneroit trop loin, je me contenterai de donner ou d'indiquer ici les principes qui peuvent ſervir à guider & à éclairer les Mathématiciens ſur cet objet. J'obſerverai d'abord que les réſultats de mes deux ſolutions s'accordent parfaitement avec ceux que deux très-grands Géometres, MM. Euler & de la Grange, ont trouvés depuis; ce qui forme, ce me ſemble, en faveur de ma ſolution, un préjugé légitime, quand elle ne ſeroit pas d'ailleurs appuyée ſur l'analyſe la plus rigoureuſe. J'ajouterai que celles des ſolutions du problême qui ſont défectueuſes, le ſont principalement en deux points, 1°. en ce qu'on y regarde le mouvement d'un anneau, comme étant le même que celui des nœuds d'un ſatellite, dont l'orbite auroit le même diametre & la même inclinaiſon; ce qui eſt entiérement faux, comme il eſt aiſé de le conclure de la remarque faite ci-deſſus, art. 32. 2°. En ce qu'on y ſuppoſe que les effets produits par les forces du ſoleil & de la lune ſur un ſphéroïde & ſur un anneau, qu'on imagine avoir déja l'un & l'autre un mouvement de rotation ſur eux-mêmes, ſont en même raiſon que les effets qui ſeroient produits au premier inſtant par les

mêmes forces ſur le ſolide & l'anneau, ſuppoſés d'ailleurs dans un repos parfait; ce qui eſt encore abſolument faux : parce que le mouvement de rotation ſuppoſé dans les deux corps, dérange abſolument les deux réſultats trouvés dans le cas du repos. Enfin, je ferai obſerver que la ſolution ou plutôt les deux ſolutions de M. Simpſon, quoique le réſultat en ſoit exact, ſont auſſi défectueuſes en pluſieurs points. 1°. En ce qu'il y ſuppoſe comme vrais les deux principes dont nous venons de remarquer la fauſſeté. 2°. En ce qu'il donne à la force centrifuge une valeur qui n'eſt que la moitié de celle qu'il devroit lui donner; erreur d'autant plus digne d'être remarquée, que pluſieurs autres y ſont tombés après lui. 3°. En ce qu'il ſuppoſe que l'équateur du ſphéroïde, (j'entends par-là le plan perpendiculaire à l'axe de figure) eſt dérangé de ſa ſituation au premier inſtant, d'un angle infiniment petit du premier ordre, & que l'axe de figure eſt dérangé d'un angle ſemblable; or les recherches expoſées dans ce Mémoire prouvent encore combien cette ſuppoſition eſt fauſſe.

56. Voici la preuve de ce que nous venons d'avancer ſur l'expreſſion fautive donnée par M. Simpſon à la force centrifuge. Soit $dx$ l'eſpace que le corps parcourt dans ſa rotation autour de l'axe, $p$ la peſanteur, $2ph$ le quarré de la vîteſſe avec laquelle le cercle tourne autour de ſon centre, $\theta$ le temps pendant lequel le corps tomberoit de la hauteur $h$; $dt$ le petit temps qui répond à l'eſpace $dx$, $\varphi$ la force qui fait parcourir $ddx$; on aura $ddx =$

$\frac{2h\varphi dt^2}{p\theta^2}$. Or, en nommant $f$ la force centrifuge, & $dz$ l'arc infiniment petit décrit par le corps dans le plan du cercle, on a, ſuivant les théorêmes connus, $\frac{dz^2}{2r}$ pour l'eſpace que la force centrifuge feroit parcourir d'un mouvement accéléré; & cet eſpace ſeroit à l'eſpace $h$ parcouru auſſi pendant le temps $\theta$ d'un mouvement accéléré, comme $fdt^2 : p\theta^2$; donc $\frac{dz^2}{2r} = \frac{fhdt^2}{p\theta^2}$; donc $\frac{ddx}{2\varphi} = \frac{dz^2}{2rf}$; donc $\varphi = \frac{rfddx}{dz^2}$; or M. Simpſon trouve facilement par ſon calcul $ddx = \frac{dxdz}{r} \times$ cof. $z$; donc $\varphi = f$ cof. $z \times \frac{dx}{dz}$, ce qui n'eſt que la moitié de la valeur trouvée par M. Simpſon, $f$ étant ce qu'il appelle $B$, & $\frac{dx}{dz}$ ce qu'il appelle $r$.

57. L'erreur de M. Simpſon conſiſte en ce qu'il compare deux forces accélératrices, l'une calculée dans l'hypothéſe de la courbe polygone, l'autre dans celle de la courbe rigoureuſe. Je m'explique; la valeur $\frac{dz^2}{2r}$ qu'il donne à la force centrifuge eſt calculée dans l'hypothéſe de la courbe rigoureuſe; & la valeur $\frac{dxdz\,\text{cof. } z}{r}$ qu'il trouve pour $ddx$ eſt calculée dans l'hypothéſe de la courbe polygone, c'eſt-à-dire, qu'il ſuppoſe que les petits eſpaces conſécutifs $dx$ & $dx + ddx$ ſoient parcou-

rus uniformément chacun en particulier. Cette derniere ſuppoſition eſt permiſe ſans doute; mais alors il faut comparer le $ddx$ avec le petit eſpace que la force centrifuge $f$ feroit parcourir, non d'un mouvement uniformément accéléré, mais d'un mouvement uniforme; & ce petit eſpace ſeroit, comme l'on ſait, égal à $\frac{dz^2}{r}$, & non à $\frac{dz^2}{2r}$; enſorte qu'il faudra faire $ddx : \frac{dz^2}{r} :: \varphi . f$, & non comme M. Simpſon $ddx : \frac{dz^2}{2r} :: \varphi : f$.

58. Si on prend pour l'effet de la force centrifuge le petit eſpace $\frac{dz^2}{2r}$ parcouru d'un mouvement uniformément accéléré en vertu de cette force; en ce cas, il faudra prendre pour l'effet de la force $\varphi$, non l'eſpace $ddx$ parcouru uniformément en vertu de cette force, mais l'eſpace $\frac{ddx}{2}$ parcouru en vertu de cette même force d'un mouvement accéléré, & pour lors on auroit $\frac{ddx}{2} : \frac{dz^2}{2r} :: \varphi : f$; ce qui revient au même que $ddx : \frac{dz^2}{r} :: \varphi : f$. Cette mépriſe de M. Simpſon, ſur la valeur de la force centrifuge, a été adoptée par quelques-uns de ceux qui ont traité le problême de la préceſſion des Equinoxes, & qui même ſe ſont écartés d'ailleurs de la ſolution du Géometre Anglois.

59. De-là il s'enſuit que la méthode de M. Simpſon, corrigée d'abord à cet égard comme elle le doit être, don-

neroit la préceſſion double de ce qu'il la trouve réellement ; & comme le réſultat auquel il parvient, eſt le même que celui que nous trouvons par notre méthode, il s'enſuit que cette méthode donneroit un réſultat double du nôtre, & par conſéquent plus que quadruple de celui de Newton, en ſuppoſant l'applatiſſement de la terre $= \frac{1}{230}$, & n'ayant égard qu'à la ſeule force du ſoleil.

60. S'il n'y avoit que cette erreur dans la ſolution de M. Simpſon, il s'enſuivroit, après la correction, que le réſultat de la nôtre & celui de la ſolution de M. Newton ſeroient l'un & l'autre fautifs ; mais la mépriſe que nous venons de relever n'eſt pas la ſeule que M. Simpſon ait faite dans ſa ſolution. Il eſt tombé dans une autre faute ; c'eſt de ſuppoſer que l'équateur du ſphéroïde eſt dérangé de ſa ſituation au premier inſtant d'un angle infiniment petit du premier ordre par la force perturbatrice, & que l'axe de figure de la terre ſoit dérangé d'un angle ſemblable. Cette ſuppoſition eſt abſolument fauſſe, & nous avons démontré ci-deſſus que le mouvement de l'axe de figure & de l'équateur au premier inſtant, ſont réellement infiniment petits du ſecond ordre ; nous avons prouvé que les formules algébriques, données par la théorie pour le mouvement de l'axe de figure & de l'équateur du ſphéroïde, donnent en effet & rigoureuſement ce réſultat, quoique ces formules, en ne les traitant que d'une maniere approchée, donnent pour cet axe & cet équateur un mouvement qui s'accorde avec

celui qu'a trouvé M. Simpſon : c'eſt auſſi pour cette raiſon que le mouvement d'un anneau ſolide eſt réellement très-différent de celui d'un anneau compoſé de parties détachées, ou ce qui eſt la même choſe, du mouvement des nœuds d'un ſeul ſatellite placé à la même diſtance & à même inclinaiſon ; en effet, les quantités $\frac{di}{dt}$ & $\frac{d\pi}{dt}$, qui donnent le mouvement des nœuds & la variation de l'inclinaiſon, & qui dans le cas d'un anneau ſolide, ſont nulles ou infiniment petites (art. 32) lorſque $t = 0$, ne le ſeront pas ſi l'anneau eſt compoſé de parties détachées ; comme cela ſe démontre & même ſe voit aiſément par la théorie des nœuds de la lune & de l'inclinaiſon variable de ſon orbite. La raiſon de cette différence, c'eſt que dans le cas de l'anneau ſolide ou du ſphéroïde, la force perturbatrice $\varphi$, qui agit ſur l'axe, tend à lui faire parcourir, au premier inſtant, un eſpace de l'ordre de $\varphi\, dt^2$, & par conſéquent infiniment petit du ſecond ordre, ce qui ne dérange l'axe, & par conſéquent l'équateur, que d'une quantité infiniment petite du même ordre : au lieu que quand on ne conſidere qu'une ſeule lune, l'eſpace $\downarrow dt^2$ que lui fait parcourir la force pertubatrice, étant combiné avec l'eſpace $r\, dt$ qu'elle tend à parcourir dans ſon orbite, il en réſulte (comme il eſt aiſé de voir) que le plan de cet orbite eſt dérangé de ſa ſituation d'un angle infiniment petit du premier ordre.

61. Cette derniere remarque ſuffit pour faire voir qu'on

ne doit pas ſuppoſer, avec M. Newton, que le mouvement d'un anneau ſolide ſoit le même que celui d'un anneau compoſé de lunes iſolées, ou ce qui revient au même, que le mouvement des nœuds d'une ſeule lune; il n'y a de parité que dans le mouvement *moyen* de ces deux anneaux, ou de l'anneau ſolide & de la lune; les mouvemens *inſtantanés* ſont très-différens de part & d'autre; ainſi, la comparaiſon du mouvement de l'anneau avec celui de la lune, ſerviroit tout au plus à trouver le mouvement moyen de l'anneau, ou de la préceſſion des équinoxes, mais nullement à déterminer la nutation de l'axe & l'équation de la préceſſion; deux circonſtances eſſentielles à la ſolution complette du problême, & auxquelles n'ont pas aſſez fait d'attention ceux qui dans leur ſolution ont fait uſage du théorême moitié vrai, moitié faux de M. Newton, ſur l'identité de mouvement de l'anneau ſolide & de la lune.

62. Je pourrois ajouter encore que M. Newton & ceux qui l'ont ſuivi, ſuppoſent, ſans la démontrer, une autre propoſition, c'eſt que le mouvement des nœuds du ſatellite iſolé, ou de l'anneau compoſé de ſatellites, doit être diminué en raiſon du coſinus de l'inclinaiſon de l'anneau au ſinus total; propoſition vraie, mais qui a beſoin d'une démonſtration que nous donnerons dans un autre endroit de ce Volume. Revenons à la ſolution de M. Simpſon.

63. Indépendamment des défauts que nous avons déja obſervés dans cette ſolution, une autre conſidération

eſſentielle à faire, c'eſt que le diametre placé dans le plan de l'équateur, & autour duquel M. Simpſon ſuppoſe que l'équateur tourne par ſon mouvement angulaire, change de poſition à chaque inſtant, & que M. Simpſon n'a aucun égard à ce changement qui doit ou qui peut au moins altérer le réſultat du calcul, ſurtout au bout d'un temps fini.

64. Je ne parle point de la force néceſſaire pour retenir les particules, non-ſeulement dans le plan du cercle où elles tournent, mais encore ſur la circonférence de ce plan, force à laquelle M. Simpſon n'a aucun égard. Il eſt certain que cette force étant dirigée, comme il eſt aiſé de le voir, perpendiculairement au diametre de rotation, doit altérer le mouvement du corpuſcule dans la circonférence du cercle; mais comme cette force eſt très-petite par rapport à la force perturbatrice, ainſi qu'il eſt facile de s'en aſſurer, on peut à la rigueur en négliger ici l'effet.

65. La ſeconde ſolution de M. Simpſon, qu'il donne dans ſon problême V, n'eſt pas meilleure que la premiere. D'abord il y ſuppoſe, d'après ſes calculs de la premiere ſolution, que le mouvement d'un anneau ſera égal à celui d'un ſatellite faiſant ſa révolution dans le même temps & à la même diſtance. Or la valeur de la force trouvée par M. Simpſon, étant double de ce qu'elle eſt réellement, ainſi que nous l'avons fait voir, il s'enſuit que ſelon ſa ſolution même, il devroit trouver le mouvement des nœuds de l'anneau double de ce qu'il le trouve,

trouve, & par conſéquent double du mouvement des nœuds du ſatellite. On peut voir d'ailleurs ce que nous avons dit plus haut (art. 60 & 61) ſur l'identité prétendue du mouvement des nœuds du ſatellite avec celui d'un anneau ſolide. En ſecond lieu, M. Simpſon ſuppoſe que le mouvement des nœuds de l'anneau doit être à celui des nœuds de l'équateur du ſphéroïde, en raiſon de l'énergie des forces du ſoleil ſur l'anneau & le ſphéroïde, pour faire tourner l'un & l'autre ſur un diametre de l'équateur. Or cette proportion n'eſt pas vraie, parce que le ſphéroïde & l'anneau ne ſont point des corps ſemblables, & qu'ils ont déja un mouvement de rotation ſur eux-mêmes.

66. C'eſt auſſi en cela que péche évidemment la ſolution donnée par d'autres Mathématiciens qui (même après avoir corrigé le réſultat reconnu généralement pour fautif du lemme III de M. Newton) ſont parvenus à un réſultat peu différent de celui qu'a trouvé ce grand Geometre. Il eſt bien vrai que les forces du ſoleil ſur l'anneau & ſur le ſphéroïde (ſuppoſé peu applati) ſont entr'elles comme 1 eſt $\alpha$, en nommant $\alpha$ l'ellipticité du ſphéroïde; mais il ne l'eſt point du tout que ces forces, combinées avec le mouvement de rotation, doivent produire dans l'anneau & dans le ſphéroïde des mouvemens qui ſoient dans ce même rapport de 1 à $\alpha$.

67. Je ne dois point oublier d'ajouter (quoique cette remarque ne ſoit pas eſſentielle au fond de la ſolution) qu'il ne faut pas ſuppoſer que la quantité de la préceſſion ſoit dans tous les cas proportionnelle à l'ellipti-

cité $a$, ſoit que la terre ſoit homogene ou non. Car ſuivant cette hypothéſe, ſoit, par exemple, $a = \frac{1}{180}$, comme le donnent à peu près les dernieres meſures, on auroit (en admettant même d'ailleurs tous les calculs de M. Newton) environ 13″, au lieu d'environ 9″ qu'il trouve dans l'hypothéſe de $a = \frac{1}{230}$; or le mouvement des nœuds n'eſt proportionnel à $a$ que dans le ſphéroïde homogene, & le ſphéroïde n'eſt point homogene ſi $a = \frac{1}{180}$, il ne l'eſt que dans la ſuppoſition de M. Newton, ſavoir de $a = \frac{1}{230}$. Voyez dans nos *Recherches ſur la préceſſion des Equinoxes*, chap. IX, art. 80 & ſuivans, le vrai rapport entre la préceſſion & $a$; on y prouve que ce rapport dépend de la fraction $\frac{\int \Delta d(f^5 F)}{\int \Delta d(f^5)}$, $F$ étant une variable qui dépend de $f$, & qu'on ne peut ſuppoſer conſtante que dans le cas du ſphéroïde homogene, enſorte que dans tout autre cas la fraction dont il s'agit eſt variable, & dépendante de l'arrangement & de la denſité des couches du ſphéroïde.

68. Comme j'ai fait voir dans le chapitre déja cité, (art. 82), quelle ſeroit la différence de la préceſſion des équinoxes dans un ſphéroïde entiérement ſolide, & dans un ſphéroïde en partie ſolide & en partie fluide, je dois encore obſerver à cette occaſion que M. Simpſon s'eſt trompé dans le cor. III de ſon lemme 2, en croyant

que l'action du ſoleil pour déranger l'axe de la terre, ſeroit la même dans un ſphéroïde fluide que dans un ſphéroïde ſolide. Il eſt évident au contraire, que l'effet de cette action doit être très-différent ſur les deux ſphéroïdes, & que c'eſt même par la connexion néceſſaire qui ſe trouve entre les parties du ſphéroïde ſolide qu'on parvient à trouver le mouvement de l'axe; au lieu que des particules fluides qui peuvent en ſe mouvant ſe ſéparer les unes des autres, & faire changer au ſphéroïde de figure, n'ont pas à beaucoup près ſur le mouvement de l'axe de ce ſphéroïde, la même influence que les parties d'un ſphéroïde ſolide.

69. Avant que de finir ces réflexions, je crois devoir réfuter ou prévenir deux objections qu'on pourroit faire ſur ma ſolution. La premiere conſiſte en ce que dans notre premiere ſolution générale, nous avons regardé le centre de la terre comme en repos, quoiqu'il ſoit très-vrai, qu'attendu la figure non ſphérique de la terre, l'action du ſoleil & de la lune ſur chaque partie, ou plutôt la différence de cette action ſur la force qui ſollicite le centre, doit donner au centre un petit mouvement, qui fera que la gravitation du centre ne ſera pas exactement en raiſon inverſe du quarré de la diſtance, & ne ſera pas toujours exactement dirigée dans le même plan. Mais comme l'effet de cette force perturbatrice pour déranger le plan de l'écliptique eſt très-petit, & ſi peu ſenſible que les Aſtronomes n'en tiennent aucun compte dans leurs obſervations, nous avons cru pouvoir & devoir même

faire abſtraction de cette circonſtance, qui n'auroit ſervi qu'à rendre le problême plus compliqué ſans utilité ſenſible.

70. La ſeconde objection regarde notre ſeconde ſolution, par laquelle nous trouvons que la projection de l'axe réel de rotation de la terre, qui varie de poſition à chaque inſtant, doit avoir ſur l'écliptique un mouvement moyen rétrograde, & par conſéquent toujours dirigé dans le même ſens; d'où il paroît s'enſuivre que l'axe réel de rotation doit avoir, ſur la ſurface même du globe, un mouvement moyen toujours dirigé dans le même ſens, & que par conſéquent cet axe de rotation doit, au bout d'un certain temps, s'écarter ſenſiblement & même conſidérablement de l'axe de figure, quoique nous ſachions d'ailleurs par les obſervations, & que nous ayons démontré en conſéquence de notre premiere ſolution, que ces deux axes ſont toujours entr'eux un angle très-petit. Pour réſoudre cette difficulté, il ſuffit de faire attention au mouvement de rotation de la terre autour de ſon axe. La terre ſe meut dans un inſtant quelconque autour d'un de ſes axes; l'inſtant ſuivant, en vertu de l'action du ſoleil & de la lune, l'axe de rotation ſe trouve changé, & tranſporté ſur un diametre qui étoit, par exemple, à gauche du premier axe de rotation, à une diſtance infiniment petite; par ce changement, l'extrémité du premier axe doit avoir un petit mouvement de rotation, qui au bout d'une demi-révolution, le tranſportera à gauche du nouvel axe; & comme

le changement d'axe de rotation ſe fait toujours vers la gauche ( *hyp.* ) on conçoit comment le premier axe de rotation peut, au bout de ce temps, le redevenir, ou exactement, ou à très-peu près, enſorte que les axes réels de rotation ne tomberont jamais que dans une très-petite partie du ſphéroïde aux environs de l'axe de figure. C'en eſt aſſez, ce me ſemble, pour faire diſparoître l'eſpéce de contradiction que les deux ſolutions ſemblent préſenter à cet égard.

*Fin du trente-ſeptiéme Mémoire.*

# AVERTISSEMENT

*Sur les trois Mémoires ſuivans, qui ont pour objet le problême des trois corps, & en particulier la théorie de la lune.*

LES Recherches qu'on va lire, & qui feront l'objet des Mémoires ſuivans, ne ſeront que le développement des réflexions expoſées dans le vingt-neuviéme Mémoire, Tome IV de nos *Opuſcules*.

Je traiterai donc dans ces Mémoires:

1°. De la forme la plus commode & la plus ſimple qu'on puiſſe donner à l'équation différentielle de l'orbite altérée par des forces perturbatrices.

2°. De la maniere la plus ſimple & la plus facile d'intégrer cette équation différentielle.

3°. Des difficultés qui ſe rencontrent dans cette intégration, & en particulier dans la recherche du mouvement de l'apogée.

4°. Des équations dont le calcul eſt le plus délicat dans les formules du mouvement de la lune.

5°. De quelques corrections dont il paroît que les tables de M. Mayer ſont ſuſceptibles.

6°. De la maniere d'abréger le calcul de la latitude de la lune.

7°. Enfin, de l'altération du mouvement moyen de cette planete & des cauſes qui peuvent la produire.

# XXXVIIIME MÉMOIRE.

*De la forme la plus avantageuſe qu'on puiſſe donner à l'équation différentielle de l'orbite lunaire.*

1. JE crois d'abord que l'orbite dans laquelle il faut calculer les mouvemens de la lune, n'eſt pas ſon orbite réelle, mais ſon orbite projettée ſur le plan de l'écliptique. J'ignore pourquoi de ſavans Géometres (*a*), qui ſe ſont très-occupés de cette théorie, en ont uſé autrement; je comprends encore moins pourquoi ces Géometres dans les calculs de la latitude, ont rapporté, non l'orbite de la lune à l'écliptique, mais l'écliptique à l'orbite de la lune; trois raiſons auroient dû, ce me ſemble, les engager à en uſer autrement; la premiere, que les figures & les calculs deviennent par ce moyen plus compliqués; la ſeconde, que l'écliptique eſt ſenſiblement toujours dans le même plan, & que l'orbite de la lune n'y eſt pas, mais qu'elle eſt au contraire une courbe à double courbure très-ſenſible; la troiſiéme, que dans les calculs aſtronomiques on rapporte conſtamment l'orbite

(*a*) Voyez la théorie de la lune de M. Clairaut. Paris 1765, page 37.

de la lune à l'écliptique, & non l'écliptique à l'orbite de la lune. Il eſt vrai que pour avoir le vrai lieu de la lune dans le ciel, lorſqu'on a calculé ſon orbite projettée ſur l'écliptique, il faut avoir égard à la latitude; mais c'eſt un calcul dont on n'eſt pas diſpenſé en ſuivant la méthode que nous improuvons ici, puiſque l'orbite de la lune n'étant ni plane ni immobile, cette méthode demande toujours néceſſairement qu'on connoiſſe à chaque inſtant la poſition du plan de cette orbite par rapport à l'écliptique, pour déterminer le vrai lieu de la lune dans le ciel.

2. Je dis plus : il me ſemble que non-ſeulement dans la théorie de la lune, mais dans celle même de Saturne & de Jupiter, il eſt utile & commode d'employer la projection ſur l'écliptique, au moins pour ce qui concerne le mouvement des nœuds & la variation de l'inclinaiſon. J'en ai dit la raiſon ailleurs (*a*). Mais ce n'eſt pas ici le lieu de m'étendre ſur ce ſujet.

3. Il faut cependant avouer que ſi la lune ſe mouvoit toujours dans un même plan, il y auroit de l'avantage à conſidérer ſon orbite réelle, au lieu de ſon orbite projettée, parce que l'équation de l'orbite réelle ſeroit alors beaucoup plus ſimple que celle de l'orbite projettée, & qu'on n'auroit plus beſoin que d'un calcul facile & très-court pour la réduction à l'écliptique & pour la latitude; mais cet avantage diſparoît, ce me ſemble, entiérement, & devient même un déſavantage réel, lorſ-

(a) *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, ſeconde partie, art. 242.

que

que le plan de l'orbite eſt mobile ; 1°. parce que l'arc décrit par la lune dans un temps donné n'eſt pas alors dans un même plan, mais à double courbure, enſorte que ſuppoſant la lune partir d'un axe fixe, la ſomme des angles réels $dk$, décrits par la lune pendant le temps $t$, n'eſt point égale à l'angle entre le rayon vecteur de la lune au bout du temps $t$, & l'axe fixe qu'on a ſuppoſé ; ce qui rend les calculs plus embarraſſans ; 2°. parce que pour réduire alors le mouvement de la lune à l'écliptique, il faut connoître & calculer ſéparément le mouvement des nœuds & l'inclinaiſon, qui ſe trouvent au contraire renfermés tout naturellement & aſſez ſimplement dans le calcul de l'orbite projettée ; 3°. parce que le plan de l'orbite étant mobile, l'argument de la latitude de la lune n'eſt plus égal à l'arc décrit par cette planete, & ne ſe peut déterminer, au moyen de l'arc décrit, que par un calcul aſſez délicat ; 4°. parce que l'angle d'élongation du ſoleil à la lune, d'où dépendent principalement les forces perturbatrices, étant formé par des lignes qui ne ſont pas toujours dans le même plan, devient alors beaucoup plus compliqué & plus difficile à calculer, l'inclinaiſon réciproque des deux orbites & le mouvement des nœuds devant influer dans l'évaluation de cet angle. Il ne ſera pas inutile d'entrer dans quelque détail ſur ce ſujet, pour prévenir les erreurs où pourroient tomber les Géometres qui n'y feroient pas aſſez d'attention.

4. Si la lune parcourt dans ſon orbite réelle l'angle $dk$, & que pendant ce temps le nœud avance de la quantité

$d\zeta$ dans le même sens que la lune, il n'est pas difficile de faire voir que la distance de la lune au nœud, qui auroit augmenté de la quantité $dk$ si le nœud eût été immobile, n'augmentera que de la quantité $dk - d\zeta \cos. \rho$, en nommant $\rho$ la tangente de l'inclinaison; en effet, soit $\omega$ la distance de la lune au nœud, la lune étant supposée immobile, il est aisé de voir que la distance $\omega$ de la lune (supposée immobile) au nœud supposé mobile, diminue de la quantité $d\zeta \cos. \rho$, $d\zeta$ étant l'hypothénuse d'un triangle rectangle infiniment petit, dont $d\zeta \cos. \rho$ & $d\zeta \sin. \rho$ sont les côtés; d'où il s'enfuit que la lune étant supposée parcourir l'angle $dk$, la distance au nœud deviendra $\omega + dk - d\zeta \cos. \rho$; donc on aura $d\omega = dk - d\zeta \cos. \rho$ & $\omega = k - \int d\zeta \cos. \rho$. Soit maintenant $z'$ l'angle parcouru par le soleil vu par la terre, durant le temps que la lune parcourt la somme des angles $dk$, ou aura $z' - \zeta$ pour la distance du lieu de la terre ou du soleil au nœud; soit enfin $u'$ la distance du nœud au lieu de la terre vu du soleil, & projetté sur l'orbite de la lune, $t$ la différence de $k$ & de $z'$, & $t'$ l'angle d'élongation du lieu de la lune au lieu de la terre, projetté sur l'orbite de la lune, on aura $t = k - z'$ & $t' = \omega - u'$, d'où l'on tire, à cause de $\omega = k - \int d\zeta \cos. \rho$, $t' = t + z' - u' - \int d\zeta \cos. \rho$.

5. M. Clairaut dans sa théorie de la lune, page 40, ne donne que l'équation $t' = t + z' - \zeta - u''$, $z' - \zeta$ étant ici ce qu'il appelle $u$; & cette équation ne coincide avec la nôtre que dans le cas où $\rho = 0$, c'est-à-dire où

les deux orbites ſont dans le même plan, ou dans celui de $\zeta = 0$, qui eſt le cas de l'immobilité de l'orbite lunaire. Il eſt vrai que dans l'endroit cité, M. Clairaut ſuppoſe ou ſemble ſuppoſer que le nœud ſoit regardé comme immobile, ce qui donneroit en effet les termes $-\zeta$ & $-\int d\zeta$ cof. $p = 0$; mais il paroît enſuite faire uſage de la même équation $\iota' = \iota + \chi' - \zeta - u'$, dans la page 70 de la même théorie, où il regarde le nœud comme mobile. On peut auſſi remarquer que dans cette page 70, il ſubſtitue à $\iota$ la valeur $\chi - \chi'$ qui eſt chez lui $\nu - \chi$, & qui d'après ſes ſuppoſitions devroit, ce me ſemble, être $\nu - \chi + \zeta$, ou, en ſuivant ſes dénominations, $\nu - \chi - q$, puiſqu'il ſuppoſe que $q$ eſt le mouvement du nœud contre l'ordre des ſignes, & qu'à la page 40 il ſuppoſe $\iota = \nu - u$, & à la page 70, $u = \chi + q$.

6. Je crois pouvoir conclure de ces remarques, que l'analyſe par laquelle cet habile Géometre a calculé les forces perturbatrices dans l'orbite réelle de la lune, ne paroît pas exacte. Voici, ce me ſemble, la ſource de ſa mépriſe; j'invite ceux qui ſont en état d'en juger à examiner ſoigneuſement cet article de ſa théorie.

7. M. Clairaut remarque (pag. 69) que ſi $B$ (*Fig.* 32) eſt le lieu initial du nœud lorſque $\iota = 0$, & qu'on mene $BB'$ perpendiculaire à l'écliptique, laquelle ligne $BB'$ rencontre en $B'$ le plan $LTB'N$ où l'on ſuppoſe que ſe trouve la lune; M. Clairaut remarque, dis-je, qu'en nommant l'angle $BTN$, $q$, on a l'angle $B'TN = q + \frac{1}{2}(1 - \text{cof. } p)$ ſin. $2q$; d'où il conclut, d'après ſes déno-

minations, que la distance de la lune au nœud sera à très-peu près $\nu + q + \frac{1}{2}(1 - \text{cos. } \rho) \text{ sin. } 2q$, ou, suivant nos dénominations, $k - \zeta - \frac{1}{2}(1 - \text{cos. } \rho) \text{ sin } 2\zeta$; au lieu que cette distance est réellement $k - \int d\zeta \text{ cos. } \rho$, ce qui ne s'accorde pas avec l'équation donnée par M. Clairaut. Il est très-vrai que $B'TN = q + \frac{1}{2}(1 - \text{cos. } \rho) \text{ sin. } 2q$ à très-peu près, comme l'avance M. Clairaut; mais il n'en faut pas conclure que l'angle $LTN = \nu + q + \frac{1}{2}(1 - \text{cos. } \rho) \text{ sin. } 2q$, même à peu près, parce que $B'TL$ n'est ni exactement ni à peu près égal à $\nu$ ou à $\int dk$; car $B'TL$ est $= \omega - B'TN$, ou, en suivant les dénominations de M. Clairaut, & remarquant que $\omega = k - \int d\zeta \text{ cos. } \rho, \nu + \int dq \text{ cos. } \rho - q - \frac{1}{2}(1 - \text{cos } \rho) \times \text{sin. } 2q$ qui n'est pas la même chose que $\nu$. D'ailleurs l'orbite de la lune n'étant pas plane ni immobile, on suppose faussement que la ligne $TB'$, qui répond à la ligne $TB$ (vrai lieu du nœud dans sa situation initiale) représente le lieu que le nœud occupoit sur l'orbite de la lune lorsque $t = 0$, ou la commune section de cette orbite avec l'écliptique. Pour avoir la distance réelle du lieu de la lune au lieu initial & primitif du nœud, c'est-à-dire l'angle $LTB$, il faut considérer que $LTN$ étant $= \omega$, & $BTN = q$ ou $-\zeta$, & l'angle d'inclinaison de l'orbite ou du plan $NTL = \rho$, le cos. de $LTB$ sera, comme on le peut voir aisément, $\frac{\text{cos. } \omega}{\text{cos. } q} + (\text{sin. } \omega \text{ cos. } \rho - \text{cos. } \omega \text{ tang. } q) \text{ sin. } q =$ (en mettant pour cos. $q$ sa valeur cos. $-\zeta$ ou cos. $\zeta$, & pour tang. $q$ & sin. $q$, leurs va-

leurs tang. $-\zeta$ & sin. $-\zeta$) $\frac{\text{cos. }\omega}{\text{cos. }\zeta}$ + (sin. $\omega$ cos. $\rho$ —
cos. $\omega$ tang. $-\zeta$) sin. $-\zeta = \frac{\text{cos. }\omega}{\text{cos. }\zeta}$ + sin $\omega$ cos. $\rho$ sin.
$-\zeta - \frac{\text{cos. }\omega \text{ sin. }\zeta^2}{\text{cos. }\zeta} = \text{cos. }\omega \text{ cos. }\zeta - \text{sin }\omega \text{ cos. }\rho \text{ sin. }\zeta$
$= \text{cos. }(\omega + \zeta) + \text{sin. }\omega\,(1 - \text{cos. }\rho) \text{ sin. }\zeta = \text{cos. }(k + \zeta - \int d\zeta \text{ cos. }\rho) + \text{sin. }\omega\,(1 - \text{cos. }\rho \text{ sin. }\zeta$; & l'on se souviendra toujours que $k$ ou $\int d k$ n'est pas l'angle entre le lieu de la lune & la ligne avec laquelle coincidoit la ligne des nœuds lorsque $t$ étoit $= 0$.

8. Mais, dira-t-on, ne peut-on pas regarder la lune comme se mouvant dans un plan immobile, par rapport auquel l'écliptique change de position, enforte que l'intersection $N$ de ce plan avec l'écliptique change continuellement, auquel cas $\nu$ sera la distance du lieu de la lune à la ligne fixe $B' T$, qui représente la position initiale du nœud? Je réponds que cette supposition, quoique peu naturelle, est sans doute permise; mais qu'alors on ne doit pas supposer, 1°. que la perpendiculaire $B' B$, menée du plan $LTN$ sur l'écliptique, détermine sur l'écliptique le lieu $B$ qu'occupoit le nœud de la lune dans sa premiere situation; 2°. que le calcul des forces perturbatrices deviendra beaucoup plus compliqué; car outre les forces perturbatrices qui viennent de l'action du soleil, & qui agissent dans le plan de l'orbite lunaire, il faudra encore, dans l'hypothèse dont il s'agit, en ajouter d'autres, qui résultent de ce que l'orbite de la lune n'est pas réellement dans le même plan; je m'explique. Sup-

poſons que depuis le point $B'$ (*Fig.* 33) d'où la lune eſt partie, cette planete ſe ſoit toujours mue dans le même plan juſqu'en $L$, en vertu d'une force réciproquement proportionnelle au quarré de la diſtance, & ſans aucune force perturbatrice; ſuppoſons de plus qu'au point $L$, tandis que la lune tend à décrire l'arc $L\,l$ dans le plan où elle étoit, ſans aucune force perturbatrice dans le plan de ſon orbite, il ſurvienne uniquement une force $l\lambda$ perpendiculaire à ce plan $TLB'$, laquelle lui faſſe décrire l'arc $L\lambda$, enſorte que l'angle $LTB' = v$ devienne $\lambda TB'$; il eſt aiſé de voir que l'angle $\lambda TB'$ ne ſera pas égal à l'angle $lTB'$, que la lune auroit parcouru dans le même temps, ſi elle eut continué à ſe mouvoir dans le même plan, ſans aucune force perturbatrice dans le plan de ſon orbite, & ſans aucune force perpendiculaire à ce plan; & que par conſéquent, le ſeul mouvement ſuppoſé du plan de l'orbite lunaire, donne des forces perturbatrices auxquelles il faut avoir égard dans le calcul. Il arrive ici préciſément la même choſe, que ſi un corps $B'$ (*Fig.* 34) décrivoit d'abord une droite $BL$ d'un mouvement uniforme, & qu'au point $L$ il fût détourné de ſon chemin $L\,l$, par une force $l\lambda$ perpendiculaire à $BLl$; l'angle $\lambda TB'$ ſeroit différent de l'angle $lTB$, enſorte que la différence ſeroit finie au bout d'un temps fini; par la même raiſon que dans le mouvement d'un corps qui décrit un cercle, les écarts infiniment petits du ſecond ordre, que le corps ſubit à chaque inſtant de ſa direction rectiligne, produiſent au bout d'un temps fini un écart

fini. Donc si dans le plan $\lambda T B'$, (*Fig.* 33) on prend un angle $\rho T B' = L T B'$, $\lambda$ étant le lieu de la lune au bout d'un temps quelconque, & $L$ étant le lieu que la lune auroit occupé si elle se fût toujours mue dans le même plan, les angles $\rho T \lambda$, & $L T l$ ne seront pas égaux: il y aura donc une force perturbatrice qui tendra à altérer l'angle $L T l$.

9. Il paroît donc évident, que dans les calculs de la page 70 de la théorie de M. Clairaut déja citée, il faut mettre à la place de $\epsilon$, $\epsilon + \zeta - \int d\zeta \cos \rho$, ce qui doit rendre nécessairement les calculs beaucoup plus longs & plus compliqués. Nous avons cru devoir faire ici cette remarque pour l'utilité de ceux qui pourront travailler dans la suite à perfectionner la théorie de la lune, & qui voudroient calculer les mouvemens de cette planete par rapport à son orbite réelle; quant à nous, lorsque nous parlerons de la lune dans la suite de cet écrit, ce sera toujours de la lune, censée projettée sur le plan de l'écliptique; d'autant que l'inclinaison de l'orbite lunaire étant fort petite, cette considération permettra de négliger beaucoup de termes dans l'intégration.

10. Soit donc dans cette hypothèse, de l'orbite de la lune, rapportée à l'écliptique;

| | |
|---|---|
| la vîtesse initiale de la lune . . . . . | $g$ |
| sa distance initiale à la terre . . . . . | $a$ |
| le sinus de l'angle de projection . . . . . | $b$ |
| la masse de la terre . . . . . | $T$ |
| celle de la lune . . . . . | $L$ |

celle du soleil . . . . . $S$
le rayon vecteur . . . . . $x$
l'angle décrit par la lune . . . . . $z$
le temps . . . . . $t$
l'angle décrit par la terre . . . . . $z'$
l'angle décrit par le nœud . . . . . $\zeta$
la tangente de l'inclinaison . . . . . $m$
la distance de la lune au nœud . . . . . $V$
la distance du lieu de la terre au nœud . . . . $v$
la force dans le sens du rayon vecteur . . . . $\downarrow$
la force perpendiculaire à ce rayon . . . . . $\pi$.

11. En faisant $a = 1$, $u = \frac{1}{x}$ ou $\frac{aa}{x}$, on aura les deux équations (a) $ddu + u\,dz^2 - \frac{dz^2}{h^2 u^2 g^2} \times \frac{\downarrow - \frac{\pi\,du}{u\,dz}}{1 + 2\int \frac{\pi\,dz}{u^3 g^3 h^2}} = 0$, & $dz = \frac{x\,x\,dz}{gh\sqrt{\left(1 + 2\int \frac{\pi\,dz}{u^3 g^3 h^2}\right)}}$.

12. Si au lieu d'avoir la valeur de $u$ en $z$, on veut l'avoir en $t$, on remarquera d'abord que $dt$ (*Recherches sur le système du Monde*, chap. II, page 14) $= \frac{x\,x\,dz}{gh} - \frac{dt}{gh}\int \pi\,x\,dt$; ce qui donne $dz = \frac{gh\,dt}{xx}\left(1 + \int \frac{\pi\,x\,dt}{gh}\right) = ghuu\,dt\,(1 + \omega)$, en supposant $\int \frac{\pi\,x\,dt}{gh} = \omega$; & l'équation $ddu + u\,dz^2 +$ &c. trouvée ci-dessus, art. 11, pourra se mettre sous la forme sui-

(a) *Recherches sur le système du Monde*, première Partie, chap. 2.

vante

vante; $d\left(\frac{du}{dz}\right) + u\,dz - \frac{dt^2}{x^4\,dz} \times \left(\frac{\downarrow}{uu} - \frac{\pi\,du}{u^3\,dz}\right) = 0$, ou $d\left(\frac{du}{uu\,ghdt\,(1+\omega)}\right) + u^3\,ghdt\,(1+\omega) - \frac{u^2\,dt}{gh(1+\omega)} \times \left(\frac{\downarrow}{uu} - \frac{\pi\,du}{u^3\,gh(1+\omega)}\right) = 0$. Substituant pour $u$ sa valeur $\frac{1}{x}$, différentiant & réduisant, on aura, $dt$ étant pris pour constant, $-\frac{ddx(1+\omega)}{ghdt} + \frac{dx\,d\omega}{ghdt} + \frac{ghdt(1+\omega)^3}{x^3} - \frac{\downarrow dt}{gh}(1+\omega) - \frac{\pi x\,dx}{g^2h^2} = 0$; qui se réduit encore (à cause de $d\omega = \frac{\pi x\,dt}{gh}$) à la forme assez simple $-ddx + \frac{g^2h^2dt^2(1+\omega)^3}{x^3} - \downarrow dt^2 = 0$; de plus, l'équation pour trouver $dz$ sera $dz = \frac{ghdt}{xx}(1+\omega)$.

13. Ces équations paroissent beaucoup moins compliquées que les précédentes de l'art. 11; & elles ont d'ailleurs cet avantage, que par leur secours, on détermine tout d'un coup le rayon $x$ & le lieu $z$ par le mouvement moyen $t$, ainsi que les calculs astronomiques le demandent, & qu'on n'est point obligé d'avoir recours à des calculs assez pénibles pour trouver la valeur de $z$ en $t$, après avoir cherché d'abord celle de $x$ & de $t$ en $z$. Il paroît donc qu'on ne doit point balancer à préférer ces deux dernieres équations pour rendre les calculs de la lune beaucoup plus courts & plus simples, quoique tous

les Géometres qui jusqu'à présent ont traité la théorie de la lune, ayent suivi une méthode contraire.

14. Il y a cependant ici un inconvénient auquel il est nécessaire d'obvier; c'est que le calcul du mouvement de l'apogée devient par ces dernieres formules beaucoup plus long & plus épineux que par les premieres. En effet, supposons pour un moment la lune sans aucune force perturbatrice, ensorte que $\pi = 0$, & que $\psi = \frac{T+L}{x^2} = (T+L)u^2$; l'équation $dd u + u dz^2$, &c. entre les $u$ & les $z$, qui se réduit alors à cette forme $dd u + u dz^2 + B dz^2 = 0$ ($B$ étant une constante) fait voir tout d'un coup, & par le calcul le plus simple, que l'apogée est immobile; ce qui ne se voit pas de même en faisant usage de l'équation $-dd x + \frac{g^2 h^4 dt^2}{x^3}$, &c. entre les $x$ & les $t$. Il n'est pas même facile de s'en assurer, le mouvement de l'apogée ne pouvant se déterminer dans cette derniere équation que par une serie infinie, dont la valeur ne sera jamais exactement égale à l'unité, comme elle le doit être, mais seulement en approchera toujours de plus en plus. Cette difficulté se fera sentir, à plus forte raison, lorsque l'apogée aura un mouvement réel, comme dans la théorie de la lune, & que la détermination de ce mouvement dépendra d'une équation plus compliquée, dans laquelle $\pi$ & $\omega$ ne seront pas $= 0$, ni $\psi$ simplement égal à $\frac{T+L}{x^2}$.

15. Pour remédier à cet inconvénient, on considérera

que le mouvement moyen de l'apogée de la lune eſt connu par les obſervations; on ſait d'ailleurs par d'autres méthodes que la théorie donne ce mouvement à peu près tel qu'il doit être; ainſi on ſuppoſera ce mouvement connu; par-là on ſe débarraſſera tout-à-fait des équations qui doivent donner le mouvement de l'apogée, & qui ſeroient dans l'hypothèſe préſente les plus compliquées de toutes.

16. On doit ſe faire d'autant moins de ſcrupule d'éviter le calcul de l'apogée par ce moyen, qu'on eſt obligé, même dans le cas où l'on cherche la valeur de $x$ par l'équation entre $x$ & $z$, de ſuppoſer le mouvement de l'apogée tel que les obſervations le donnent, pour pouvoir calculer avec une exactitude ſuffiſante les divers termes de la valeur de $x$. Mais ſi ce mouvement étoit ignoré ou mal connu, comme dans la théorie de Saturne & de Jupiter, & dans celle de leurs ſatellites, alors il paroît qu'on ſeroit obligé de recourir à la premiere méthode, à celle qui détermine $x$ par l'équation entre $x$ & $z$. C'eſt donc dans la ſeule théorie de la lune, qu'il paroît plus utile & plus ſimple de ſe ſervir des équations qui donnent la valeur de $x$ en $t$ & de $z$ en $t$.

17. Pour rendre en ce cas le calcul de l'orbite encore plus commode, & plus conforme aux opérations aſtronomiques, on chaſſera $dt$ des deux équations par le moyen de l'équation $dt = \mathfrak{C}\, dZ$, $Z$ étant le moyen mouvement de la lune, & $\mathfrak{C}$ un coefficient conſtant indéterminé, qu'on peut ſuppoſer ſi l'on veut $= 1$, pour plus de

facilité ; on remarquera de plus, que le coefficient de $dZ$ dans la valeur de $d\zeta = \frac{ghC\,dZ}{xx}\left(1 + \int\frac{\pi x C\,dZ}{gh}\right)$, doit être égal à l'unité. On fera encore, afin de rendre les calculs plus simples, non-seulement $C = 1$, mais $h = 1$. On supposera enfin $\frac{T+L}{gg} = a + e$, $e$ étant une quantité fort petite par rapport à $a$, puisque si l'orbite de la lune étoit circulaire, & sans forces perturbatrices, on auroit $\frac{T+L}{gg} = a$. De plus, en désignant par un trait les quantités correspondantes dans le mouvement du soleil, on aura de même $d\zeta' = \frac{g'C'\,dZ'.a'}{x'x'}$; $\frac{S+T}{g'^2} = a' + e'$, ou plus simplement $\frac{S}{g'^2} = a' + e'$, & on remarquera, 1°. que le coefficient $C'$ de $dZ'$ doit être à celui de $dZ$, comme $n$ est à 1; d'où l'on voit que $C'\,dZ' = n\,C\,dZ = n\,dZ$; 2°. qu'après cette substitution, le coefficient de $dZ$ dans la valeur de $d\zeta'$, doit être $= \pi$, ou celui de $dZ' = 1$. Donc si on fait le coefficient de $dZ = A$, celui de $dZ' = B'$, on fera d'abord évanouir $g'$, en supposant $A = 1$, $g'$ en supposant $B' = 1$, & enfin $T + L$ & $S$ par le moyen des équations $T + L = g^2(a + e)$, $S = g'^2(a' + e')$. Ces substitutions faites, il ne restera dans l'expression de $\zeta$ que la seule inconnue $\frac{e}{a}$, & dans celle de $x$ que la seule inconnue $a$; & ces inconnues se détermineront; la

premiere, par l'obſervation du mouvement de la lune, qui fera connoître ſon excentricité ; la ſeconde, par une bonne obſervation de la parallaxe.

18. Si l'on veut avoir l'équation du mouvement de la lune dans ſon orbite réelle, on nommera l'angle réel décrit par la lune durant le temps $dt$ . . . . . $dk$
le rayon vecteur . . . . . $x'$
la force dans le ſens du rayon . . . . . $\psi'$
la force perpendiculaire au rayon, dans le plan où ſe trouve la lune au bout du temps $t$ . . . . . $\pi'$
l'angle d'inclinaiſon de l'orbite lorſque $t = 0$ . . $\lambda$
la vîteſſe réelle de projection de la lune . . . . $g'$
le ſinus de l'angle réel de projection . . . . $h'$.

19. Cela poſé, on remarquera d'abord que quoique l'orbite de la lune ſoit à double courbure, cependant l'équation différentielle entre les $x$ & les $dk$, doit être la même que ſi cette orbite étoit plane, tout le reſte étant d'ailleurs égal. Car la force qui agit à chaque inſtant perpendiculairement au plan de l'orbite de la lune, & qui lui donne cette double courbure, n'a d'autre effet que de déranger la lune du plan qu'elle décrit, de plier pour ainſi dire ſon orbite, & ne change rien d'ailleurs, ni à la valeur du rayon vecteur, ni à l'angle compris entre deux rayons vecteurs infiniment proches. Il arrive ici préciſément la même choſe qu'à un corps qui eſt pouſſé continuellement par une force perpendiculaire à ſa direction ; la vîteſſe de ce corps n'en eſt point altérée ; de même ici, en ſuppoſant $dt$ conſtant, les valeurs

de $d\,d\,x$ ou $d\,d\,u$, & $d\,d\,k$, restent les mêmes que si la lune ne sortoit point du plan où elle est au bout du temps $t$; & par conséquent, supposant $d\,k$ constant, la valeur de $d\,d\,u$ reste aussi la même.

20. On aura donc la même équation que ci-dessus, (art. 11) en mettant $d\,k$ au lieu de $d\,\zeta$, $u' = \frac{1}{x'}$ au lieu de $u$, $\psi'$ au lieu de $\psi$, &c. On remarquera de plus, 1°. que $g'\,g' = \frac{g\,g}{\cos.\lambda^2}$, en supposant $h$ & $h' = 1$, pour simplifier le calcul, lorsque $t = 0$; 2°. que la force $\psi'$ est composée de deux autres, l'une $= \frac{T+L}{x'\,x'} = (T+L)\,u'\,u'$, l'autre que je nomme $\varphi$, & qui sera la force perturbatrice dans le sens du rayon vecteur, enforte que $\psi'$ sera $= (T+L)\,u'\,u' + \varphi$.

21. Maintenant, soit $L\,S\,N$ (*Fig.* 35) la projection de l'orbite lunaire sur le plan de l'écliptique, $L$ le lieu de la lune ainsi projettée, $N$ le nœud, $T\,S$ la ligne qui joint les centres de la terre & du soleil; soit de plus $\omega$ la distance réelle de la lune au nœud, on aura (art. 4) $\omega = k - \int d\,\zeta \cos. p$; & en conservant les noms donnés ci-dessus, on trouvera $\frac{\cos. V}{\sqrt{(1+m\,m\sin. V^2)}} = \cos.\omega$; d'où l'on tire $\cos. V = \frac{\cos.\omega\sqrt{(1+m\,m)}}{\sqrt{(1+m\,m\cos.\omega^2)}}$, ou, à cause de $m = \frac{\sin. p}{\cos. p}$, $\cos. V = \frac{\cos.\omega}{\sqrt{(\cos. p^2+\sin. p^2\cos.\omega^2)}} = \frac{\cos.\omega}{\sqrt{(1-\sin. p^2\sin.\omega^2)}}$; $\sin. V^2 = \frac{\cos. p^2\sin.\omega^2}{\cos. p^2+\sin. p^2\cos.\omega^2}$

ou $\frac{\text{sin.}\,\omega^2}{1+mm\,\text{cos.}\,\omega^2}$, ou $\frac{\text{sin.}\,\omega^2\,\text{cos.}\,\varrho^2}{1-\text{sin.}\,\varrho^2\,\text{sin.}\,\omega^2}$; & $1+mm\,\text{sin.}\,V^2=\frac{1}{1-\text{sin.}\,\varrho^2\,\text{sin.}\,\omega^2}$.

22. Soit l'angle $LTS$ . . . . . $\theta$
l'angle réel entre le rayon $TS$, & le rayon vecteur $x'$ de la lune . . . . . $\theta'$
la projection de cet angle sur le plan de l'orbite lunaire, c'est-à-dire sur le plan où se trouve la lune au bout du temps $t$ . . . . . $\theta''$
on verra facilement que $\frac{\text{cos.}\,\theta}{\sqrt{(1+mm\,\text{sin.}\,V^2)}}=\text{cos.}\,\theta'$; ou $\text{cos.}\,\theta'=\text{cos.}\,\theta\sqrt{(1-\text{sin.}\,\varrho^2\,\text{sin.}\,\omega^2)}$; & en supposant l'angle $STN$ . . . . . $\pi$
& sa projection sur le plan de l'orbite lunaire . . . $\pi'$
on aura $\text{tang.}\,\pi'$ ou $\frac{\text{sin.}\,\pi'}{\text{cos.}\,\pi'}=\text{tang.}\,\pi\,\text{cos.}\,\varrho$, ou $\frac{\text{sin.}\,\pi}{\text{cos.}\,\pi}\text{cos.}\,\varrho$; d'où il s'ensuit que $\text{sin.}\,\pi'^2=\frac{\text{sin.}\,\pi^2\,\text{cos.}\,\varrho^2}{\text{cos.}\,\pi^2+\text{sin.}\,\pi^2\,\text{cos.}\,\varrho^2}$;
ou $\text{sin.}\,\pi'=\frac{\text{sin.}\,\pi\,\text{cos.}\,\varrho}{\sqrt{(1-\text{sin.}\,\pi^2\,\text{sin.}\,\varrho^2)}}$; & $\text{cosinus}\,\pi'=\frac{\text{cos.}\,\pi}{\sqrt{(1-\text{sin.}\,\pi^2\,\text{sin.}\,\varrho^2)}}$; or $\text{cos.}\,\theta''=\text{cos.}\,(\omega-\pi')$, & $\text{sin.}\,\theta''=\text{sin.}\,(\omega-\pi')$; donc $\text{cos.}\,\theta''=\frac{\text{cos.}\,\omega\,\text{cos.}\,\pi+\text{sin.}\,\omega\,\text{sin.}\,\pi\,\text{cos.}\,\varrho}{\sqrt{(1-\text{sin.}\,\pi^2\,\text{sin.}\,\varrho^2)}}$;
& $\text{sin.}\,\theta''=\frac{\text{sin.}\,\omega\,\text{cos.}\,\pi-\text{cos.}\,\omega\,\text{sin.}\,\pi\,\text{cos.}\,\varrho}{\sqrt{(1-\text{sin.}\,\pi^2\,\text{sin.}\,\varrho^2)}}$.

23. Soit la force parrallèle à $TS$ qui dérange la lune du plan de son orbite . . . . . $\rho'$
cette force étant décomposée en deux, l'une perpendi-

culaire au plan où eſt la lune, l'autre dans la direction de la projection de $TS$ ſur ce plan; cette derniere ſera $= \frac{\varrho' \sqrt{(\text{cof.}\,\theta^2\,\text{cof.}\,\pi^2 + \text{cof.}\,\theta^2\,\text{ſin.}\,\pi^2\,\text{cof.}\,\varrho^2)}}{\text{cof.}\,\theta} =$ $\frac{\varrho' \sqrt{(\text{cof.}\,\theta^2 - \text{cof.}\,\theta^2\,\text{ſin.}\,\pi^2\,\text{ſin.}\,\varrho^2)}}{\text{cof.}\,\theta} = \rho' \sqrt{(1 - \text{ſin.}\,\pi^2\,\text{ſin.}\,\rho^2)}$.

Or nommant cette derniere force $\rho''$, on a $\pi' = \rho''$ ſin. $\theta''$; & la force perturbatrice $\phi$, qui agit dans la direction du rayon, eſt compoſée de deux forces, l'une $= \frac{S x'}{B'^3}$; $B'$ étant la diſtance du ſoleil à la lune, l'autre $= \rho'' \times$ cof. $\theta''$. Donc, en mettant pour ſin. $\theta''$ & cof. $\theta''$ leurs valeurs (art. 22), on aura $\pi' = \rho'$ (ſin. $\omega$ cof. $\pi$ — cof. $\omega \times$ ſin. $\pi$ cof. $\rho$); & l'autre force $\rho''$ cof. $\theta'' = \rho'$ (cof. $\omega$ cof. $\pi$ + ſin. $\omega$ ſin. $\pi$ cof. $\rho$).

24. Soit donc $1 - \text{cof.}\,\rho = \downarrow$, on aura $\pi' = \rho'$ (ſin. $(\omega - \pi) - \text{cof.}\,\omega$ ſin. $\pi . \downarrow$), & l'autre force $= \rho'$ (cof. $(\omega - \pi) - \text{ſin.}\,\omega$ ſin. $\pi . \downarrow$): or ſoit ſuppoſé $\rho'$ proportionnelle à cof. $\theta'$, comme il arrive dans la lune, c'eſt-à-dire $\rho' = K$ cof. $\theta' =$ (art. 22) $K$ cof $\theta \sqrt{(1 - \text{ſin.}\,\rho^2\,\text{ſin.}\,\omega^2)}$, on remarquera que $\theta = V - \pi$; & qu'ainſi cof. $\theta =$ cof. $V$ cof. $\pi$ + ſin. $V$ ſin. $\pi = \frac{\text{cof.}\,\pi\,\text{cof.}\,\omega + \text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,\omega\,\text{cof.}\,\varrho}{\sqrt{(1 - \text{ſin.}\,\varrho^2\,\text{ſin.}\,\omega^2)}} =$ $\frac{\text{cof.}\,(\omega - \pi) - \text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,\omega . \downarrow}{\sqrt{(1 - \text{ſin.}\,\varrho^2\,\text{ſin.}\,\omega^2)}}$; d'où l'on voit que la force $\pi'$; & l'autre force perturbatrice $\rho''$ cof. $\theta''$ ſeront reſpectivement $K$ (cof. $(\omega - \pi) - \downarrow$ ſin $\pi$ ſin. $\omega) \times$ (ſin. $(\omega - \pi) - \downarrow$ ſin. $\pi$ cof. $\omega) = K \left( \frac{\text{ſin.}\,2\omega - 2\pi}{2} - \frac{\downarrow \text{ſin.}\,2\pi}{2} + \frac{\downarrow^2 \text{ſin.}\,\pi\,\text{ſin.}\,2\omega}{2} \right)$,

&

& $K(\text{cos.}(\omega-\nu)-\psi\,\text{sin.}\,\nu\,\text{sin.}\,\omega)\times(\text{cos.}(\omega-\nu)-\psi\times\text{sin.}\,\nu\,\text{sin.}\,\omega)=K(\text{cos.}(\omega-\nu)-\psi\,\text{sin.}\,\nu\,\text{sin.}\,\omega)^2$; quantités dans lesquelles on substituera au lieu de $\omega$ sa valeur $k-\int d\zeta\,\text{cos.}\,p$, & au lieu de $\nu$ sa valeur $\zeta'-\zeta$; ce qui donnera $\omega-\nu=k-\zeta'+\zeta-\int d\zeta\,\text{cos.}\,p=k-\zeta'+\int\psi d\zeta$.

25. On voit par ces détails, 1°. qu'au lieu de l'angle $\zeta'-\zeta'$ qui entre dans l'expression des forces perturbatrices dans l'orbite projettée, il faudroit, si on prenoit $d\zeta$ pour le mouvement réel de la lune dans son orbite véritable, mettre $\zeta-\int d\zeta\,\text{cos.}\,p+\zeta-\zeta'$, ce qui rendroit le calcul beaucoup plus compliqué, parce que $p$ est une quantité variable; 2°. qu'outre cela l'expression des forces accélératrices, qui dans l'orbite projettée ne contient que des sin. & cos. de $\zeta-\zeta'$, contiendra dans l'orbite réelle d'autres quantités que des sinus & cosinus de $\zeta-\int d\zeta\times\text{cos.}\,p+\zeta-\zeta'$. Il est vrai que la considération de l'orbite projettée entraînera quelques termes qui n'auroient pas lieu dans l'orbite réelle, & qui viennent de ce que la force centrale de la lune vers la terre, qui est simplement $=\frac{T+L}{x'^2}$ dans l'orbite réelle, est $=\frac{T+L}{x^2(1+mm\,\text{sin.}\,V^2)^{\frac{3}{2}}}$ dans l'orbite projettée; mais les calculs que ces termes occasionneront paroissent infiniment plus simples & plus faciles que ceux qui résultent des termes produits par la considération de l'orbite réelle. D'ailleurs les termes qui résultent de cette modification dans la valeur de la force centrale, sont ceux mêmes qu'il auroit fallu calculer pour réduire le lieu de la lune au plan de l'écliptique, opé-

ration qui devient inutile quand on considere dans la théorie l'orbite projettée. Le calcul n'eſt donc que peu ou point du tout augmenté par la valeur de la force centrale dans l'orbite projettée. Ainſi, tout mis en balance, il paroît conſtant que la conſidération de l'orbite projettée abrége beaucoup le calcul.

26. Puiſque $k - \int d\zeta \text{ cof. } \rho$ eſt la diſtance réelle de la lune au nœud, il eſt aiſé de voir que cette diſtance, rapportée à l'écliptique, ſera $k - \int d\zeta \text{ cof. } \rho + \varphi$, $\varphi$ étant une quantité qui ne renferme que des ſin. & coſinus, & qui ſe déterminera (art. 21) par l'équation cof. $V = \frac{\text{cof. } \omega}{\sqrt{(1 - \text{ſin. } \varrho^2 \text{ ſin. } \omega^2)}}$; ou cof. $(\omega - \varphi) = \frac{\text{cof. } \omega}{\sqrt{(1 - \text{ſin. } \varrho^2 \text{ ſin. } \omega)^2}}$, d'où l'on tire aiſément la valeur de $\varphi$. Donc le mouvement réel de la lune rapporté à l'écliptique ſera $k - \int d\zeta \text{ cof. } \rho + \zeta + \varphi$; de plus, ſi $\nu$ ou plutôt $\int d\nu = k$ exprime le mouvement vrai de la lune dans ſon orbite, & $z$ ſon mouvement vrai dans l'écliptique, on aura $\zeta = \omega z + \theta$, $\omega$ étant une quantité négative à cauſe du mouvement rétrograde des nœuds, & exprimant de plus le rapport exact du mouvement moyen des nœuds au mouvement moyen de la lune, & $\theta$ étant une quantité compoſée de ſinus; & ſi on fait $\psi$ ou $1 - \text{cof. } \rho = \psi' + \sigma$, $\psi'$ étant une conſtante, & $\sigma$ une quantité compoſée de coſinus, on aura $\int d\zeta \text{ cof. } \rho = \zeta - \zeta\psi' - \int \sigma d\zeta$; enfin, on ſe ſouviendra que l'angle $\omega - \pi$, qui entre dans l'expreſſion des forces perturbatrices, eſt (art. 24) $k - z' + \int \psi d\zeta = \nu - z' + \zeta\psi' + \int \sigma d\zeta = \nu - z'$

$+\zeta\psi''+\varpi$, $\varpi$ ne renfermant que des finus ; c'eſt pourquoi, en appellant $m$ le coefficient qui marque le mouvement de l'apogée dans l'orbite réelle, & $Z'$ l'angle qui doit repréſenter le mouvement moyen de la lune dans l'orbite réelle, & qui ne doit jamais différer de l'angle $v$, ou du mouvement vrai, que de quelques degrés, on aura une équation de cette forme $Z' = v + \alpha$ ſin. $mv$ $+ 6$ ſin. $2mv$, &c. $+ \gamma$ ſin. $2(v+\zeta\psi''-nz)$, &c. Or à cauſe de $z = v - \int d\zeta$ coſ $\rho+\zeta+\varphi$, ou $v+\zeta\psi''$ $+\mu$, $\mu$ étant une quantité compoſée de ſinus & de coſinus, on aura dans la formule précédente $z-\zeta\psi''$, ou $z-\omega z\psi''$ au lieu de $v$, & $z-nz$ au lieu de $v+\zeta\psi''-nz$, & au lieu de $mv$, $m(z-\zeta\psi'') = m(z-\omega z\psi'')$. D'où il eſt aiſé de voir, que ſi $m$ marque le mouvement de l'apogée dans l'orbite réelle, $m(1-\omega\psi'')$ le marquera dans l'orbite projettée ; ce qui peut d'ailleurs ſe voir encore d'une autre maniere, en conſidérant que le lieu moyen de l'apſide ſe trouve aux points où $mv = b.360°$, $b$ étant un nombre entier quelconque, ce qui donne $v = \frac{b.360°}{m}$ ; & que la valeur de $z$, répondante à cet arc $v$, eſt $v+\zeta\psi''+\mu$, ou ſimplement $v+\zeta\psi''$, en négligeant le terme $\mu$. D'où il s'enſuit qu'on a $z = \frac{b.360°}{m}+\omega z\psi''$, & $z(1-\omega\psi'') = \frac{b.360°}{m}$, & enfin $mz(1-\omega\psi'') = b.360°$ ; & que par conſéquent le mouvement de l'apſide, dans l'orbite projettée, ſera donné par le coefficient $m(1-\omega\psi'')$, qui n'eſt pas le même que le coefficient $m$.

27. On aura donc, au lieu de l'équation ci-dessus en $Z'$ & en $\nu$, celle-ci $Z' = \zeta - \omega\zeta\psi'' + \alpha \sin. m\zeta(1 - \omega\psi'') + \&c. + \gamma \sin. 2\zeta - 2n\zeta$, &c. Donc, 1°. (en divisant par le coefficient $1 - \omega\psi''$ du terme $\zeta - \omega\zeta\psi''$), on voit que le mouvement moyen dans l'orbite projettée, sera $\frac{Z'}{1-\omega\psi''}$; & tel sera le mouvement moyen que les Astronomes observent; enforte que nommant $Z$ le mouvement moyen observé, on aura $Z' = Z(1 - \omega\psi'')$. 2°. Les argumens des équations seront évidemment les mêmes que dans l'orbite projettée. 3°. De-là il est facile de voir comment ces équations pourront se réduire à celles de M. Clairaut, en mettant dans ces dernieres $m(1 - \omega\psi'')$ au lieu de $m$, & en mettant dans les termes qui dépendent de l'élongation, d'abord $\nu + \zeta - \int d\zeta$ cos. $p$, ou $\nu + \zeta\psi''$ au lieu de $\nu$, & ensuite $\zeta - \omega\zeta\psi''$ au lieu de $\nu$, ce qui réduira $\nu + \zeta - \int d\zeta$ cos. $p$, ou $\nu + \zeta\psi''$ à $\zeta$, ou $\frac{\nu}{1-\omega\psi''}$; en effet, puisque $\nu + \zeta\psi'' = \zeta$, ou $\nu + \omega\zeta\psi'' = \zeta$, en mettant à part les équations, donc $\zeta = \frac{\nu}{1-\omega\psi''}$; 4°. donc aussi, au lieu de la quantité qui représente $n\nu$ dans les équations de M. Clairaut, il faut mettre, par la même raison, $\frac{n\nu}{1-\omega\psi''} = n\zeta$ comme ci-dessus; 5°. donc l'équation de M. Clairaut qui doit revenir (pour être exacte) à $Z' = \nu + \alpha \sin. m\nu + \&c. + \gamma \sin. 2\left(\frac{\nu}{1-\omega\psi''} - \frac{n\nu}{1-\omega\psi''}\right)$, donnera $\nu = Z' - \alpha \sin. mZ' + \&c. - \gamma \sin.(2 - 2n) *$

$\frac{Z'}{1-\omega\downarrow''}$, &c. & par conſéquent $z$ ou $\frac{\nu}{1-\omega\downarrow''} = \frac{Z'}{1-\omega\downarrow'} - \frac{\alpha \text{ ſin. } m Z'}{1-\omega\downarrow''} + \&c. - \frac{\gamma}{1-\omega\downarrow''} \text{ ſin. } (2 - 2n) \frac{Z'}{1-\omega\downarrow''}$, &c. $= Z + \delta$ ſin. $m Z (1 - \omega\downarrow'')$. &c. $+\gamma'$ ſin. $(2 - 2n) Z$, &c. Or l'équation de M. Clairaut, telle qu'elle eſt, donne $Z' = \nu + \alpha$ ſin. $m\nu + 6\times$ ſin. $2m\nu$, &c. $+\gamma$ ſin. $(2 - 2n)\nu$, & par conſéquent $\nu = Z' - \alpha'$ ſin. $mZ'$, &c. $-\alpha'$ ſin. $(2 - 2n) Z'$, &c. équation dans laquelle $Z'$ repréſente le mouvement moyen réel de la lune dans ſon orbite, ou pour s'exprimer avec plus de préciſion, le mouvement moyen que la lune auroit dans ſon orbite, ſi cette orbite étoit plane, ſans varier d'ailleurs en aucune maniere, quant à ſa figure, à ſa dimenſion, & aux forces qui la produiſent. Il eſt donc viſible que l'équation de M. Clairaut, telle qu'il la préſente, differe de ce qu'elle devroit être, en ce point principal & eſſentiel, que le terme qui a pour coefficient $\gamma$, a pour argument $(2 - 2n) Z'$, au lieu de $\frac{(2-2n)Z'}{1-\omega\downarrow''}$ qu'il devroit avoir.

28. Il me paroît encore que M. Clairaut n'eſt pas d'accord avec lui-même dans la valeur qu'il donne à l'argument de la latitude, c'eſt-à-dire à la diſtance réelle de la lune au nœud. Car dans l'évaluation des forces perturbatrices, il fait cet angle $= \nu + q + \frac{1}{2}\downarrow$ ſin. $2q(x)$, & dans la réduction à l'écliptique, il fait cet argument $=$

(a) Voyez ſa Théorie, ſeconde édition, pag. 69.

$\nu + q$ (*a*) ; deux ſuppoſitions qui ne paroiſſent exactes ni l'une ni l'autre, par toutes les raiſons expoſées ci-deſſus. La vraie diſtance au nœud eſt, comme nous l'avons déja dit, $\nu + \zeta - \int d\zeta$ cof. $p$, ou (en négligeant les petites équations qui viennent de l'inclinaiſon, & qui dépendent de ſinus & de coſinus) $\nu + \omega\zeta\psi'' = \frac{q}{1 - \omega\psi''}$, & cette quantité eſt $= \zeta$, en négligeant auſſi les petites équations qui viennent de l'inclinaiſon de l'orbite. Ce n'eſt pas, je l'avoue, ſans une juſte défiance de mes lumieres, que je remarque ces inadvertances échappées à un Mathématicien pour l'ordinaire très-exact, ſur-tout celle dont il eſt queſtion dans cet article, & qu'il étoit, ce me ſemble, très-aiſé d'appercevoir, ſuppoſé qu'elle ſoit auſſi réelle qu'elle me le paroît; quoique j'aye examiné avec ſoin la ſolution de M. Clairaut, je crains toujours de n'en avoir pas ſaiſi l'eſprit; la ſource principale de ſes mépriſes, vient, ce me ſemble, de ce qu'il n'a pas fait aſſez d'attention à *la double courbure* de l'orbite réelle de la lune, & de ce qu'il a en conſéquence traité les angles $\nu$, ou la ſomme des angles $d\nu$ comme un angle plan. J'invite les Mathématiciens à examiner ſur-tout cet article, & à juger ſi je ſuis fondé ou non dans mes objections.

29. Nous remarquerons enfin (& ceci mérite beaucoup d'attention) que quand on conſidere le mouvement dans l'orbite réelle de la lune, il ne faut point dans l'ex-

(*a*) *Ibid.* pag. 99 & ſuiv. & pag. 109 & ſuiv.

preſſion du temps, ou l'intégrale de $\frac{x'x'dv}{g'h'v(1+\int\frac{2x'x'dv}{g'h'})}$, dégager $v$ de tout coefficient, & ne lui en pas donner d'autre que l'unité : il faut (ſi du moins l'on veut comparer ce mouvement au mouvement vrai de la lune obſervé par les Aſtronomes) il faut, dis-je, donner ou plutôt ſuppoſer à $v$, ainſi qu'à $Z$, un coefficient égal à $\frac{1}{1-\alpha\psi''}$, comme dans l'art. 27, n. 5. C'eſt encore un point auquel il me ſemble que le ſavant Géometre dont nous venons de parler, n'a pas pris garde; ce qui étoit pourtant très-néceſſaire, par la raiſon que le mouvement de la lune *obſervé* par les Aſtronomes, & dont on déduit le mouvement moyen, ſe rapporte toujours à l'écliptique, & ne ſauroit même être conſidéré autrement, parce que le mouvement *réel* de la lune ſe fait dans un plan qui varie ſans ceſſe. En effet, nous avons prouvé ci-deſſus (art. 27, n. 4) que $\zeta$ (mouvement vrai réduit à l'écliptique) $= \frac{v}{1-\alpha\psi''}$, en faiſant abſtraction des équations. Il eſt donc aiſé de voir par l'article 27, que ſi on veut avoir le rapport du mouvement *moyen réel* $Z'$ de la lune dans ſon orbite au mouvement *moyen obſervé* $Z$, on aura de même $Z' = Z(1-\alpha\psi'')$; & ſi on veut laiſſer à $v$ & à $Z'$ l'unité pour coefficient, il faut au moins ſe bien ſouvenir que $v$ n'eſt pas égal (en mettant même à part les équations) au mouvement vrai $\zeta$ rapporté à l'écliptique, ni $Z'$ au mouvement moyen $Z$ de la lune dans l'écliptique. Or il me ſemble que M.

Clairaut a pris la quantité $Z'$ pour le mouvement moyen *observé*, en quoi il me paroît évident qu'il s'eſt mépris.

30. Malgré ces différentes mépriſes dans leſquelles il ſemble que M. Clairaut eſt tombé en calculant l'orbite de la lune, le réſultat qu'il donne pour l'expreſſion du lieu de la lune dans ſon orbite s'eſt trouvé aſſez exact, parce que les mépriſes ſe ſont à peu près compenſées. Voici comment : 1°. il a pris pour la quantité $Z'$, non la véritable valeur qu'elle devroit avoir, mais celle de la quantité $Z$, c'eſt-à-dire du mouvement moyen obſervé par les Aſtronomes, enſorte que l'argument fautif $(2-2n)Z'$ eſt devenu par-là $(2-2n)Z$, ou $\frac{(2-2n)Z'}{1-\omega\downarrow''}$, comme il le devoit être. 2°. Dans les termes qui ont pour argument $mZ'$, il a pris pour la valeur de $m$ celle que donnent les obſervations, & qui eſt réellement, comme nous l'allons faire ſentir dans l'art. ſuivant, $m(1-\omega\downarrow'')$; & comme il avoit déja pris pour $Z'$ la valeur réelle de $\frac{Z'}{1-\omega\downarrow''}$ ou $Z$, il a donc repréſenté $mZ'$ par la valeur de $m(1-\omega\downarrow'')Z$, $Z$ étant le mouvement moyen obſervé, & $m(1-\omega\downarrow'')$ la quantité qui réſulte du mouvement obſervé de l'apogée ; enſorte que (ſauf la réduction à l'écliptique) les valeurs qu'il a ſuppoſées aux argumens de ſes équations reviennent à celles des argumens de l'équation $z = Z + \delta$ ſin. $mZ(1-\omega\downarrow'')$, &c. $+\gamma$ ſin. $(2-2n)Z$, &c. qui (art. 27, n°. 5) doit réellement réſulter de la théorie.

31. On dira peut-être que les obſervations, d'où la valeur

leur du mouvement de l'apogée eſt tirée, donnent le mouvement de cet apogée dans l'orbite réelle, & non le mouvement de l'apogée dans l'orbite projettée, mouvement repréſenté par $m(1-\omega\downarrow'')$. A cela il eſt facile de répondre. Car, 1°. il eſt conſtant par le fait, que la valeur de la quantité $m$, priſe par M. Clairaut & par les Aſtronomes, pour exprimer le mouvement réel de l'apſide, eſt ſenſiblement la même que celle qui donne le mouvement de l'apſide dans l'orbite projettée; car autrement la réduction à l'écliptique, qui ne va qu'à 6 ou 7 minutes, ſeroit beaucoup plus conſidérable; puiſque l'équation du centre dépendante de l'anomalie ſeroit très-différente dans les deux orbites au bout d'un certain nombre de révolutions; 2°. (& c'eſt ce qui décide abſolument la queſtion) l'angle $v$, ou plutôt la ſomme des angles $dv$, ne forme point un angle plan, & le mouvement de l'apſide dans l'orbite réelle étant rapporté ſur l'écliptique, donne, comme on l'a vu ci-deſſus, un angle $z = \frac{b.360}{m(1-\omega\downarrow'')}$; par conſéquent c'eſt cet angle qui détermine dans les obſervations le mouvement de l'apſide, lequel eſt ainſi réellement repréſenté par $m(1-\omega\downarrow'')$ & non par $m$. Ainſi, quand nous avons dit ci-deſſus que le mouvement de l'apſide dans les deux orbites eſt différent, il faut entendre ſeulement par-là que la quantité $m$ dans $mv$ eſt différente, comme il eſt évident, de la quantité $m(1-\omega\downarrow'')$ dans $mz(1-\omega\downarrow'')$; mais comme $v$ n'eſt pas un angle plan, au lieu que $z$ en eſt un, les ap-

ſides des deux orbites répondent toujours, à peu de choſe près, au même point de l'écliptique, ainſi que nous l'avons déja obſervé ailleurs (*a*).

32. La néceſſité de réduire le mouvement à l'écliptique (art. 29) pour avoir une quantité qu'on puiſſe ſuppoſer égale au mouvement moyen de la lune obſervé par les Aſtronomes, ainſi que le mouvement obſervé de l'apogée, (art. 31) paroiſſent des raiſons ſuffiſantes (indépendamment de toutes les autres dont nous avons fait mention) pour ne pas conſidérer dans la théorie de la lune le mouvement réel de cette planete, mais ſon mouvement rapporté à l'écliptique. Ainſi tout paroît concourir à prouver que le calcul doit ſe rapporter à l'orbite de la lune projettée ſur l'écliptique; & c'eſt en effet ainſi que MM. Euler & de la Grange ont enviſagé le problême des trois corps, le premier dans la théorie de la lune, le ſecond dans la théorie de Saturne & de Jupiter.

33. Il eſt à remarquer, que dans l'orbite projettée, l'excentricité ou la quantité qu'on doit prendre pour l'excentricité ne ſera pas tout-à-fait la même que dans l'orbite réelle; mais la différence ſera peu conſidérable, & on pourra toujours ſuppoſer le rayon vecteur $x$ de l'orbite projettée $= \frac{aa}{R + P \cos. N\zeta + \omega}$, $\omega$ étant une quantité compoſée de coſinus de différens angles, ou $x = \frac{K}{1 + \frac{P}{R} \cos. N\zeta + \Omega}$, $K$ étant $= \frac{aa}{K}$, & $\frac{P}{R} =$ à peu

(*a*) *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Partie I, pag. 183, à la note.

près 0,5505 ; après quoi on corrigera cette valeur supposée de $\frac{P}{Q}$ par les observations.

34. On doit aussi remarquer que le rayon vecteur de l'orbite réelle étant $x(1+mm\,\text{sin.}\,V^2)^{\frac{1}{2}}$, & la parallaxe étant en raison inverse de ce rayon, elle sera proportionnelle à $(1+\frac{P}{Q}\,\text{cos.}\,N\zeta+\Omega)(1+mm\,\text{sin.}\,V^2)^{-\frac{1}{2}}$. Mais comme $m=$ à peu près $\frac{1}{12}$, & que $(1+mm\,\text{sin.}\,V^2)$ élevé à la puissance $-\frac{1}{2}$, donnera le terme $\frac{mm}{4}\,\text{cos.}\,2V$, terme dont le coefficient deviendra encore de moitié plus petit quand il multipliera des cosinus, il est aisé de voir qu'il ne faudra avoir attention qu'aux seuls termes $-\frac{mm}{4}+\frac{mm}{4}\,\text{cos.}\,2V$ que cette considération introduira, les autres si étant petits, que le plus grand n'ira pas à un quart de seconde, puisque $\frac{P}{Q}=$ environ $\frac{1}{20}$, que $\frac{mm}{8}=$ environ $\frac{1}{8.144}$, & que l'unité représente ici environ $57'$.

35. Au reste, si malgré toutes les considérations que nous venons d'exposer, on vouloit avoir l'équation de l'orbite réelle de la lune, on se servira de la méthode exposée ci-dessus (art. 18 — 25). On considérera, 1°. que l'angle $v$ ou $\int dv$, qui représente le mouvement vrai de la lune dans son orbite, n'est point un angle plan, mais la somme des angles $dv$ que la lune décrit pendant cha-

que inſtant $dt$, en changeant continuellement de plan; 2°. que ſi on repréſente le temps $t$, (employé à parcourir la ſomme des angles $dv$) par le mouvement moyen $Z$ que les Aſtronomes ont obſervé dans la lune, il faudra ſuppoſer $Z = \frac{v}{1-\omega\downarrow''} +$ &c. par les raiſons expoſées ci-deſſus; & que ſi l'on veut avoir une équation dans laquelle le premier membre & le premier terme du ſecond membre n'ayent pour coefficient que l'unité; il faudra ſuppoſer $Z' = Z(1-\omega\downarrow'')$, ce qui donnera $Z' = v + \lambda$ ſin. $mv + \mu$ ſin. $2mv$; &c. 3°. qu'on aura par conſéquent $v = Z' + \delta$ ſin. $mZ' + \rho$ ſin. $2mZ'$; &c. équation dans laquelle $mZ'$ eſt la même choſe que $m(1-\omega\downarrow'')Z$, $Z$ étant le mouvement moyen de la lune obſervé, & $m(1-\omega\downarrow'')$ la même quantité que nous avons appellée $N$, & qui donne le mouvement de l'apogée, tel que les Aſtronomes l'ont déterminé. 4°. Pour ce qui concerne l'expreſſion des forces perturbatrices, on ſe ſervira des formules données, art. 23 & 24, & on verra, par tout ce qui a été dit ci-deſſus, que ces forces dépendent principalement de $N.Z$, de $Z$ & de $(2-2n)Z$, & non pas de $(2-2n)Z'$. 5°. On ſe ſouviendra dans ces formules, que la quantité $\omega$ dépend du mouvement des nœuds, & la quantité $\downarrow''$ de l'angle de l'orbite de la lune avec l'écliptique, enſorte que ſi les nœuds étoient immobiles, ou ſi l'angle des deux orbites étoit nul, dans l'un & l'autre cas, $1-\omega\downarrow''$ ſeroit $= 1$. 6°. Quand on aura trouvé $v$ par ce calcul, on détermi-

nera $\zeta$ (lieu de la lune dans l'écliptique) par les équations $\omega = v + \zeta - \int - d\zeta \cos. \rho$, $\cos. V = \frac{\cos. \omega}{\sqrt{(1 - \sin.\varrho \cdot \sin.\omega^2)}}$, & $\zeta = V + \zeta$; bien entendu qu'on aura auparavant déterminé $\zeta$ & $\rho$ en $Z$, en prenant les mêmes précautions qui viennent d'être indiquées pour le calcul de l'orbite, c'eſt-à-dire en ſe ſouvenant que dans l'expreſſion $dt$ repréſentée par $dZ$, $dv$ doit avoir pour coefficient $\frac{1}{1 - \omega\psi''}$.

36. Voici encore une autre maniere de changer, ſi l'on veut, l'équation de l'orbite projettée en celle de l'orbite réelle. Soit d'abord $ddu + u\,d\zeta^2 - \frac{d\zeta^2}{uugg} \times \frac{Suu}{(1 + mm \sin. V^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$, l'équation de l'orbite projettée lorſque le corps décrit une ellipſe ſans aucune force perturbatrice; ſoit $dk$ l'arc décrit dans l'orbite réelle, on aura les équations $x(1 + mm \sin. V^2)^{\frac{1}{2}} = x'$, & $xx(1 + mm \sin. V^2)\,dk \cos. \rho = xx\,d\zeta$; par conſéquent, en faiſant $1 + mm \sin. V^2 = \mathfrak{C}^2$, $u' = \frac{1}{x'}$, on aura $u'\mathfrak{C} = u$, & $d\zeta = dk \cdot \mathfrak{C}^2 \cos. \rho$; or l'équation propoſée donne $d\left(\frac{du}{d\zeta}\right) + u\,d\zeta - \frac{S\,d\zeta}{g'g'\mathfrak{C}^3 \cos.\lambda^2}$, en faiſant $g = g' \times \cos. \lambda$; donc on a $d\left(\frac{\mathfrak{C}\,du' + u'\,d\mathfrak{C}}{\mathfrak{C} \cdot dk \cos.\varrho}\right) + u'\mathfrak{C}^3\,dk \cos. \rho - \frac{dk \cos.\varrho}{\mathfrak{C}\,g'g' \cos.\lambda^2} = 0$; donc en ſuppoſant $\frac{1}{\mathfrak{C}} = y$, $d\left(\frac{y\,du' - u'\,dy}{dk \cos.\varrho}\right) + \frac{u'}{y^3}\,dk \cos. \rho - \frac{y\,dk \cos.\varrho}{g'g' \cos.\lambda^2} = 0$,

ou $ddu' - \frac{u' d dy}{y} + \frac{u' dk^2 \text{ cof. } \varrho^2}{y^4} - \frac{S dk^2 \text{ cof. } \varrho^2}{g' g' \text{ cof. } \lambda^2} = 0$;

or à cauſe de $y = \frac{1}{(1 + mm \text{ ſin. } V^2)^{\frac{1}{2}}}$, & de $dV =$ ici $dz = dk . \mathfrak{C}^2 \text{ cof. } \rho$, on aura $dy = - \frac{mm dk \text{ cof. } \varrho . y \text{ ſin. } 2V}{2}$, & par conſéquent $d dy =$ (en faiſant $m$ & $\rho$ conſtans) $- \frac{mm y dk \text{ cof. } \varrho}{2} \times \left( - \frac{mm dk \text{ cof. } \varrho . y (\text{ſin. } 2V)^2}{2} + \frac{2 dk \text{ cof. } \varrho . y \text{ cof. } 2V}{y^2} \right) = y dk^2 \text{ cof. } \rho^2 \left[ \frac{\text{ſin. } \varrho^2}{4 \text{ cof. } \varrho^4} (1 - \text{cof. } 2V)^2 - \frac{\text{ſin. } \varrho^2 \text{ cof. } 2V}{\text{cof. } \varrho^2 y^2} \right] = y dk^2 \text{ cof. } \rho^2 \left[ \frac{\text{ſin. } \varrho^4}{4 \text{ cof. } \varrho^4} - \left( \frac{\text{ſin. } \varrho^2 \text{ cof. } 2V}{2 \text{ cof. } \varrho^2} + \frac{1}{y^2} \right)^2 + \frac{1}{y^4} \right]$; or à cauſe de $1 + mm \text{ ſin. } V^2 = \frac{1}{y^2}$, on aura $1 + \frac{\text{ſin. } \varrho^2}{\text{cof. } \varrho^2} \times \left( \frac{1}{2} - \frac{\text{cof. } 2V}{2} \right) = \frac{1}{y^2}$; d'où $\frac{\text{ſin. } \varrho^2 \text{ cof. } 2V}{2 \text{ cof. } \varrho^2} + \frac{1}{y^2} = 1 + \frac{\text{ſin } \varrho^2}{2 \text{ cof. } \varrho^2} = \frac{1 + \text{cof. } \varrho^2}{2 \text{ cof. } \varrho^2}$; donc $d dy = y dk^2 \text{ cof. } \rho^2 \times \left[ \frac{\text{ſin. } \varrho^4}{4 \text{ cof. } \varrho^4} - \frac{(1 + \text{cof. } \varrho^2)^2}{4 \text{ cof. } \varrho^4} + \frac{1}{y^4} \right] = y dk^2 \text{ cof. } \rho^2 \times \left( - \frac{4 \text{ cof. } \varrho^2}{4 \text{ cof. } \varrho^4} + \frac{1}{y^4} \right) = y dk^2 \text{ cof. } \rho^2 \left( - \frac{1}{\text{cof. } \varrho^2} + \frac{1}{y^4} \right)$; donc ſubſtituant cette valeur de $d dy$ dans l'équation $d du' - \frac{u' d dy}{y}$, &c. $= 0$, elle ſe réduira à $d du' + u' dk^2 - \frac{S dk^2 \text{ cof. } \varrho^2}{g' g' \text{ cof. } \lambda^2} = 0$, ou (à cauſe de cof. $\lambda$

$= \text{cos.}\,\rho)\ d\,d\,u' + u'\,d\,k^2 - \frac{S\,d\,k^2}{g\,g'} = 0.$

37. Si $m$ & $\rho$ étoient variables, le calcul deviendroit plus compliqué; & pour faire ce calcul, on conſidéreroit que $m = \frac{\text{ſin.}\,\varphi}{\text{cos.}\,\varphi}$, & que $dV = dz - d\zeta$; $d\zeta$ étant le mouvement du nœud pendant l'inſtant $dt$. Par ce moyen, on peut changer l'équation de l'orbite projettée en celle de l'orbite réelle; mais le moyen que nous avons donné ci-deſſus (art. 35) pour avoir l'orbite réelle directement, eſt plus facile & plus court. Quoi qu'il en ſoit, & nous ne pouvons trop le répéter, il nous paroît beaucoup plus ſimple de chercher le mouvement de la lune, en rapportant immédiatement ſon orbite à l'écliptique, ſuivant la méthode expoſée ci-deſſus dans l'art. 11 & les ſuivans.

*Fin du trente-huitiéme Mémoire.*

# XXXIX^ME MÉMOIRE.

*De l'intégration de l'équation de l'orbite lunaire, (& en général du problême des trois Corps) & des difficultés qui s'y rencontrent.*

## §. I.

*De la meilleure méthode d'intégrer cette équation.*

1. L'ÉQUATION différentielle de l'orbite lunaire (ou même en général du problême des trois Corps) étant trouvée, je penſe que la maniere la plus ſimple & la plus exacte tout-à-la-fois d'en trouver l'intégrale, eſt de ſuppoſer d'abord $u = a + t$, & enſuite $t = \alpha + A \text{ cof. } N'.Z + B \text{ cof. } pZ + C \text{ cof. } qZ$, &c. $A, B, C$, étant des coefficiens indéterminés, $\alpha$ une quantité conſtante auſſi indéterminée, qui doit être telle que $\alpha + A + B + C + \&c. = 0$, puiſque $t = 0$ lorſque $z = 0$, $N'$ une quantité donnée par le mouvement connu de l'apogée, & $p, q$, &c. des quantités dont la forme eſt aiſément déterminable par l'équation différentielle de l'orbite lunaire,

naire, & qui dans la lune ſont ſucceſſivement $2 - 2n$, $2 - 2n + N$, $2 - 2n - N$, &c. ce qui eſt connu de tous les Géometres qui ſe ſont exercés ſur la théorie de cette planete.

2. Pour déterminer ces coefficiens, il n'eſt pas néceſſaire d'avoir recours à l'intégration de l'équation différentielle, il ſuffit de ſubſtituer dans cette équation la valeur ſuppoſée de $u$, & de faire égaux à zero les coefficiens de cof. $Nz$, cof. $pz$, cof. $qz$, &c.

3. On peut néanmoins avoir recours à l'intégration, ſi on le juge à propos, cette méthode étant plus directe, quoique peut-être un peu plus longue que la méthode de ſubſtitution preſcrite dans l'article précédent.

4. Pour cela on commencera, en ſuivant une méthode que j'ai preſcrite ailleurs (*Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Tome I, art. 27) par ajouter une quantité inconnue $\gamma$ au coefficient du terme qui renferme $t.dz^2$ dans l'équation différentielle, enſorte que ce coefficient, au lieu d'être $N^2$, ſoit $N^2 + \gamma = N'^2$; on ſubſtituera enſuite la valeur de $u = \alpha + A$ cof. $N'z + B$ cof. $pz +$ &c. dans tous les termes de l'équation différentielle, à l'exception des deux premiers termes $ddt + (N^2 + \gamma) \times t\,dz^2$, & on n'oubliera pas, avant de faire la ſubſtitution dans les autres termes, de joindre à ces termes la quantité $-\gamma\, t\,dz^2$ égale & de ſigne contraire à la quantité $+\gamma\, t\,dz^2$ ajoutée aux deux premiers termes; afin que l'équation ſuppoſée ſubſiſte toujours; ſoit maintenant $\&\cos.\lambda z . dz$ un des termes qui réſultent de la ſubſtitution

qu'on vient de prescrire dans l'équation différentielle ; il en viendra dans l'intégrale le terme $-\frac{C \text{ cos. } \lambda z}{N^2 + \gamma - \lambda^2}$, lequel étant fait égal au terme correspondant de la valeur de $u$, que je suppose $\mu$ cos. $\lambda z$, on déterminera par ce moyen le coefficient $\mu$.

5. La raison pour laquelle il est plus exact de supposer des coefficiens indéterminés $A$, $B$, $C$, &c. dans la valeur de $u$, que de déterminer ces coefficiens par approximation, en substituant à chaque opération les valeurs tirées de l'opération précédente ; c'est que chaque terme $K$ cos. $\lambda z$ de la différentielle donne à l'intégrale les deux termes $-\frac{K \text{ cos. } \lambda z}{N'^2 - \lambda\lambda} + \frac{K \text{ cos. } N' z}{N'^2 - \lambda^2}$ ; or si $N'^2 - \lambda\lambda$ étoit fort petit, il pourroit arriver que le coefficient $+\frac{K}{N'^2 - \lambda^2}$ de cos. $N' z$ fût plus grand que celui qu'on auroit par la supposition de l'ellipse primitive, en négligeant les forces perturbatrices.

6. Pour obvier à cet inconvénient (qui n'est pas même considérable dans la théorie de la lune) on peut prendre pour l'excentricité de l'orbite (ou plus exactement pour le coefficient de cos. $N' z$) celle à peu près que donnent les observations ; de sorte qu'on suppose $\alpha + a = a$, & $x = a + A$ cos. $N' z +$ &c. les quantités a & $A$ étant déterminables par les observations seules ; & les autres coefficiens $B$, $C$, étant déterminables par le moyen de $A$, a & $n$. La quantité $e$, qui sert (art. 17 du trente-huitiéme Mémoire) à déterminer $g g$, sera connue de même &

par les mêmes raiſons en a, $A$ & $n$, ou, ce qui eſt la même choſe, en $a$, $a$, $A$ & $n$.

7. Mais l'objet auquel il faut ſur-tout être attentif, c'eſt aux diviſeurs qu'on donnera dans l'intégrale aux quantités $K$ cof. $\lambda z$, ces diviſeurs devant être $N^2 - \lambda^2$, & non $1 - \lambda^2$, ainſi que nous l'avons déja remarqué. C'eſt ſur-tout par cette conſidération qu'on pourra apprécier l'exactitude des méthodes par leſquelles on déterminera le mouvement de la lune.

8. Feu M. Clairaut n'ayant pas publié le détail de ſes calculs ſur la théorie de la lune (*a*), nous ne pouvons ſavoir s'il s'eſt conformé à la remarque que nous venons de faire, & ſur laquelle nous avions déja fort inſiſté ailleurs (*b*); cependant, à en juger par les art. 16 & 27 de la théorie de M. Clairaut, il paroît que ce ſavant Géometre a donné pour diviſeurs aux coefficiens de l'intégrale $1 - \lambda^2$, & non pas $N^2 - \lambda^2$; ce qui doit, comme on le verra plus bas, occaſionner des erreurs conſidérables dans la valeur de certains coefficiens.

9. Tous ceux qui ſe ſont exercés ſur la théorie de la lune, ſavent par quelle raiſon on eſt obligé de donner un coefficient $N'$ indéterminé & différent de l'unité au terme $A$ cof. $N'z$: c'eſt que ſi on ſuppoſoit $N' = 1$, ou même $N = N'$, il ſe rencontreroit dans la valeur de $x$ ou de $u$ des arcs de cercle qui n'y doivent pas être. Nous ne pouvons nous diſpenſer à cette occaſion de remarquer la

(*a*) Voyez ce qu'il dit à ce ſujet dans la ſeconde édition de ſa Théorie, Paris 1765, page 54.

(*b*) *Opuſcules*, Tome II, pag. 255 & ſuiv.

mépriſe qui eſt encore échappée à ce ſujet à M. Clairaut (Journal des Savans de Juin 1762). Il prétend que ſi on tombe dans l'équation $\frac{1}{x} = 1 - e(\text{cof. } z - \delta z \text{ ſin. } z)$ qui renferme des arcs de cercle au moyen de la ſubſtitution dont on vient de parler, cette équation peut ſe changer en $\frac{1}{x} = 1 - e(\text{cof. } z - \text{ſin. } z \text{ ſin. } \delta z)$, qui peut encore, ſelon lui, ſe changer en celle-ci $\frac{1}{x} = 1 - e \text{ cof. } (1+\delta) z$. Telles ſont les transformations par leſquelles ce célèbre Mathématicien croit faire diſparoître les arcs de cercle de l'équation de l'orbite, & y ſubſtituer une ellipſe mobile; or ces opérations ſont évidemment illuſoires, puiſqu'il n'eſt permis de ſuppoſer $\delta z = \text{ſin. } \delta z$, & $\text{cof. } \delta z = 1$, que quand $\delta z$ eſt fort petit; ainſi cette transformation ne peut repréſenter à peu près l'orbite que pendant un très-petit nombre de révolutions, & non pour tant de révolutions qu'on voudra, comme on le demande dans la théorie de la lune. Avec un pareil artifice on feroit auſſi diſparoître les arcs de cercle dans les cas où la ſolution doit réellement en contenir. Soit, par exemple, $ddt + N^2 t dz^2 + B \text{ cof. } Nz . dz^2 = 0$, il eſt certain que la valeur de $t$ doit en ce cas renfermer des arcs de cercle, & qu'on pourroit les faire diſparoître, mais, à la vérité, pour quelques révolutions ſeulement, par le moyen illuſoire dont nous venons de parler.

10. On peut, au reſte, intégrer l'équation de l'orbite de la lune par une autre méthode que les précédentes,

méthode que j'expoſerai ailleurs plus en détail. Elle conſiſte à différentier ſucceſſivement, & autant de fois qu'on en aura beſoin, l'équation $ddt + N^2 t dz^2 + P dz^2 = 0$, $P$ étant une fonction de $t$, $dt$, & de coſinus ou ſinus de $z$ & de ſes multiples; à mettre dans les différentielles de la fonction $P$, au lieu de $ddt$ ſa valeur $-N^2 t dz^2 - P dz^2$; & enſuite à faire diſparoître, par la comparaiſon des équations différentielles ſucceſſives, tous les termes dans leſquelles $t$ ſe trouve élevé à une puiſſance plus grande que l'unité, ou mêlé avec des ſinus ou des coſinus; par-là on parviendra à une équation de cette forme $d^n t + B d^{n-1} t dz + C d^{n-2} t dz^2 + \&c. = 0$, & on pourra ſe ſervir des méthodes que j'ai données ailleurs pour intégrer ces ſortes d'équations. Il en réſultera une valeur de $t$ de cette forme $t = A + B' \text{ cof. } fz + C' \text{ cof. } f'z + D' \text{ cof. } f''z$, &c. $f, f', f''$, &c. étant les racines de l'équation $f^n + Bf^{n-1} + Cf^{n-2} + \&c. = 0$; & les angles $fz, f'z, f''z$, &c. ſeront les argumens des différentes équations de l'orbite lunaire.

## §. II.

*Des imperfections qui ſe trouvent encore dans les méthodes connues pour intégrer l'équation de l'orbite lunaire, & principalement des difficultés que renferme la recherche du mouvement de l'apogée.*

1. Quelques progrès que l'analyſe ait faits dans ces derniers temps, il faut pourtant avouer que toutes les

méthodes qu'on a pu imaginer juſqu'ici pour intégrer l'équation différentielle du problême des trois Corps, ont pluſieurs inconvéniens ou plutôt pluſieurs imperfections, auxquelles il ſeroit avantageux de trouver quelque remède; je vais tâcher de les expoſer en détail, comme un objet digne d'occuper les Mathématiciens.

2. La premiere de ces imperfections conſiſte à ſuppoſer $x = a + t$, $t$ étant une quantité fort petite par rapport à $a$. C'eſt ſuppoſer, au moins tacitement, ce qui eſt en queſtion, ſavoir que l'orbite de la lune, après tant de révolutions qu'on voudra, ne doit jamais s'écarter beaucoup d'un cercle. Il eſt vrai que cette ſuppoſition eſt juſtifiée par les obſervations; mais on doit ſentir que ce moyen de la juſtifier eſt indirect, & n'eſt pas pris dans la ſolution même comme il le doit être. Il eſt vrai auſſi que dans des cas plus ſimples que celui de l'orbite de la lune, par exemple, lorſque la force $\pi = 0$, & que $\psi = \frac{T+L}{x^2} + Q x^m$, on peut démontrer rigoureuſement & directement que $t$ doit être fort petit, ainſi que je l'ai remarqué & fait voir le premier dans les *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Partie I, art. 27, pag 36. Mais lorſque $\psi$ renferme des ſinus ou coſinus de $\lambda\zeta$, & que $\pi$ n'eſt pas $= 0$, & renferme de pareils ſinus ou coſinus, il n'eſt plus ſi facile de démontrer directement, & à *priori*, que $t$ doit toujours être une quantité fort petite; & peut-être même cet objet ſurpaſſe-t-il les forces de l'analyſe connue.

3. Une ſeconde difficulté regarde l'équation par la-

quelle on détermine le coefficient $N'$ (qui ſert à trouver le mouvement de l'apogée) lorſque ce coefficient n'eſt pas donné par les obſervations, ou même lorſqu'il eſt donné, & qu'on veut voir ſi les obſervations s'accordent avec le réſultat que doit donner la théorie.

4. D'abord tous les Géometres ſavent que la ſerie qui donne le mouvement de l'apogée a l'inconvénient d'être ſi peu convergente, que le premier terme de cette ſerie ne donne qu'environ la moitié du mouvement, que le ſecond terme en donne une partie très-conſidérable, mais qui ne répond pas ſuffiſamment aux obſervations, & qu'on eſt obligé de calculer quatre à cinq termes de cette ſerie pour s'aſſurer, 1°. ſi elle eſt ſuffiſamment convergente après ſes deux premiers termes; 2°. ſi elle donne à peu près le mouvement de l'apogée tel qu'il eſt connu par les obſervations. Ces inconvéniens que j'ai fort détaillés ailleurs, ſont conſidérables ſans doute, mais ils ne ſont pas les ſeuls. En voici d'autres qui méritent attention.

5. L'équation qui donne le mouvement de l'apogée renferme l'inconnue $N'$, ou plutôt $N'^2$ élevée à un degré d'autant plus grand, qu'on pouſſe l'approximation plus loin dans la recherche de la valeur de $N'$. Or il peut réſulter de-là des difficultés dans la détermination de la valeur de $N'$; inconvénient qui n'a encore été apperçu, que je ſache, par aucun de ceux qui ont travaillé ſur le problême des trois Corps.

6. Pour faire ſentir, par un exemple très-ſimple, en

quoi ces difficultés consistent, supposons qu'on ait une équation de cette forme $ddt + N^2 t dz^2 + it \cos. pz = 0$, $i$ étant supposé un coefficient très-petit, $N$ étant supposé très-peu différent de l'unité, & $p$ très-peu différent de 2. Soit $N^2 = 1 + 2kn^2$, $i = \lambda n^2$, $p = 2 + \sigma n$, $n$ étant un nombre très-petit; & soit supposé $t = A + f \cos. Kz +$ &c.; l'équation pour trouver $K$, sera, par les différentes méthodes que nous avons indiquées dans ce Mémoire, $-K^2 + N^2 - \frac{ii}{4(N^2 - pp - 2pK - KK)} - \frac{ii}{4(N^2 - pp + 2pK - K^2)} = 0$, ou $-K^2 + N^2 - \frac{ii(N^2 - pp - KK)}{2[(N^2 - p^2 - K^2)^2 - 4p^2K^2]} = 0$, qui peut encore se réduire dans ce cas-ci à l'équation approchée $-K^2 + N^2 - \frac{ii}{4[N^2 - (p-K)^2]} = 0$, à cause que le terme qui a pour dénominateur $NN - (p+K)^2$ est très-petit par rapport à l'autre; on aura donc, en supposant $K = 1 + \omega n^2$, l'équation approchée $-2\omega n^2 + 2kn^2 - \frac{\lambda^2 n^4}{4[1 + 2kn^2 - (1 + \sigma n - \omega n^2)^2]} = 0$; d'où l'on tire $-2\omega + 2k = \frac{\lambda^2 n}{4(2kn - 2\sigma - \sigma^2 n + 2\omega n)}$. Soit $\sigma = qn$, & on aura $-2\omega + 2k = \frac{\lambda^2}{4(2k - 2q - q^2 n^2 + 2\omega)}$; d'où $-\omega\omega - \omega\left(k - q - \frac{q^2 n^2}{2}\right) + \omega k = \frac{\lambda^2}{2.8} - k\left(k - q - \frac{q^2 n^2}{2}\right)$; donc enfin $\omega =$ à très-peu près $+$

$\frac{q}{2}$

$$\frac{q}{2} + \frac{q^2 n^3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{qq}{4} + \frac{q^3 n^3}{4} - \frac{\lambda^2}{16} + k^2 - kq - \frac{kq^2 n^3}{2}\right)}.$$

7. Il eſt évident, 1°. que cette équation donnera deux valeurs de $\omega$, & par conſéquent deux de $N$; qu'il y en auroit un plus grand nombre ſi on avoit pouſſé l'approximation plus loin, ou même ſi on ſe fût contenté d'avoir égard au terme négligé $-\frac{ii}{4[N^2-(p+K)]}$; car il eſt aiſé de voir qu'alors l'équation qui donneroit la valeur de $K^2$ ou de $\omega$ monteroit au troiſiéme degré. Or on demande laquelle de ces valeurs on doit prendre pour déſigner le mouvement de l'apogée, & ce que ſignifient les autres valeurs?

8. Avant que de répondre à ces queſtions, je remarque d'abord que le radical qu'enferme la valeur de $\omega$ peut ſe réduire à peu près à $\frac{q}{2} - k - \frac{kqn^3}{4} - \left(\frac{\lambda^2}{16} - \frac{q^3 n^3}{4}\right) : 2\left(\frac{q}{2} - k\right)$. Or comme $\sigma$ eſt ſuppoſé $= qn$, & que $n$ eſt très-petit, il s'enſuit que ſi $\sigma$ n'eſt pas très-petit, on aura $q$ très-grand par rapport à $k$; donc le radical ſe réduira à peu près à $\frac{q}{2} - k - \frac{\lambda^2 \times 2}{32 \cdot q}$; ainſi les valeurs de $\omega$ ſeront à très-peu près $k + \frac{\lambda^2}{16q}$, & $q - k - \frac{\lambda^2}{16q}$. Or, 1°. puiſque l'équation donnée eſt $ddt + N^2 t\,dz^2 + it \cos. pz \cdot dz^2 = 0$, & que $N^2 = 1 +$

$2 k n^2$, il eſt aiſé de voir que ſi $i$ étoit $= 0$, $K$ ſeroit $= N$, & par conſéquent $\omega = k$. Donc des deux valeurs de $\omega$, la premiere $k + \frac{\lambda^2}{16 q}$, donne le mouvement de l'apogée, le dernier terme étant la correction qui réſulte du terme $i t \cos. p z \times d z^2$. 2°. La ſeconde valeur de $\omega$ n'eſt autre choſe que $q - k'$, en prenant $k'$ pour la premiere valeur de $\omega$ qu'on vient de trouver; donc cette ſeconde valeur de $\omega$ donnera, pour la valeur correſpondante de $K$, $1 + (q - k') n^2 = 1 + \sigma n - k' n^2 = 2 + \sigma n - (1 + k' n^2) = 2 + \sigma n - K = p - K$; c'eſt le coefficient de $z$ dans la quantité $\cos. (p - K) z$, laquelle vient de la ſubſtitution de $\cos. K z$ au lieu de $t$ dans le terme $i t \times \cos. p z . d z^2$.

9. Le problême du mouvement des apſides de la lune, eſt à peu près du même genre que celui que nous venons de réſoudre; dans le problême de la lune, on a $\sigma = -2$, & par conſéquent $-2 = q n$, ou $q = -\frac{2}{n}$; donc $\omega =$ à très-peu près $+ k - \frac{\lambda^2 n}{32}$, & $q - k + \frac{\lambda^2 n}{32}$; donc puiſque $K = 1 + \omega n^2$, on aura, pour premiere valeur de $K$, $K = 1 + k n^2 - \frac{\lambda^2 n^3}{32} - 2 n^3$; & la ſeconde valeur ſera $2 - 2 n - K'$ à très-peu près, en appellant $K'$ la premiere valeur. Mais voici une maniere plus ſimple & plus exacte de trouver ou de connoître dans ce cas-ci, & dans les cas ſemblables, les valeurs de $K$.

10. L'équation $-K^2+N^2-\frac{ii}{4[N^2-(p-K)^2]}$ $=0$, qui a lieu dans le cas où on ſuppoſe $(p-K)^2$ peu différent de $N^2$, eſt telle, qu'en mettant $p-K$ ou $K-p$ à la place de $K$, elle demeurera la même; d'où l'on voit que ſi $\pm k$ eſt une des deux valeurs de $K$, $p-k$ ou $k-p$ ſera l'autre; & en effet, les deux premiers termes de la valeur de $t$ doivent avoir évidemment cette forme $f\cos. kz+g\cos.(p-k)z$, comme il réſulte des méthodes d'approximation connues pour intégrer l'équation $ddt+N^2tdz^2+itdz^2\cos.pz=0$; & lorſqu'on ſuppoſe en général $t=A\cos.Kz$, l'équation qui exprime la valeur de $K$ doit renfermer évidemment les deux valeurs $k$ & $p-k$, puiſque cette expreſſion $A\cos.Kz$ renferme implicitement tous les termes qui compoſent la valeur de $t$. C'eſt ainſi que dans une équation quelconque de cette forme $d^nt+Ad^{n-2}tdz+Bd^{n-4}tdz^2+Cd^{n-6}tdz^3$, &c. ſi on fait $t=A\cos.Kz$, l'équation qui exprimera la valeur de $K$ donnera la forme de tous les termes qui compoſent la valeur de $t$, enſorte que $t$ ſera $=A'\cos.K'z+A''\cos.K''z+A'''\cos.K'''z$, &c. $K'$, $K''$, $K'''$, &c. exprimant toutes les valeurs de $K$, & $A$, $A'$, $A''$, &c. des coefficiens, qui ſe détermineront par les conditions du problême, c'eſt-à-dire, par les valeurs de $\frac{dt}{dz}$, $\frac{d^2t}{dz^2}$, $\frac{d^3t}{dz^3}$, &c. lorſque $z=0$.

11. Comme tous les termes de la valeur de $t$ dans l'équation propoſée $ddt+N^2tdz^2+itdz^2\cos pz=0$,

ſont néceſſairement de cette forme $h$ cof. $(\pm rp\zeta \pm s\varpi\zeta)$ $s$ & $r$ étant des nombres entiers quelconques poſitifs ou négatifs, il eſt clair que l'équation qui renferme les valeurs de $K$ à l'infini devroit avoir $\pm rp \pm s\varpi$ pour racine générale, ſi la méthode d'approximation étoit auſſi exacte & auſſi parfaite qu'il eſt poſſible.

12. On voit, en effet, que l'équation $-K^2+N^2+\frac{ii(NN-pp-KK)}{2[(N^2-p^2-K^2)^2-4p^2K^2]}=0$, ſe change en $(-K^2+N^2)[(N^2-p^2-K^2)^2-4p^2K^2]-\frac{ii}{2}\times(NN-p^2-K^2)=0$; & en négligeant la quantité $ii$, on voit qu'il en réſulte, 1°. $-K^2+N^2=0$, ou $K=N$, premiere valeur du mouvement de l'apogée; 2°. $(N^2-p^2-K^2)^2=4p^2K^2$, ou $N^2-p^2-K^2=\pm 2pK$; ou $\pm N=p\pm K$, & $K=p\pm N$; ſeconde valeur de $K$ qui déſigne les deux termes cof. $(p+N)\zeta$, & cof. $(p-N)\zeta$, que l'on auroit, en ſubſtituant ſimplement cof. $N\zeta$ au lieu de $t$ dans le terme $it$ cof. $p\zeta . d\zeta^2$.

13. Si dans l'équation $-2\varpi n^2+2kn^2-\frac{\lambda^2 n^4}{4[1+2kn^2-(1+\sigma n-\varpi n^2)^2}=0$, (art. 6) on négligeoit au dénominateur du dernier terme les quantités $2kn^2$, & $\varpi n^2$ qui ſont très-petites par rapport à $\sigma n$, au moins dans la théorie de la lune, on auroit $-2\varpi n^2+2kn^2+\frac{\lambda^2 n^3}{2.4\sigma+4\sigma^2 n}=0$; donc $\varpi=k-\frac{\lambda^2}{16}$ à peu près. Cette valeur approchée eſt la même que la valeur approchée trouvée ci-deſſus (art. 8) par la réſo-

lution de l'équation du ſecond degré qui donne la valeur de $\omega$. Si au lieu de $\omega n^2$ on ſubſtituoit ſa premiere valeur $kn^2$ dans l'équation $-K^2+N^2$, &c. $=0$, on auroit $-2\omega n^2+2kn^2-\frac{\lambda^2 n^3}{4(4kn-2\sigma-\sigma^2 n)}=0$; d'où l'on tire encore une autre valeur approchée de $\omega$, & même plus approchée que la précédente, mais moins exacte que celle qui réſulte de la réſolution rigoureuſe de l'équation du ſecond degré qui donne la valeur de $\omega$.

14. Mais s'il arrivoit, ce qui à la vérité n'a pas lieu dans la théorie de la lune, que $\sigma$ fût un nombre fort petit, alors la valeur approchée de $\omega=k+\frac{\lambda^2 n}{16q}$ ne ſeroit plus ſuffiſamment exacte, & il faudroit réſoudre rigoureuſement l'équation du ſecond degré en $\omega$. Il pourroit même arriver que la valeur de $\omega$ fût imaginaire, ce qui auroit lieu, par exemple, ſi $\sigma$ étoit $=0$, & que $k^2$ fût $<\frac{\lambda^2}{16}$ ou $\lambda=\pm 4\rho k$, $\rho$ étant un nombre plus grand que l'unité. Dans ce dernier cas, la valeur de $t$ renfermeroit néceſſairement des arcs de cercle; car le coſinus d'une quantité mixte imaginaire ou imaginaire ſimple, $(A+B\sqrt{-1})z$, ou $B\sqrt{-1}.z$, renfermera évidemment, comme je l'ai fait voir ailleurs (*a*), des quantités de cette forme $C^{Dz}$, $D$ étant un nombre réel, & ces quantités $C^{Dz}$ croîtront à meſure que $z$ croîtra. La valeur de $t$ ſera donc fautive dans ce dernier cas, ou ne ſera bonne tout au plus que pour un aſſez petit nombre de ré-

(*a*) Voyez *Opuſcules Mathématiques*, Tome I, page 111.

volutions; & on ne pourra, au moins par les méthodes connues juſqu'à préſent, aſſigner la valeur de $s$, même approchée, pour tant de révolutions qu'on voudra.

15. A l'égard du cas où la valeur de $\omega$ ſeroit réelle, mais beaucoup plus grande que la valeur $k + \frac{\lambda^2 n}{16q}$, il pourroit très-bien arriver que les approximations ou plutôt les opérations ſucceſſives, donnaſſent une valeur de $\omega$ exprimée par une ſerie, ou divergente, ou très-peu convergente; ainſi la valeur de $\omega$, qu'on auroit par ce moyen, ſeroit, ou très-fautive, ou au moins très-imparfaite.

16. Ces inconvéniens, je le répéte, n'ont point lieu dans la théorie de la lune; mais il ſuffit qu'ils puiſſent avoir lieu dans d'autres cas, pour voir que les méthodes d'approximation laiſſent encore beaucoup à déſirer pour la perfection de la ſolution générale de ces ſortes d'équations.

17. Les remarques précédentes ſur les différentes valeurs de $K$ & ſur la nature de ces valeurs, ſemblent d'autant plus néceſſaires, que le célèbre M. de la Grange avoit déja remarqué une duplicité de valeur dans le mouvement de l'apogée de Jupiter & de Saturne, d'après une équation du ſecond degré qui donne la quantité de ce mouvement; il eſt vrai que cette duplicité de valeur, qu'on auroit de même dans la lune, ſi la terre avoit deux ſatellites agiſſans l'un ſur l'autre, vient d'une circonſtance qui n'a pas lieu dans la théorie de la lune, ſavoir

de l'analogie & de la dépendance mutuelle des deux équations, par leſquelles on détermine les mouvemens de Jupiter & de Saturne, dépendance & analogie qui eſt fondée ſur l'action mutuelle de ces deux planetes. En effet, M. de la Grange, dans le troiſiéme Volume des Mémoires de la Société des Sciences de Turin, trouve que ſi on a les deux équations

$ddt + N^2 t\,dz^2 + iM\cos.pz \cdot t'\,dz^2 = 0$,

& $ddt' + N'^2 t'\,dz^2 + iM'\cos.pz \cdot t\,dz^2 = 0$;

& qu'on faſſe $y = f\cos.Kz$, & $y' = f'\cos.K'z$, $f$ & $f'$ ainſi que $K$ & $K'$ auront chacun deux valeurs, dans le cas où $p$ ſera peu différent de $N - N'$.

18. La raiſon de cette double valeur, vient de ce que la quantité $t'$ entre dans la premiere équation dont l'inconnue eſt $t$, & la quantité $t$ dans la ſeconde dont l'inconnue eſt $t'$. Pour le faire ſentir, ſoient d'abord ſuppoſées les équations beaucoup plus ſimples $ddt + (K^2 t + iMt')\,dz^2 = 0$; $ddt' + K'^2 t'\,dz^2 + iM't\,dz^2 = 0$; on aura $t' = -\frac{ddt + K^2 t}{iM}$, & $-d^4 t - K^2\,ddt - K'^2\,ddt - K'^2 K^2 t\,dz + i^2 MM' t\,dz^2 = 0$; d'où il eſt aiſé de voir, par les méthodes connues, que ſi on fait $t = G\cos.fz$, $f$ aura quatre valeurs, ou plutôt $ff$ en aura deux, repréſentées par l'équation $-f^4 + K^2 f^2 + K'^2 ff - K^2 K'^2 + ii M'M = 0$, ce qui donne

$$ff = \frac{K^2 + K'^2}{2} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{K^2 - K'^2}{2}\right)^2 + ii MM'\right]}.$$

Or à cauſe de la quantité très-petite $ii MM'$, on peut

réduire le radical à $\frac{K^2 - K'^2}{2} + \frac{ii MM'}{K^2 - K'^2}$ ; donc les deux valeurs de $ff$ seront $= K^2 + \frac{ii MM'}{K^2 - K'^2}$, & $K'^2 - \frac{ii MM'}{K^2 - K'^2}$.

19. Supposons, avec M. de la Grange, que $K$ & $K'$ different peu l'une de l'autre, ensorte qu'on ait $K = h + ik$, $K' = h + ik'$, on auroit, pour les deux valeurs de $f$ par les formules précédentes, $f = K + \frac{iMM'}{4.(k-k').k}$, $f = K' - \frac{iMM'}{4(k-k')h}$. Mais comme cette approximation pourroit n'être pas assez exacte, on résoudra les équations plus rigoureusement; & supposant les mêmes valeurs de $K$ & $K'$ que ci-dessus, on aura $f^2 = h^2 + ih(k+k') \pm i\sqrt{(h^2[k-k']^2 + MM')}$; d'où l'on voit, qu'en supposant $f = h + im$, on aura $im = \frac{i(k+k')}{2} \pm \frac{i\sqrt{(h^2(k-k')^2 + MM')}}{2h}$; donc on aura $(2m - 2k)(2m - 2k') = \frac{MM'}{4hh}$, équation que je mets sous cette forme, afin qu'on en voie plus aisément l'analogie avec le cas plus compliqué, que nous examinerons plus bas, art. 22.

20. Soient $m$ & $m'$ les deux valeurs de $m$, & on aura
$t = \lambda \cos.(h + im)z + \mu \cos.(h + im')z$,
$t' = \lambda' \cos.(h + im)z + \mu' \cos.(h + im')z$;
faisant donc les substitutions, on aura
$(-2im + 2ik)\lambda + iM\lambda' = 0$,

(—

$(-2im'+2ik)\mu+iM\mu'=0$,
$(-2im+2ik')\lambda'+iM\lambda=0$,
$(-2im'+2ik')\mu'+iM\mu=0$.

21. Ces quatre équations donneront d'abord deux équations en $m$ & en $m'$, toutes deux ſemblables, & de même forme que la précédente, dans laquelle les coefficiens $\lambda$, $\lambda'$, $\mu$, $\mu'$, ne ſe trouvent pas; enſuite on aura la valeur de $\lambda'$ en $\lambda$, & celle de $\mu'$ en $\mu$, & comme on doit avoir de plus deux valeurs initiales $a$, $a'$ de $t$ & de $t'$, on aura $\lambda+\mu=a$, $\lambda'+\mu'=a'$, d'où l'on tirera $\lambda$ & $\mu$.

22. Soient maintenant les équations

$ddt+K^2t\,dz^2+iMt'\cos.Hz.dz^2=0$;
$ddt'+K'^2t'dz^2+iM't\cos.Hz.dz^2=0$;

& ſoit $t=f\cos.(h+im)z$; on aura, par la méthode très-ſimple des indéterminées expoſée ci-deſſus, l'équation $-h^2-2him+K^2-\frac{iiMM'}{4}\times\left(\frac{1}{K'^2-(K+H+im)^2}+\frac{1}{K'^2-(K+im-H)^2}\right)=0$. Soit ſuppoſé enſuite, avec M. de la Grange, $K=h+ik$, $K'=h'+ik'$, & $H=h-h'$, on aura, au lieu de l'équation précédente, l'équation approchée $-2im+2ik-\frac{iiMM}{hh'.4(2ih'-2im)}=0$; équation tout-à-fait analogue à celle que nous avons trouvée, art. 19, pour un cas plus ſimple. Cette équation donnera deux valeurs de $m$; & comme l'équation demeure la même, en mettant $k'$ pour $k$, $k$ pour $k'$, $h$ pour $h'$, & $h'$ pour $h$, il eſt viſible, ainſi que M. de la Grange l'a

remarqué, que les valeurs de $m$ ſont les mêmes pour $t$ & pour $t'$, enſorte que ſi les deux valeurs ſont $m$ & $m'$, & ſi on fait $t = \lambda \text{ cof. } (h + i m) z + \mu \text{ cof. } (h + i m') z$, on aura $t' = \lambda' \text{ cof. } (h' + i m) z + \mu' \text{ cof. } (h' + i m' z)$. Or il eſt aiſé de voir que la ſubſtitution de la valeur de $t'$, dans la premiere équation, donnera un terme de cette forme $\frac{i M \mu'}{2} \text{ cof. } (h - h' + h' + i m') z = \frac{i M \mu'}{2}$ $\times \text{cof. } (h + i m') z$; & qu'ainſi on aura, d'après nos méthodes, la valeur de $\mu$ en $\mu'$; par la même raiſon, on aura la valeur de $\lambda$ en $\lambda'$; de ſorte que les deux valeurs initiales de $t$ & de $t'$, exprimées par des conſtantes, donneront les valeurs de $\lambda, \mu, \lambda', \mu'$.

23. On parviendroit au même réſultat, & même d'une maniere plus ſimple, en prenant ſeulement $t = \lambda \text{ cof. } (h + i m) z$, & $t' = \mu' \text{ cof. } (h' + i m') z$; car on trouveroit, par le moyen de la valeur de $t'$, un autre terme de la valeur de $t$, égal à $\mu \text{ cof. } (h + i m') z$; & par le moyen de la valeur de $t$, un autre terme de la valeur de $t'$, égal à $\lambda' \text{ cof. } (h' + i m) z$. Ce qui indique cette derniere ſubſtitution de $\lambda \text{ cof. } (h + i m) z$ à la place de $t$, & de $\mu' \text{ cof. } (h' + i m') z$ à la place de $t'$, c'eſt que ſi $M$ & $M'$ étoient $= 0$, on auroit ſimplement $(-m + k) \times (k' - m) = 0$, & par conſéquent $m = k$ & $m = k'$; or comme dans l'hypothèſe préſente on a ſimplement $d d t + K^2 t d z^2 = 0$, $d d t' + K'^2 t' d z^2 = 0$, il eſt aiſé de voir que les deux valeurs de $m$ ne conviennent point à-la-fois à chacune de ces équations; mais la premiere

valeur de $m$ à la premiere équation, & la ſeconde à la ſeconde. Si on avoit ſimplement $M = 0$, les deux valeurs de $m$ conviendroient à la ſeconde équation, & la premiere à la premiere ſeule; & ſi on avoit ſimplement $M' = 0$, les deux valeurs de $m$ conviendroient à la premiere équation, & la ſeconde à la ſeconde équation ſeule. Nous ne nous étendrons pas davantage ſur ce ſujet; c'en eſt aſſez pour mettre ſur la voie ceux qui voudroient pouſſer cette recherche plus loin.

24. On voit aſſez que s'il y avoit trois équations & trois inconnues $t, t', t''$, l'équation qui donneroit la valeur de $m$ monteroit au troiſiéme degré, au quatriéme s'il y avoit quatre équations, comme dans la théorie des quatre ſatellites de Jupiter, & le calcul en deviendroit beaucoup plus compliqué, d'autant que dans ce cas le mouvement de l'apogée ne dépendroit pas ſeulement de l'action mutuelle des ſatellites, mais auſſi de l'action du ſoleil, comme dans la théorie de la lune. Par exemple, ſi dans la premiere ſeulement des deux équations, il y avoit, comme dans la théorie de la lune, un terme de cette forme $+ i\,t \cos. p\zeta . d\zeta^2$, on auroit, en combinant enſemble les méthodes données ci-deſſus, $-2im+$

$$2ik - \frac{\lambda^2 ii}{4(h^2+2hik-(p-h-im)^2)} - \frac{ii MM'}{4(hh')(2ik'-2im)}$$

$= 0$, & faiſant $p = 2h + i\omega$, on auroit $-2im+2ik-$

$$\frac{i^2\lambda^2}{4(2hik-2hi\omega-2him)} - \frac{i^2 MM'}{4hh'(2ik'-2im)} = 0;$$

équation plus compoſée que celle de l'art. 22, & qui

le ſeroit encore davantage, ſi dans la ſeconde des deux équations il y avoit auſſi un terme de cette forme $+ i L t' \text{cof.} p' \zeta . d\zeta^2$.

25. Soit $k - m = x$, $k' - k = \sigma$, on aura $x - \frac{\lambda^2}{16h(x-\omega)} - \frac{MM'}{16hh'(x+\sigma)} = 0$; ce qui donne une équation du troiſiéme degré, qui dans le cas où $x$ ſeroit beaucoup plus petit que $\omega$, peut ſe réduire à l'équation du ſecond degré $x + \frac{\lambda^2}{16h\omega} - \frac{MM'}{16hh'(x+\sigma)} = 0$, équation qui peut encore ſe partager en ces deux-ci (en faiſant $x =$ à la ſomme de deux indéterminées $\eta + \rho$) $\rho + \frac{\lambda^2}{16h\omega} = 0$; $\eta - \frac{MM'}{16hh'(\eta+\varsigma+\sigma)} = 0$; ou même $\eta - \frac{MM'}{16hh'(\eta+\sigma)} = 0$, dans le cas où $\rho$ ſe trouveroit très-petit par rapport à $\eta$.

26. Il eſt facile de juger par tous ces détails, des difficultés & de la complication de calculs que renferme la recherche du mouvement de l'apogée des planetes, enviſagée dans toute ſon étendue. Une des difficultés principales, & qui eſt commune à toutes les méthodes, c'eſt de déterminer le mouvement de l'apogée, ou la quantité $N$ qui doit le donner, par une ſuite qui ſoit aſſez convergente, enſorte qu'on n'ait pas lieu de craindre, qu'en pouſſant de plus en plus l'approximation, on ne tombe dans des valeurs de $N$ fort différentes de la premiere. On ſait déja que cet inconvénient a lieu dans la théorie de la lune; mais on ſait auſſi qu'il ne ſub-

ſiſte. que dans les deux premiers termes de la ſerie qui donne le mouvement de l'apogée ; après ces deux premiers termes, dont le ſecond n'eſt pas fort différent de l'autre, les termes ſuivans ſont beaucoup plus petits & plus convergens. Mais on ſent aſſez que cela dépend de la valeur de la quantité $n$, qui dans la théorie de la lune, ſe trouve aſſez petite pour produire cet effet; & que dans l'équation $ddt + N^2 t dz^2 + it \cos. pz \cdot dz^2 = 0$, on pourroit ſuppoſer à $p$ une telle valeur, que l'équation $-K^2 + N^2 - \frac{ii}{4[N^2-(p-K)^2]} = 0$, donnât pour $K$ une valeur très-différente de ſa premiere valeur $N$. Par exemple, ſi $p$ ſe trouvoit à très-peu près égal à $2N$, en ce cas, le terme $\frac{ii}{4[N^2-(p-k)^2]}$ pourroit devenir conſidérable ; & il y auroit à craindre, qu'en pouſſant le calcul plus loin, on ne trouvât encore d'autres termes très-grands ; enſorte que la ſerie ou l'équation, qui donneroit en ce cas la valeur de $K$, ſeroit très-fautive.

27. Le même inconvénient n'eſt pas moins à craindre dans l'équation de l'article 22, $-2im + 2ik - \frac{iiMM'}{16hh'(ik'-im)} = 0$; en effet, la valeur de $m$ qu'on trouveroit par la premiere approximation, ſeroit $= k$, & cette valeur très-peu exacte, ſeroit très-différente de celle que donne l'équation précédente tirée de la ſeconde approximation qui a fourni le terme $-\frac{iMM'}{16hh'(k'-m)}$

très-comparable au premier. Or comment peut-on être assuré qu'une troisiéme approximation ne donneroit pas encore un nouveau terme très-comparable aux deux précédens, d'où il résulteroit pour $m$ une ou plusieurs nouvelles valeurs très-différentes de celles que les calculs ont données ?

28. Nous ne devons pas oublier d'insister sur une remarque que nous avons déja indiquée plus haut (art 11); c'est que l'équation qui renferme la valeur de $K$, dans une équation de cette forme $ddt + N^2 t dz^2 + i t dz^2 \times \text{cos.} pz = 0$, doit, si elle est exacte, avoir pour racine générale $\pm rp \pm s\omega$, $r$ & $s$ étant des nombres entiers, & $\omega$ celle des valeurs de $K$ qui donne le mouvement de l'apogée. Cette valeur $\omega$ de $K$ sera celle qui appartient au terme affecté du plus grand coefficient. Je m'explique. Dans la théorie de la lune, par exemple, on trouve que la serie des argumens ou angles est $f$ cos. $Kz + \gamma$ cos. $2z - 2nz + \delta$ cos. $2z - 2nz - Kz + i$ cos. $2z - 2nz + Kz$, &c. Or dans cette serie, l'argument $Kz$ représente l'anomalie, parce que le coefficient $f$ est beaucoup plus grand que les autres. S'il y avoit deux coefficiens $f$, $\gamma$, considérablement plus grands que tous les autres, & qui fussent à peu près égaux, ou du moins dont l'un ne fut pas très-petit par rapport à l'autre, il y auroit alors (comme dans l'art. 22) deux valeurs différentes pour la quantité $K$ ou $\omega$ qui donne le mouvement des apsides ; ou, pour s'exprimer avec plus d'exactitude, soient $f$ cos. $\omega z + f'$ cos. $\omega' z$ les deux termes dont il

s'agit, l'apſide ſera aux points où l'on aura $f\omega$ ſin. $\omega z + f'\omega'$ ſin. $\omega' z = 0$; elle ne ſe trouvera donc réellement (du moins avec une certaine marche réguliere) qu'aux points où les angles $\omega z$ & $\omega' z$ ſont en même-temps des multiples de 180° ou de 360°; dans les autres points, ſa marche ſera fort peu réguliere, & dépendante de l'équation $\frac{f\omega}{f\omega'} = -\frac{\text{ſin. } \omega' z}{\text{ſin. } \omega z}$. Au lieu que ſi l'on n'avoit qu'un ſeul terme $f$ cof. $\omega z$, dont le coefficient $f$ fût beaucoup plus grand que les autres, ce terme donneroit à très-peu près la poſition de l'apſide dans tous les points où $\omega z$ eſt un multiple de 180 ou de 360 degrés.

29. Il réſulte, ce me ſemble, de ces différentes réflexions, que ſi après avoir ſuppoſé dans l'art. 23, $t = \lambda \times$ cof. $(h + lm)z$, on ſuppoſe $t'$ égal non pas à $\mu$ cof. $(h' + im'z)$, mais à $\mu'$ cof. $(h' + imz)$, ſuppoſition permiſe, puiſque $m$ & $m'$ ſont les deux valeurs convenables l'une & l'autre à chacun des deux premiers termes que renferme l'expreſſion de $t$ & de celle de $t'$, les argumens ou angles que renferme la valeur de $t$ doivent être $\pm r(h - h')z \pm s(h' + im)z$, & que ceux de la valeur de $t'$ doivent être $\pm rz(h - h') \pm sz(h + im)$; & que plus (art. 23) un des argumens de la valeur de $t$ doit être $= (h + im')z$, & un de ceux de la valeur de $t'$ doit être $= (h' + im')z$. Or comme $m$ & $m'$ ſont les racines d'une équation du ſecond degré, on aura donc $m = 1 + \sqrt{Q}$, & $m' = 1 - \sqrt{Q}$, $\sqrt{Q}$ exprimant une quantité radicale. Cela poſé, il faut donc que $\pm r(h -$

$h') \pm s(h' + im)$ ou (ce qui eſt la même choſe) $\pm r(h - h') \pm s(h' + i\nu + i\sqrt{Q})$ puiſſe devenir égal à $h + im'$, ou $h + i\nu - i\sqrt{Q}$; & que $\pm r(h - h') \pm s(h + im)$ ou $\pm r(h - h') \pm s(h + i\nu + i\sqrt{Q})$ puiſſe devenir égal à $h' + i\nu - i\sqrt{Q}$; & c'eſt principalement cette conſidération qui doit décider ſi l'équation $-2im + 2ik - \frac{iiMM'}{4hh'(2ik' - 2im)} = 0$, repréſentera, au moins à peu près, le mouvement des apſides. C'eſt ainſi que nous avons déja vu (art. 12) que les principaux argumens de l'équation lunaire ſont renfermées dans l'équation du mouvement des apſides de cette planete.

30. Or je ne vois pas comment, dans aucun cas, $\pm r(h - h') \pm s(h' + i\nu + i\sqrt{Q})$ peut devenir égal à $h + i\nu - i\sqrt{Q}$, ni $\pm r(h - h') \pm s(h + i\nu + i\sqrt{Q})$ égal à $h' + i\nu - i\sqrt{Q}$; 1°. parce que dans $\pm r(h - h') \pm s\left(\frac{h'}{h} + i\nu + i\sqrt{Q}\right)$ les deux quantités $\nu$ & $\sqrt{Q}$ ont conſtamment un ſigne ſemblable, au lieu qu'il eſt différent dans $\frac{h}{h'} + i\nu - i\sqrt{Q}$; 2°. parce que le coefficient très-petit $i$, d'où dépend le mouvement des apſides, eſt abſolument indépendant de $h$ & de $h'$, enſorte que l'on ne peut ſuppoſer aucune équation entre $i\nu$, & $h$, $h'$. Par exemple, dans la théorie de Jupiter & de Saturne, le coefficient $i$ vient de la fraction très-petite qui exprime le rapport de la maſſe de ces planetes au ſoleil, & les quantité $h$ & $h'$ viennent du rapport des révolutions, qui eſt abſolument indépendant de la maſſe de ces planetes.

Dans

Dans la lune, au contraire, le mouvement de l'apogée ou la force qui le cauſe, venant de l'action du ſoleil, a une liaiſon avec la cauſe qui produit la révolution de la lune; & cela eſt ſi vrai, que la force perturbatrice eſt de l'ordre de $n^2$, $n$ étant le rapport des temps périodiques de la lune & de la terre. En un mot, dans la théorie de la lune, la révolution de la planete, comparée à celle de la terre, dépend du rapport de la maſſe de la terre à celle du ſoleil, & le mouvement de l'apogée dépend auſſi de ce même rapport; au lieu que dans la théorie de Jupiter & de Saturne, le mouvement de l'apogée dépend uniquement de la maſſe de ces planetes, & la révolution de la maſſe du ſoleil; ainſi il peut ſe faire, que quoique l'équation qui donne la valeur de $K$ ſoit à peu près exacte dans la théorie de la lune, elle ne le ſoit pas dans celle de Saturne & de Jupiter. Dans la théorie de la lune, $K$ & $2 - 2n - K$ ſont à peu près les deux racines de l'équation qui exprime la valeur de $K$, parce qu'en ſuppoſant $K = \nu + \sqrt{Q}$, & $2 - 2n - K = \nu - \sqrt{Q}$, on trouve $\nu = 1 - n$, comme l'analyſe le donne en effet à très-peu près. Mais dans la théorie de Saturne & de Jupiter, les quantités $h$ & $h'$ n'ayant aucun rapport avec le coefficient $i$, & ces quantités étant tout-à-fait indépendantes l'une de l'autre, on ne voit pas comment $\pm r(h - h') \pm s(h' + i\nu + i\sqrt{Q})$ peut produire un terme de la forme $h + i\nu - i\sqrt{Q}$, &c.; il ſemble qu'il n'en puiſſe jamais réſulter qu'un terme de la forme $h + i\nu + i\sqrt{Q}$, ce qui arrivera, par exemple, ſi $\pm r = +1$,

& $\pm s = +1$. Cependant il eſt certain, comme nous l'avons vu, que la valeur de $t$ doit renfermer l'argument $h + i\nu - i\sqrt{Q}$, ainſi que la valeur de $t'$ l'argument $h' + i\nu - i\sqrt{Q}$. Il me paroît donc que la ſolution eſt imparfaite à cet égard, & je crois que cet inconvénient a lieu dans toutes les ſolutions. Je ſais bien qu'en prenant $\mu'$ cof. $(h' + im')\zeta$ au lieu de $\mu'$ cof. $(h' + im)\zeta$ pour la premiere valeur de $t'$, on évitera cet inconvénient. Je ſais bien même que cette valeur eſt naturellement celle qu'on doit choiſir, comme je l'ai prouvé plus haut, art. 23. Mais enfin la ſolution fait voir que $m$ & $m'$ donnent également les deux valeurs de $K$ dans $t$ & dans $t'$, & je demande pourquoi il n'eſt pas permis de prendre indifféremment l'une ou l'autre de ces valeurs pour la faire entrer dans la premiere valeur de $t$ & dans celle de $t'$; pourquoi, en prenant d'abord $t = \lambda$ cof. $(h + im')\zeta$, & $t' = \mu'$ cof. $(h' + im)\zeta$, on tombe dans une ſolution imparfaite, & à laquelle il manque un terme ou argument eſſentiel, quoiqu'il ſemble par l'équation qui donne la valeur de $K$, qu'on ſoit auſſi autoriſé à ſuppoſer ces premieres valeurs à $t$ & à $t'$, que les valeurs $\lambda$ cof. $(h + im)\zeta$, & $\mu'$ cof. $(h' + im')\zeta$, qui donnent une ſolution exacte.

31. Dans la théorie de la lune, ou pour fixer les idées, dans l'intégration de l'équation $ddt + N^2 t d\zeta^2 + it d\zeta^2$ cof. $p\zeta = 0$, il peut ſe rencontrer une difficulté d'une autre eſpéce. Si au lieu de prendre $f$ cof. $K\zeta$ pour la premiere valeur de $t$, on prend $\lambda$ cof. $(2 - 2n - K\zeta)$, d'après ce que nous avons vu, que $2 - 2n - K$ eſt une des

racines de l'équation en $K$, & qu'on employe la méthode des coefficiens indéterminés exposée dans l'art. 1 du §. I de ce Mémoire; on trouvera bien, dans la valeur de $t$, un terme de cette forme $g$ cos. $Kz$, tel qu'il doit y en avoir un, & ainsi on ne tombera pas à cet égard dans l'inconvénient marqué ci-dessus; mais ce coefficient $g$ sera du même ordre que le coefficient $\lambda$, puisqu'en supposant $i$ de l'ordre de $n^2$, $g$ sera de l'ordre de $\frac{\lambda n^2}{K^2 - N^2}$ ou $\lambda$; or $g$ doit être beaucoup plus grand que $\lambda$, comme le prouvent la théorie & les observations. Je sais bien que la substitution de $\lambda \times$ cos. $(2 - 2n - K)z$ à la place de $t$, seroit peu naturelle, au lieu de celle de $f$ cos. $Kz$ qui se présente d'elle-même; mais cependant l'inconvénient qui en résulte, semble indiquer une imperfection dans la solution; car il faudroit, pour qu'elle ne laissât rien à désirer, que prenant en général le premier terme de la valeur de $t = f$ cos. $K'z$, ($K'$ étant une racine quelconque de l'équation en $K$), on en tirât tous les autres termes que doit renfermer cette valeur, c'est-à-dire les vrais argumens & les vrais coefficiens de ces termes. Je ne sais si je me trompe; mais il me semble que cette difficulté est commune à toutes les méthodes connues jusqu'ici pour intégrer l'équation de l'orbite lunaire; méthodes dont la plus facile & la plus simple est celle des coefficiens indéterminés, que par cette raison nous avons cru devoir employer par préférence. En un mot, il me semble, que pour ne rien laisser à désirer sur l'analyse de l'orbite lunaire, il faudroit, qu'en faisant $t$

$= f \cos. K'\zeta$, & ſubſtituant pour $t$ cette valeur dans les petits termes de l'équation, on trouvât, du moins à peu près, la même valeur pour les autres termes, en prenant pour $K$ une des racines à volonté de l'équation en $K$ qui donne le mouvement de l'apogée. Or c'eſt ce qui n'eſt pas. Car ſoit en général $t = f \cos. K'\zeta$, & ſoit ſubſtituée cette valeur à la place de $t$ dans les petits termes ; on trouvera, en ſuppoſant $i$ de l'ordre de $n^2$, que le terme, par exemple, qui aura pour argument $(2 - 2n - K')\zeta$, ſera (en ſuivant les plus exactes des méthodes connues) de l'ordre de $\frac{n^2 f}{(2-2n-K')^2 - N^2}$ ; c'eſt pourquoi, ſi on prend $\omega$ & $2 - 2n - \omega$ pour deux des racines de l'équation en $K$, comme elles le doivent être, on aura, en ſuppoſant $K' = \omega = 1 + \beta n^2$, l'argument $(2 - 2n - K')\zeta = (2 - 2n - \omega)\zeta$, & le coefficient de l'ordre de $\frac{n^2 f}{(1-2n-\beta n^2)^2 - N^2}$, c'eſt-à-dire de l'ordre de $nf$, comme il le doit être ; de ſorte que le coefficient de ce terme ſera de l'ordre de $n$ par rapport à celui de $\cos. \omega\zeta$ ; au lieu qu'en ſuppoſant $K' = 2 - 2n - \omega$, l'argument $(2 - 2n - K')\zeta$ deviendra $\omega\zeta$, & le coefficient ſera de l'ordre de $\frac{n^2 f}{\omega^2 - N^2}$ ; c'eſt-à-dire de l'ordre de $f$, & par conſéquent du même ordre que le coefficient de $\cos. (2 - 2n - \omega)\zeta$, ce qui ne doit pas être.

32. On trouvera plus bas dans le quarante-deuxiéme Mémoire, §. I, de nouvelles traces d'imperfection dans la méthode d'approximation par laquelle on intégre

des équations analogues à celles dont il a été queſtion dans ce Mémoire-ci. Ce qu'on vient de lire ſuffit, quant à préſent, pour faire voir combien les méthodes employées juſqu'ici dans la ſolution du problême des trois Corps, & en particulier dans la théorie de la Lune, ont beſoin d'être perfectionnées ; & c'eſt de quoi on va être encore convaincu par le Mémoire ſuivant.

*Fin du trente-neuviéme Mémoire.*

# XL^ME MÉMOIRE.

## *Examen de quelques autres points importans de la Théorie de la Lune.*

### §. I.

### *Des difficultés que renferme la recherche de certaines équations du lieu de la lune.*

1. UNE des plus grandes difficultés que renferme la théorie de la lune, eſt celle qui vient des termes où ſe trouve $\text{cof.}\zeta - n\zeta + \pi n\zeta$, $\zeta$ déſignant le mouvement de la lune, $n\zeta$ celui de la terre, & $\pi n\zeta$ ſon anomalie. Ayant calculé par ma méthode le coefficient de ces termes dans l'équation différentielle, je trouve qu'il eſt $= + \frac{15n^2a\lambda}{8B}$, $B$ exprimant la diſtance moyenne de la terre au ſoleil, & $\lambda$ l'excentricité de l'orbite terreſtre. Le terme qui en réſulte dans la valeur de $u$, a pour coefficient à très-peu près $- \frac{15n^2a\lambda}{B} \times \frac{1}{1 - \frac{3n^2}{2} - (1 - n + \pi n)^2}$

$= + \frac{5a\lambda}{4B}$ (*a*) ; ce qui donne d'abord dans la valeur de $x$ un terme $= -\frac{5a\lambda}{4B}$ cof. $z - nz + \pi nz$ ; d'où il réſulte, dans la valeur de $t$, un terme $= -\frac{10a\lambda}{4B}$ × ſin. $z - nz + \pi nz$, & dans celle de $z$ un terme $= +\frac{10a\lambda}{4B}$ ſin. $z - nz + \pi nz$ ; or $\lambda =$ environ $\frac{1}{60}$ ; & ſi on ſuppoſe la parallaxe moyenne de la lune d'environ 57′ & celle du ſoleil de 10″, on a $\frac{a}{B} = \frac{10''}{57'}$ ; donc l'équation qui viendra de ce terme ſera environ $57^{o} \times \frac{1}{60} \times \frac{10''}{57'} \times \frac{5}{2} =$ environ 25″ ſin. $z - nz + \pi nz$, qu'il faut ajouter au lieu moyen ; ou, ce qui revient au même, 25″ ſin. $z - nz + \omega$ (*b*) qu'il faut en ôter, en prenant $\omega = 180^{o} + \pi nz$ pour l'anomalie moyenne du ſoleil.

2. Ces termes de l'équation de l'orbite lunaire ont été l'objet d'une longue conteſtation entre feu M. Clairaut & moi. Ce grand Géometre avoue (voyez ſa Théorie de la Lune, premiere & ſeconde édition, §. XXVII)

(*a*) Je n'avois trouvé ce terme égal qu'à $+\frac{5a\lambda}{8B}$, Tome I, pag. 72 des *Recherches ſur le ſyſtême du Monde* ; mais en conſéquence de la remarque faite page 245 du même Volume, il a fallu l'augmenter à peu près du double.

(*b*) J'avois d'abord trouvé cette équation de 18″, tant par la raiſon donnée dans la note précédente, que parce que je ſuppoſois la parallaxe du ſoleil de 15″ au lieu de 10″ ; ce qui devoit, d'une part, diminuer le coefficient de la moitié, & l'augmenter de l'autre dans la raiſon de 15 à 10, ou de 3 à 2.

que ces termes ſe trouvent *très-grands* par ſa Théorie ; & même qu'ils ſeroient *infinis*, ſi l'apogée du ſoleil étoit immobile ; par la raiſon, qu'au lieu de diviſer, comme moi, le coefficient de cof. $z - nz + \pi nz$ dans l'équation différentielle par $1 - \frac{3n^2}{2} - (1 - nz + \pi nz)^2$, il le diviſe par $1 - (1 - nz + \pi nz)^2$, quantité énormément petite, & même $= 0$, ſi l'apogée du ſoleil eſt immobile. J'ai démontré, ſi je ne me trompe, (*Opuſcules*, Tome II, pag. 258 & ſuiv.) que le diviſeur doit être en effet tel que je le ſuppoſe ; & toutes les autres théories (à l'exception de celle de M. Clairaut) ſont en cela d'accord avec la mienne. On peut même faire voir que celle de M. Clairaut conduit au même réſultat, en ayant recours à un expédient auquel cet Académicien n'a pas penſé. Cet expédient conſiſte à remarquer, que ſi on ſuppoſe $\varpi$ cof. $z - nz + \pi nz$ pour le terme cherché de la valeur de $u$, $\varpi$ étant un coefficient indéterminé, l'équation différentielle de l'orbite dans les calculs de M. Clairaut, acquérera le terme $+ \frac{15n^2 a\lambda}{8B} \times$ cof. $z - nz + \pi nz$, & outre cela un terme $= - \frac{3n^2\varpi}{2}$ cof. $z - nz + \pi nz$ ; ce qui donnera, ſuivant l'analyſe de M. Clairaut, le terme $\frac{\left(-\frac{15n^2 a\lambda}{8B} + \frac{3n^2\varpi}{2}\right)}{1 - (1 - nz + \pi n)^2} \times$ cof. $z - nz + \varpi nz$ ; & faiſant cette quantité $= \varpi$, on aura $\varpi =$ à très-peu près $\frac{15n^2 a\lambda \cdot 2}{8 \cdot 3n^2 B} = \frac{5a\lambda}{4B}$, comme nous

nous le trouvons par notre méthode, mais, à la vérité, d'une maniere beaucoup plus ſimple.

3. Ce même Géometre, qui trouve ſi grande par ſa théorie l'équation proportionnelle à ſin. $z - nz + \pi nz$, prétend, d'un autre côté (*a*), que ſi on la fait même monter à 18″, comme je l'avois trouvé d'abord, au lieu de 25″ que je trouve maintenant, les erreurs des obſervations en ſont augmentées. On peut voir ce que je lui ai répondu ailleurs ſur ce ſujet (*b*). Je me contenterai de dire aujourd'hui, que pour décider pleinement cette queſtion, il faut voir quelle altération peut ſubir le coefficient de cof. $z - nz + \pi nz$. Cette altération, qui ſera de l'ordre de $\frac{n\lambda a}{B}$, vient de la combinaiſon de pluſieurs termes qui contiennent cof. $2z - 2nz + \pi nz$ dans les valeurs de $\psi$ & de $\pi$, combinés avec ceux qui contiennent cof. $z - nz$ dans la valeur de $u$. Suppoſons que ces différens termes donnent pour le changement qu'on doit faire dans la valeur de $u$, un terme qui ſoit à peu près égal à $-\frac{12na\lambda}{B}$, le coefficient total de cof. $z - nz + \pi nz$ ſe réduira à $\frac{a\lambda}{4B}$ à très-peu près ; & l'altération du lieu moyen ne ſera plus que de 5″ au lieu de 25″, trouvées par le premier calcul. C'eſt un

(*a*) Voyez le Journal des Savans de Décembre 1761, ſecond Volume, & celui de Juin 1762.

(*b*) Voyez le Journal Encyclopédique du 15 Février 1762, & celui du 15 Août de la même année.

point qui mérite d'être ſérieuſement examiné par ceux qui ſe propoſeront de perfectionner la théorie de la lune.

4. Il eſt un autre terme qui demande beaucoup d'attention dans les calculs, c'eſt celui qui auroit pour coefficient cof. $2Z - 2pZ - 2NZ$; comme le coefficient de $z$ dans ces termes-là eſt de l'ordre de $n^2$, ce coefficient donnera dans le calcul du temps un diviſeur de l'ordre de $n^4$; il faut donc pouſſer le ſcrupule très-loin dans la détermination des quantités qui y entrent. J'avois trouvé dans le calcul de l'orbite de la lune qu'il en réſultoit une équation négative $\& = -39''$. M. Clairaut l'a trouvée d'abord poſitive $\& = +1'\,12''$. Dans ſes dernieres tables, il la ſuppoſe $= 0$, & M. Mayer n'y a non plus aucun égard; à l'égard de M. Euler, il la trouve beaucoup plus grande. Il s'en faut donc beaucoup que la vraie valeur de cette équation ſoit encore connue.

5. Il en faut dire à peu près autant, quoiqu'avec reſtriction, de l'équation du lieu qui a pour argument ſin. $2z - 2nz - 2Nz$, & qui aura pour diviſeur, après les intégrations, une quantité de l'ordre de $n^2$. Je l'ai trouvée de $2'\,28''$, M. Clairaut de $2'\,13''$, & enſuite de $3'\,18''$, ce qui ſe rapproche beaucoup de M. Mayer.

6. En général, une des grandes difficultés de la théorie de la lune, conſiſte dans pluſieurs termes dont le calcul eſt fondé ſur une approximation très-imparfaite, enſorte que les coefficiens de ces termes ne ſont point repréſentés, comme ils devroient l'être, par une ſerie convergente, mais ſe trouvent par une ſeconde approximation

beaucoup plus grands ou plus petits que par la premiere ; ce qui en rend la valeur tout-à-fait incertaine. Pour s'en convaincre, il ſuffit de jetter les yeux ſur la derniere formule du lieu de la lune donnée par M. Clairaut en 1765, & ſur celle qu'il avoit donnée en 1752 ; on trouvera, outre les différences que nous venons de remarquer,

Que le coefficient du terme, qui a pour argument $Z - nZ$, eſt dans ſes premieres tables $-3'\,40''$, & dans les ſecondes tables $-1'\,58''$.

Que celui du terme qui a pour argument $\pi nZ$, eſt dans ſes premieres tables $16'\,36''$, & dans les ſecondes tables $11'\,25''$.

Que l'équation qui a pour argument $4Z - 4nZ - 2NZ$, a pour valeur dans les premieres tables $43''$, & $33''$ dans les nouvelles.

Que l'équation qui a pour argument $Z - nZ - NZ$, a pour valeur $-0'\,4''$ dans les premieres tables, & $+23''$ dans les nouvelles.

Que celle qui a pour argument $Z - nZ + NZ$, a pour valeur $15''$ dans les premieres tables, & $6''$ dans les nouvelles.

Que celle qui a pour argument $2Z - 2nZ + 2NZ$, a pour valeur $9''$ dans les premieres tables, & $18''$ dans les nouvelles.

Que celle qui a pour argument $2Z - 2nZ - 2NZ + 2\pi nZ$, a pour valeur $20''$ dans les premieres tables, & qu'elle eſt nulle dans les nouvelles.

Que celle enfin qui a pour argument $2nZ - 2pZ$, a

pour valeur $1' 21''$ dans les premieres tables, & $1' 1''$ dans les nouvelles.

7. Toutes ces différences, qu'on ne ſauroit attribuer, du moins ſans exception, à de ſimples fautes de calcul commiſes dans les premieres tables, prouveroient de nouveau, s'il étoit néceſſaire, l'imperfection des méthodes d'approximation, pour déterminer au moins quelques équations de la lune, & la néceſſité de corriger, s'il eſt poſſible, cette imperfection, pour l'avantage de l'analyſe & de l'aſtronomie tout-à-la-fois.

8. Je ne dois pas négliger de remarquer, que ſi l'équation dont l'argument eſt $2Z - 2pZ - 2NZ$ eſt proportionnelle au quarré de l'excentricité, au quarré du ſinus de l'inclinaiſon, & au quarré de $\frac{1}{n^2}$, comme il paroît réſulter des calculs expoſés dans nos *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, premiere Partie, chap. XI, pages 85 & 86, & chap. XVI, pag. 136, il pourroit ſe faire que cette équation fût très-ſenſible dans les ſatellites de Jupiter où $n$ eſt une quantité fort petite. Car dans le premier ſatellite de Jupiter, par exemple, $n$ eſt $= \frac{1^j\ 18^h}{12^{ans}} = \frac{1+\frac{1}{4}}{12.365}$; d'où l'on voit que $\frac{1}{n^2}$ eſt dans ce ſatellite une quantité très-conſidérable, & par conſéquent pourroit donner une équation aſſez grande pour l'argument $2L - 2pZ - 2NZ$, c'eſt-à-dire, pour la diſtance de l'apogée du ſatellite au nœud. Mais la théorie des ſatellites de Jupiter eſt déja imparfaite à tant d'autres égards, qu'il s'écoulera beaucoup de temps avant qu'on

puiſſe connoître avec quelque exactitude, non-ſeulement l'équation dont il s'agit, mais beaucoup d'autres équations qui altèrent le mouvement de ces ſatellites.

## §. II.

### *Sur quelques corrections qu'on propoſe de faire aux tables de la lune de M. Mayer.*

1. Les tables de la lune, publiées en 1752 par M. Mayer, étant d'un uſage très-facile, & outre cela très-exactes, j'ai cherché les moyens de les rendre plus exactes encore, s'il eſt poſſible, ſans en augmenter, pour ainſi dire, le calcul. Pour y parvenir, voici les réflexions que j'ai faites.

2. Soit $z$ l'arc du mouvement vrai de la lune, $Z$ l'arc de ſon mouvement moyen pendant le même temps; on aura, en conſervant les noms qui ont été donnés dans la théorie de la lune,

$$Z = z + \alpha \text{ ſin. } Nz + \zeta \text{ ſin. } 2Nz + \gamma \text{ ſin. } 3Nz + \delta \text{ ſin. } 2z - 2nz + \epsilon \text{ ſin. } 2z - 2nz - Nz + \eta \text{ ſin. } 2z - 2nz - 2Nz + \lambda \text{ ſin. } 2nz - 2pz + \omega.$$

3. Dans cette formule, j'appelle $\omega$ la ſomme de toutes les petites équations, que je mets à part un moment pour ne conſidérer que les précédentes. Cela poſé,

4. En premier lieu, j'ai remarqué dans le quatorziéme Mémoire de mes *Opuſcules*, Tome II, qu'il y a une équation égale à $-1' 12''$ ſin. $4Z - 4z' - N.Z$, qui mérite qu'on y ait égard. Or de cette équation, il n'y en a

que les deux tiers qui puiſſent être cenſés compris dans les tables de M. Mayer, par la conſtruction même de ces tables. Car cette équation vient de la ſubſtitution de $Z - \frac{1}{2}\delta$ ſin. $2Z - 2z'$ dans $\epsilon$ ſin. $2z - 2z' - Nz$, & de celle de $Z - \epsilon$ ſin. $2Z - 2z' - NZ$ dans $\frac{1}{2}\delta$ ſin. $2z - 2z'$; ce qui donne dans le lieu moyen la correction $(-\frac{\epsilon\delta}{2} - \epsilon\delta)$ ſin. $4Z - 4z' - N.Z$, équation dans laquelle la partie $-\frac{\epsilon\delta}{2}$, qui vient de la correction du terme $\epsilon$ ſin. $2z - 2z' - Nz$ par le terme $\frac{1}{2}\delta$ ſin. $2Z - 2z'$, a été négligée par M. Mayer; or puiſque l'équation totale $-\frac{\epsilon\delta}{2}$ eſt d'environ 1′ 12″, il s'enſuit que ſon tiers $-\frac{\epsilon\delta}{2}$ eſt de 24″. Il faut donc ajouter aux tables de M. Mayer une équation proportionnelle à environ $-24''$ ſin. $4Z - 4z' - N.Z$.

5. Une ſeconde correction regarde le coefficient de ſin. $2nz - 2pz$, que M. Mayer trouve de 47″, toujours d'après la théorie imparfaite de Newton, & que je crois devoir être plus grand, & au moins de 1 minute, comme toutes les théories paroiſſent le donner. Il faut donc, ce me ſemble, augmenter d'environ un tiers, c'eſt-à-dire de 15″, l'équation de 47″ donnée par M. Mayer. Seconde correction qu'il me paroît qu'on doit faire à ces tables.

6. Je ne parle point ici de l'équation proportionnelle à ſin. $z - nz + \pi nz$, quoique nous ayons trouvé ci-

deſſus (§. I, art. 1) ſon coefficient de 25″. Je laiſſe cette équation en ſuſpens, juſqu'à ce que les Géometres ſe ſoient aſſurés, par les moyens que j'ai indiqués plus haut, (§. I, art. 3) ſi cette équation doit entrer en ligne de compte.

7. Je remarque ſeulement que cette équation, qui eſt affectée du ſigne +, doit être la plus grande lorſque la lune eſt en quadrature, & la terre aphélie ou périhélie. C'eſt pourquoi, ſi quand cette équation doit être additive, & la plus grande qu'il eſt poſſible, les tables de M. Mayer s'écartent des obſervations en moins, & au contraire, ce ſera déja un préjugé que l'équation dont il s'agit doit avoir lieu; & ce ſera enſuite au calcul à la déterminer avec toute l'exactitude dont elle eſt ſuſceptible.

8. Je ne dirai rien non plus, ni de l'équation proportionnelle à ſin. $2z - 2pz - 2Nz$, ni de l'équation proportionnelle à ſin. $2z - 2nz - 2Nz$, à cauſe de l'incertitude de ces équations & de l'approximation par laquelle on les a déterminées juſqu'ici. Je remarquerai ſeulement, à l'égard de la ſeconde de ces équations, que ſi dans le terme $a$ ſin. $Nz$, on met, au lieu de $z$, la quantité $Z - e$ ſin. $2Z - 2z' - N.Z$, & dans le terme $e$ ſin. $2z - 2z' - Nz$, au lieu de $z$, la quantité $Z - a$ ſin. $N.Z$, on trouvera que le terme qui en devroit venir, & qui auroit pour coefficient ſin. $2Z - 2z' - 2N.Z$, ſera $= 0$, tous les termes ſe détruiſant mutuellement (a); ainſi cette conſidération ne donne aucun

(a) En général, ſi on a dans l'expreſſion du lieu moyen deux termes de

changement à faire au coefficient de ſin. $2Z - 2\zeta' - 2N.Z$, quel qu'il doive être. De même, ſi dans le terme $\mathfrak{C}$ ſin. $2N.\zeta$, on met, au lieu de $\zeta$, la quantité $Z - \mathfrak{d}$ ſin. $2Z - 2\zeta'$, & dans le terme $\mathfrak{C}$ ſin. $2\zeta - 2\zeta'$ au lieu de $\zeta$, la quantité $Z - \mathfrak{C}$ ſin. $2N.Z$; on aura auſſi, pour le facteur de ſin. $2Z - 2\zeta' - 2N.Z$, deux termes qui ſe détruiront mutuellement. Or on remarquera que de ces deux termes, le premier, auquel M. Mayer n'a point eu d'égard dans la conſtruction de ſes tables, comme il eſt aiſé de le voir, ſera $-\mathfrak{d}\mathfrak{C}$ ſin. $2Z - 2\zeta' - 2N.Z$; & comme celui qu'a employé M. Mayer, par la conſtruction de ſes tables, ſe trouve d'environ 10″, $\mathfrak{C}$ étant environ $= 12'$, & $\mathfrak{d} = -35'$, il s'enſuit que l'équation aſſignée par M. Mayer, à l'argument $2Z - 2nZ - 2N.Z$, paroît trop grande d'environ 10″.

9. Voici donc ce que je crois qu'on peut faire pour perfectionner les tables de M. Mayer.

1°. On augmentera d'un tiers, c'eſt-à-dire de 15″, le réſultat de la neuviéme équation de cet Aſtronome.

2°. On diminuera de 10″ le réſultat de la dixiéme équation.

3°. Après la dixiéme équation, on en inférera immédiatement une autre, ſouſtractive, & proportionnelle au

cette forme $k$ ſin. $p\zeta + \omega$ ſin. $q\zeta$, la combinaiſon de ces deux termes produira, dans l'expreſſion du lieu vrai, des termes de cette forme, $-k$ ſin. $[p.(Z - \omega \text{ ſin. } qZ)] - \omega$ ſin. $[q.(Z - k \text{ ſin. } pZ)] = -k$ ſin. $pZ - \omega$ ſin. $qZ + \left(\frac{p+k}{2} + \frac{q+k}{2}\right)$ ſin. $(qZ+pZ) + \left(\frac{p+k}{2} - \frac{q+k}{2}\right)$ ſin. $(qZ - pZ)$; d'où l'on voit que ſi $p$ eſt $= q$, ou à très-peu près, le dernier de ces termes ſera nul ou comme nul; & c'eſt ce qui arrive dans le cas dont il s'agit ici.

ſinus

ſinus de la ſomme des argumens VI & X; cette équation ſera de 24″ dans ſa plus grande valeur. Ainſi, avant de calculer l'équation du centre dans les tables de M. Mayer, il faudra, outre les dix argumens déja calculés, en calculer un nouveau égal à la ſomme des argumens VI & X des tables de M. Mayer; enſuite, pour cet argument, on prendra le tiers de la table de l'argument V, en y mettant un ſigne contraire.

10. Je ne doute point qu'on ne puiſſe faire avec ſuccès quelques autres légeres corrections aux tables de M. Mayer; mais comme je n'ai point encore aſſez approfondi ſes autres équations, je me contente pour le préſent des trois corrections que je viens de propoſer, quant au lieu de la lune dans ſon orbite.

11. A l'égard de la latitude de la lune, je crois auſſi, qu'outre les deux tables données par M. Mayer pour la calculer, on doit y en ajouter une troiſiéme, proportionnelle à $+ 23''$ ſin. $2Nz - z + pz$, telle que je l'ai donnée, pag. 280 du Tome II de mes *Opuſcules*. Pour avoir cette équation, il n'y a qu'à prendre pour argument, le double de l'anomalie moyenne moins l'argument de la latitude de la lune, & y appliquer encore le tiers de la table de l'argument V avec ſon ſigne. C'eſt par le moyen de cette derniere équation, que j'ai trouvé en 1764 & communiqué à pluſieurs aſtronomes une correction eſſentielle pour le calcul de la latitude de la lune dans l'éclipſe annulaire du premier Avril de cette année. *Voy. les Mém. de l'Ac. de* 1764, pag. 150 & 274.

12. On voit par-là, que ſans former aucune nouvelle table, on peut corriger très-facilement les tables de M. Mayer, en ſe conformant au procédé très-ſimple que nous venons de preſcrire, & qui ne demande pas une demi-minute de calcul de plus que n'en exigent les tables de M. Mayer.

13. Au reſte, les corrections que nous venons de propoſer dans cet article, n'ont pour objet que les tables publiées par M. Mayer lui-même en 1752, & non celles qu'il a faites depuis, & qu'on aſſure être beaucoup exactes. C'eſt de quoi on pourra être parfaitement éclairci, quand la Société Royale de Londres, qui eſt en poſſeſſion de ces tables, jugera à propos de les rendre publiques pour l'utilité de l'aſtronomie & de la navigation.

14. Je ne dois pas oublier d'ajouter en finiſſant, que quoique les tables, dont les Aſtronomes ſont accoutumés à faire uſage, donnent pour chaque argument les équations de la lune, tantôt poſitives, tantôt négatives, il me paroît plus commode de rendre toutes les équations poſitives, comme a fait M. Clairaut dans ſes tables de la lune; ce qui s'exécute en cette ſorte. Soit, par exemple, ſuppoſée avec M. Clairaut l'équation du centre $-6^\circ\,17'\,21''$ ſin. $N.Z + 12'\,57'',8$ ſin. $2N.Z - 37''$; 1 ſin. $3N.Z$; comme la ſomme de ces équations (dans le cas même où elle eſt la plus grande) ne paſſe pas, à beaucoup près $7^\circ$, j'ajoute donc conſtamment $7^\circ$ à l'équation du centre, & je retranche en même-temps $7^\circ$ de la table du lieu moyen; ce qui rend, pour chaque

degré d'anomalie, l'équation positive. Pour l'*évection* dont la plus grande équation ne passe pas, à beaucoup près, deux degrés, j'ajoute à toutes les équations 2°, & je retranche deux degrés du lieu moyen. Pour la *variation*, dont la plus grande équation ne passe pas 50′, j'ajoute à toutes les équations 50′, & je retranche en même-temps 50′ du lieu moyen. Pour l'équation annuelle qui dépend de l'anomalie du soleil, & qui ne monte pas à 12′, j'ajoute 12′ à toutes les équations, & je retranche 12′ du lieu moyen (*a*). On fera de même à toutes les équations, en ajoutant toujours à chacune une constante positive, en nombre rond de degrés, ou de minutes, ou de secondes, & en retranchant cette constante du lieu moyen; ou si l'on ne veut pas altérer les tables du lieu moyen, on se contentera, après avoir calculé le lieu de la lune par ces nouvelles tables dans lesquelles les équations sont toutes positives, de retrancher du lieu une quantité égale à la somme des constantes qu'on a ajoutées pour rendre positives les équations. On suivra le même procédé dans le calcul de la latitude; ce qui n'a pas besoin d'une plus ample explication.

(*a*) J'ignore pourquoi M. Clairaut (pag. 138 de la nouvelle édition de sa Théorie) ajoute 29′ à cette équation, au lieu de 12′ qui auroient suffi. Au reste, la grandeur de la quantité qu'on ajoute à chaque équation est indifférente, pourvu que cette quantité soit plus grande que la plus grande valeur de l'équation, & qu'on ait soin de retrancher du lieu moyen cette même quantité.

## §. III.

### *Sur le calcul de la latitude de la lune.*

1. Il eſt aiſé de voir, par nos formules de la théorie de la lune, que ſi on a $\zeta = -\frac{3n^2\tau}{4} + \alpha \text{ ſin. } k\tau$, $\alpha \times$ ſin. $k\tau$ étant une des corrections du mouvement moyen du nœud, on aura $m = \mu(1 + \alpha \text{ cof. } k\tau)$, $\mu$ étant la tangente de l'inclinaiſon moyenne, & $\alpha$ cof. $k\tau$ la correction correſpondante à celle dont on vient de parler; d'où il s'enſuit, en nommant $\omega$ la diſtance de la lune au lieu moyen du nœud, que la correction de la latitude ſera donnée par la formule $\mu(1 + \alpha \text{ cof. } k\tau) \times$ ſin. $(\omega - \alpha \text{ ſin. } k\tau)$, & qu'ainſi l'équation ſera $= \mu\alpha$ ſin. $(\omega - k\tau)$. On verra de même, que ſi $\zeta = -\frac{3n^2\tau}{4} + \alpha$ ſin. $k\tau + 6$ ſin. $\lambda\tau + \gamma$ ſin. $\nu\tau$, &c. & $m = \mu(1 + \alpha$ cof. $k\tau + 6$ cof. $\lambda\tau + \gamma$ ſin. $\nu\tau$, &c.) la correction ſera $\mu(1 - \alpha$ ſin. $k\tau$ cof. $\omega + \alpha$ ſin. $\omega$ cof. $k\tau - 6$ ſin. $\lambda\tau$ cof. $\omega + 6$ ſin. $\omega$ cof. $\lambda\tau - \gamma$ ſin. $\nu\tau$ cof. $\omega + \gamma$ ſin. $\omega$ cof. $\nu\tau$ &c.) $= \mu[1 + \alpha$ ſin. $(\omega - k\tau) + 6$ ſin. $(\omega - \lambda\tau) + \gamma$ ſin. $(\omega - \nu\tau)$ &c.]

2. Donc à cauſe de $\mu =$ environ $\frac{1}{13}$, il eſt clair, que pour produire 5″ ſeulement de correction dans la latitude, il faut une équation d'environ 1′ dans le lieu du nœud.

3. De-là il s'enſuit, qu'outre les équations dont les argumens ſont $2\tau = 2n\tau$, $2\tau = 2p\tau$, $2n\tau = 2p\tau$,

$2\zeta - 2p\zeta - 2N\zeta$, & dont nous avons tenu compte, il eſt bon encore d'avoir égard aux équations du nœud de la lune qui monteront à 1′ & au-delà, & d'appliquer à la latitude environ la douziéme partie de ces équations, avec un argument $= \mathfrak{J} - k\zeta$, $k\zeta$ étant l'argument de la correction du nœud.

4. On voit par-là, que ſans ſe donner la peine de calculer les équations de l'inclinaiſon, on peut, au moyen des équations ſeules du mouvement du nœud, avoir la latitude de la lune avec une préciſion ſuffiſante; mais on peut encore, ſi l'on veut, parvenir à l'équation de la latitude, ſans paſſer par celle du nœud & de l'inclinaiſon; c'eſt un nouveau moyen d'abréger le calcul, que M. de la Grange a imaginé le premier; je vais faire voir comment on y peut parvenir, par le moyen de mes formules, pour le nœud & l'inclinaiſon.

5. Soit $p$ la tangente de la latitude de la lune, on aura $p = m$ ſin. $V$, comme il eſt aiſé de le voir, & par conſéquent $dp = dm$ ſin. $V + m\,dV$ coſ. $V$; or $V = \zeta - \zeta$, & par conſéquent $dV = d\zeta - d\zeta$; de plus, ſi on appelle $\varphi$ la force parallèle au plan de projection, laquelle écarte la planete du plan de ſon orbite, on aura (*Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, chap. IV) $dm = \frac{m\varphi . u\,dt^2}{d\zeta}$ $\times$ ſin. $\nu$. coſ. $V$, & $d\zeta = \frac{\varphi . u\,dt^2}{d\zeta} \times$ ſin. $\nu$. ſin. $V$; donc ſubſtituant, on aura $dp = m\,d\zeta$ coſ. $V$; donc $d\left(\frac{dp}{d\zeta}\right)$

$= dm \cos. V - dV . m \sin. V = \frac{m \phi u dt^2}{d\zeta} - \sin. \nu \cos. V^2 - m d\zeta \sin. V + \frac{m \phi u dt^2}{d\zeta} \sin. \nu . \sin. V^2 = \frac{m \phi u dt^2}{d\zeta} \times \sin. \nu - m d\zeta \sin. V =$ (en faisant $\nu = V - \theta$) $\frac{m \phi u dt^2}{d\zeta} \times (\sin. V \cos. \theta - \sin. \theta \cos. V) - m d\zeta \sin. V$; mettant pour $m \sin. V$ sa valeur $\rho$, & pour $m \cos. V$ sa valeur $\frac{d\varrho}{d\zeta}$ trouvée ci-dessus, on aura $d\left(\frac{d\varrho}{u u g h dt (1+\omega)}\right) = \frac{\phi \varrho \cos. \theta dt}{ghu(1+\omega)} - \frac{\phi d\varrho \sin. \theta}{g^2 h^2 u^3 (1+\omega)^2} - \rho u^2 ghdt(1+\omega)$.

De plus, il n'est pas difficile de voir que $\phi = \frac{\pi}{\sin. \theta}$; & on a $d\omega = \frac{\pi x dt}{gh} = \frac{\pi dt}{ugh}$; donc, en réduisant, on aura $d d \rho + \frac{2 d x d\varrho}{x} + \frac{\varrho g^2 h^2 dt^2 (1+\omega)^2}{x^4} - \frac{\varrho \pi \cos. \theta dt^2}{x \sin. \theta} = 0$; ou enfin $\frac{d(x x d\varrho)}{\varrho} = - d t^2 \times \left(\frac{g^2 h^2 (1+\omega)^2}{x^2} - \frac{\pi \cos. \theta . x}{\sin. \theta}\right)$.

6. Si on vouloit avoir l'équation de $\rho$, en faisant $d\zeta$ constant, on trouveroit (à cause de $d\zeta = u u dt (1+\omega) \times gh$), $d\left(\frac{d\varrho}{d\zeta}\right) = \frac{\phi \varrho u \cos. \theta dt^2}{d\zeta} - \frac{\phi u d\varrho \sin. \theta dt^2}{d\zeta^2} - \rho d\zeta$, équation dans laquelle on mettra, au lieu de $dt$, sa valeur $\frac{x^2 d\zeta}{ghV\left(1 + \frac{2\int \pi x^3 d\zeta}{g^2 h^2}\right)}$; & si $\phi$ étoit $= 0$, on auroit $\frac{dd\varrho}{d\zeta} = \rho d\zeta$; ce qui donne $\varrho = m \cos. \zeta$, comme cela doit être en effet.

7. On trouvera de même, au moyen des formules de l'Ouvrage cité, $\frac{dm}{m} = \frac{\varphi\, dt \cos. V \sin. \nu}{ugh(1+\omega)}$; & $d\zeta = \frac{\varphi\, dt \sin. V \sin. \nu}{ugh(1+\omega)}$, $\varphi$ marquant en général la force parallèle au plan de projection.

8. Si la force qui agit sur la planete est perpendiculaire au plan de projection, & qu'elle tende à éloigner le corps de ce plan, il est aisé de voir, 1°. que cette force en produit deux autres, l'une dans le plan de l'orbite & dans la direction du rayon, laquelle sera $= -\frac{\varphi' V(1+\varrho\varrho)}{\varrho}$ (en appellant $\varphi'$ la force donnée); l'autre $= \frac{\varphi'}{\varrho}$, qui sera la seule par laquelle le corps sera écarté du plan de son orbite; il suffira donc de mettre $\frac{\varphi'}{\varrho}$ ou $\frac{\varphi'}{m \sin. V}$, au lieu de $\varphi$ ou $\frac{\pi}{\sin. \theta}$, dans les formules précédentes; & on remarquera de plus, qu'alors $\theta = 0$, & par conséquent $\cos. \theta = 1$, & $\nu = V = z - \zeta$; donc, faisant $\omega = 0$ ou $\pi = 0$, on aura $dd\rho + \frac{2 d\varrho\, dx}{x} + \frac{\varrho g^2 h^2 dt^2}{x^4} - \frac{\varphi' dt^2}{x} = 0$; ou $\frac{d(xx\, d\varrho)}{\varrho} = -dt^2\left[\frac{g^2 h^2}{x^2} - \frac{\varphi' x}{\varrho}\right]$; $d\zeta = \frac{\varphi' dt \sin. V^2}{\varrho ugh}$; & $\frac{dm}{m} = \frac{\varphi' dt \cos. V \sin. V}{\varrho ugh}$, ou $dm = \frac{\varphi' dt \cos. V}{ugh}$.

9. Et si l'on a à-la-fois une puissance $\varphi$ parallèle au plan de projection, & une autre $\varphi'$ perpendiculaire à ce

plan, il n'y aura qu'à mettre $\frac{\pi \text{ cof. } \theta}{\text{ſin. } \theta} + \frac{\varphi'}{\varrho}$, au lieu de $\frac{\pi \text{ cof. } \theta}{\text{ſin. } \theta}$ dans l'équation en $dd\rho$ de l'art. 5, ce qui donnera $dd\rho + \frac{2 d\varrho dx}{\varrho} + \frac{\varrho g^2 h^2 dt^2}{x^4} - \frac{dt^2}{x} \times \left(\frac{\varrho \pi \text{ cof. } \theta}{\text{ſin. } \theta} + \varphi'\right)$; on aura auſſi dans ce cas $\frac{dm}{m} = \frac{\phi dt \text{ cof. } V . \text{ ſin. } \nu}{ugh(1+\omega)} + \frac{\phi' dt \text{ cof. } V}{mugh(1+\omega)}$; $d\zeta = \frac{\phi dt \text{ ſin. } V . \text{ ſin. } \nu}{ugh(1+\omega)} + \frac{\phi' dt \text{ ſin. } V}{mugh(1+\omega)}$. Il faut remarquer de plus, que la force $\varphi'$, quand elle eſt ſeule, ne produit aucune force $\downarrow$ dans le ſens du rayon vecteur de l'orbite projettée, ni aucune force $\pi$ perpendiculaire à ce rayon.

10. Pour réduire à l'orbite réelle les forces & les équations qui produiſent le mouvement du nœud, on conſidérera, 1°. que $x x d\zeta = x' x' dk . \text{ cof. } \rho$; 2°. que $x' x' = x x (1 + m m \text{ ſin. } V^2)$, enfin qu'on a $\nu = \zeta' - \zeta$; d'où il ſera aiſé de chaſſer $\theta$, $\nu$, $V$ de l'expreſſion du mouvement du nœud & de l'inclinaiſon, & d'y ſubſtituer $\omega$, $\zeta'$, $\zeta$, ou $k$, $\zeta'$, $\zeta$, en ſe ſouvenant toujours que $k$ eſt la ſomme des angles $dk$ parcourus réellement par la lune durant le temps $t$, & non, comme nous l'avons déja remarqué, l'angle compris entre le rayon vecteur initial de la lune, & le rayon vecteur $x'$ où elle ſe trouve au bout du temps $t$.

§. IV.

## §. IV.

### *Sur l'altération du mouvement moyen des planetes, & ſur celui de la lune en particulier.*

1. Examinons préſentement une autre queſtion; ſavoir ſi l'action mutuelle des planetes peut produire dans leur mouvement moyen une altération ſenſible. Pour cela, nous aurons beſoin de quelques propoſitions préliminaires.

2. Soit $ddt + N^2 t dz^2 + B \text{ cof. } p'z . dz^2 = 0$; nous avons démontré dans les *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Part. I, art. 25, qu'on aura $t = \int \text{cof. } Nz + \frac{t \text{ ſin. } Nz}{N} - \frac{B \text{ cof. } p'z}{NN - p'p'} + \frac{B \text{ cof. } Nz}{NN - p'p'}$. Il eſt évident que ſi $N = p'$, les deux derniers termes du ſecond membre deviennent infinis, & qu'il faut chercher une autre ſolution pour ce cas particulier.

3. Soit donc $ddt + N^2 t dz^2 + B dz^2 \text{ cof. } Nz = 0$: on ſe ſervira de la méthode que j'ai employée ailleurs depuis long-temps pour des problêmes analogues à celui-ci (*a*); & on écrira ainſi cette équation, $ddt + N^2 t dz^2 + B dz^2 \text{ cof. } (N + \zeta)z = 0$, $\zeta$ étant une quantité infiniment petite, telle que $\zeta z$ ſoit toujours infiniment petit; cette ſuppoſition eſt évidemment toujours poſſible, puiſque la petiteſſe de l'indéterminée $\zeta$ eſt arbitraire; on aura donc (art. 2.) $t = \int \text{cof. } Nz + \frac{t \text{ ſin. } Nz}{N}$

(*a*) Voy. Mém. de Berlin 1748, p. 291, & *Opuſc.* Tome I, p. 113 & 114.

$-\frac{B\,\text{cof.}\,(N+\zeta)z}{NN-(N+\zeta)^2}+\frac{B\,\text{cof.}\,Nz}{NN-(N+\zeta)^2}$ ; ou, en mettant pour cof. $(N+\zeta)z$ sa valeur cof. $Nz-\zeta z$ fin. $Nz$, & pour $(N+\zeta)^2$ sa valeur $NN+2N\zeta$, $t=\int$ cof. $Nz+\frac{\epsilon\,\text{fin.}\,Nz}{N}-\frac{Bz\,\text{fin.}\,Nz}{2N}$.

4. Soit $ddt+N^2\,t\,dz^2+B\,dz^2\,\text{fin.}\,p'z=0$ ; nous avons vû ( art. 24 de l'Ouvrage cité ) qu'on aura $t=\int$ cof. $Nz+\frac{\epsilon\,\text{fin.}\,Nz}{N}-\frac{B\,\text{fin.}\,p'z}{NN-p'p'}+\frac{Bp'\,\text{fin.}\,Nz}{N(NN-p'p')}$ ; & il eſt encore évident, que ſi $p'=N$, les deux derniers termes du ſecond membre deviennent infinis, enſorte qu'il faut chercher une autre ſolution.

5. Donc ſi on a $ddt+N^2\,t\,dz^2+B\,dz^2\,\text{fin.}\,Nz=0$, on ſuppoſera de même $ddt+N^2\,t\,dz^2+B\,dz^2\,\text{fin.}\,(N+\zeta)z=0$, & par conſéquent $t=\int$ cof. $Nz+\frac{\epsilon\,\text{fin.}\,Nz}{N}-\frac{B\,\text{fin.}\,(N+\zeta)z}{NN-(N+\zeta)^2}+\frac{B(N+\zeta)\,\text{fin.}\,Nz}{N[NN-(N+\zeta)^2]}$ ; ou $t=\int$ cof. $Nz+\frac{\epsilon\,\text{fin.}\,Nz}{N}+\frac{Bz\,\text{cof.}\,Nz}{2N}-\frac{B\,\text{fin.}\,Nz}{2NN}$.

6. Si on a $ddt+N^2\,t\,dz^2+Bz\,dz^2=0$, on écrira ; au lieu de $Bz$, la quantité $\frac{B\,\text{fin.}\,\zeta z}{\zeta}$ qui lui eſt égale, $\zeta$ étant ſuppoſée une quantité infiniment petite à volonté ; & telle que $\zeta z$ ſoit toujours infiniment petit, enſorte que fin. $\zeta z$ ſoit $=\zeta z$ ; cela poſé, on aura ( art. 4 ) $t=\int$ cof. $Nz+\frac{\epsilon\,\text{fin.}\,Nz}{N}-\frac{B\,\text{fin.}\,\zeta z}{\zeta(NN-\zeta\zeta)}+\frac{B\zeta\,\text{fin.}\,Nz}{\zeta N(NN-\zeta\zeta)}$ ;

ou, en faiſant diſparoître $6$, $t = \delta$ cof. $N\zeta + \frac{\epsilon \text{ ſin. } N\zeta}{N}$

$- \frac{B\zeta}{NN} + \frac{B \text{ ſin. } N\zeta}{N^3}$.

7. Les problêmes qui viennent d'être réſolus dans l'art. 3 & ſuiv. auroient pu l'être aiſément par une méthode directe, ſemblable à celle que j'ai employée, art. 21 & ſuiv. de la 1re Partie des *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*; mais j'ai cru qu'on ne ſeroit pas fâché de voir comment la ſolution de ces problêmes peut ſe déduire du ſeul cas où le dernier terme eſt $B\,d\zeta^2$ cof $p\zeta$. Appliquons maintenant les conſéquences qui réſultent de cette théorie à l'équation de l'orbite lunaire, qui eſt de toutes les orbites des planetes, celle où le mouvement moyen paroît le plus ſenſiblement altéré.

8. Si dans l'équation différentielle de l'orbite de la lune, il ſe trouve des termes de cette forme $B\,d\zeta^2$ cof. $N\zeta$, $N^2$ étant $= 1 - \frac{3n^2}{2}$; ces termes produiront (comme on l'a vû, art. 3) dans la valeur du rayon vecteur des termes de cette forme $- A\zeta$ ſin. $N\zeta$, & dans l'expreſſion du temps des termes de cette forme $+ A\zeta$ cof. $N\zeta$; d'où il réſultera, après un grand nombre de révolutions, une inégalité ſenſible dans le mouvement moyen de la lune; mais cette inégalité ne ſera pas, comme les quarrés des révolutions; elle ſeroit dans un petit nombre de révolutions actuelles, très-éloignées du point de l'époque, à peu près en raiſon de cof. $N\zeta$, $N\zeta$ étant, non l'anomalie moyenne de la lune, mais la diſtance

moyenne de cet aſtre à un point dont le mouvement ſeroit à peu près la moitié de celui de ſon apogée; & au bout d'un grand nombre de révolutions, elle ſe trouveroit, tantôt nulle, tantôt très-ſenſible dans une même période, ſelon que cof. $Nz$ ſeroit $= 0$ ou $= \pm 1$.

9. Or comme on ne remarque point dans les révolutions actuelles de la lune d'inégalité proportionnelle à cette quantité cof. $Nz$, $N$ étant $= V\left(1 - \frac{3n^2}{2}\right)$ ou à très-peu près, ni d'inégalité du mouvement moyen qui ſoit ſenſible dans une même période, il eſt naturel d'en conclure que l'accélération du mouvement moyen de la lune ne vient point de pareils termes.

10. Voyons maintenant ce que produiroient les termes $B\,dz$ cof. $pz$, dans leſquels $p$ ſeroit, non exactement, mais à très-peu près $= N$, $N^2$ étant toujours égal à $1 - \frac{3n^2}{2}$ à très-peu près, & le vrai mouvement de l'apogée étant repréſenté par une quantité $N' = 1 - \frac{3n^2k}{2}$; dont la différence d'avec l'unité eſt, comme l'on ſait, à peu près double de la différence de $N$ avec l'unité.

11. Il eſt aiſé de voir, que dans la théorie de la lune (expoſée art. 10 & ſuiv. des *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*) chaque terme de l'équation différentielle de l'orbite, ſera $= dz^2\,[B$ cof. $q\,N'z + \lambda\varpi nz + \mu(z - nz) + \nu(z - pz)]$ $q$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant des coefficiens indéterminés exprimés par des nombres entiers poſitifs ou négatifs, en y comprenant zero & l'unité. De plus, l'é-

quation de l'orbite ſera $ddt + t dz^2 - \frac{3C'n^2}{2} t dz^2 +$ $B$ cof. $p' z . dz^2 +$ &c. $= 0$, $C'$ étant une quantité peu différente de l'unité ; & on aura $p$ ( qui donne le mouvement moyen du nœud ) $= -\frac{3Cn^2}{4}$, $C$ étant de même une quantité peu différente de l'unité, ainſi que $\pi$.

12. Donc, pour que le terme $B$ cof. $p' z$ devînt conſidérablement plus grand par l'intégration, il faudroit que $q N' z + \lambda \pi n z + \mu (z - n z) + \nu (z - p z)$ fût ; ou exactement, ou à très-peu près $= 1 - \frac{3C'n^2}{4}$.

13. Donc à cauſe de $N' = 1 - \frac{3C''n^2}{2}$ ( $C''$ étant de même très-peu différent de l'unité ) on aura

$(q + \mu + \nu) z - \frac{3C''qn^2 z}{2} + \frac{3Cn^2 z}{4} \times \nu + (\lambda \pi - \mu) n z$, à très-peu près égal à $\left(1 - \frac{3C'n^2}{4}\right) z$, pris poſitivement ou négativement.

14. Donc ſuppoſant $\varrho$ un nombre preſque égal à l'unité poſitive ou négative, on aura

$q + \mu + \nu = \pm 1$ ;

$-\frac{3C''q}{2} + \frac{3\nu C}{4} = \mp \frac{3\varrho C'}{4}$,

$\lambda - \mu = 0$, à cauſe que $\pi$ eſt preſque $= 1$.

15. Soit ſuppoſé d'abord, pour ſimplifier le calcul, $C = C'' = \rho = C' = 1$, on aura

$q + \mu + \nu = \pm 1$ ;

$-2q + \nu = \mp 1$ ;

$\lambda - \mu = 0$.

16. Donc on aura

$3q + \mu \mp 1 = \pm 1$;

$\mu = \pm 2 - 3q$,

$\lambda = \pm 2 - 3q$;

$\nu = \mp 1 + 2q$.

Si, par exemple, $q = 1$, on aura

$\mu = -1$ ou $-5$,

$\lambda = -1$ ou $-5$,

$\nu = +1$ ou $+3$.

17. Si on ſuppoſe $\mathfrak{C} = 1 + \epsilon$, $\mathfrak{C}'' = 1 + \epsilon'$, $\varpi = 1 + \omega$, $\rho = 1 + \delta$, $\mathfrak{C}' = 1 + \gamma$, on aura

$q + \mu + \nu = \pm 1$,

$-2q + \nu + \nu\epsilon - 2q\epsilon' = \mp (1 + \delta) \times (1 + \gamma)$;

$-\mu + \lambda + \lambda\omega = k$, $k$ étant une quantité extrêmement petite.

18. Donc, comme $\mu$, $\nu$, $\lambda$, $q$ ſont des nombres entiers, on doit avoir les mêmes équations que dans l'art. 14; & de plus,

1°. $\nu\epsilon - 2q\epsilon' = \mp\delta \mp\delta\gamma \mp\gamma$, $\delta$ étant une quantité extrêmement petite;

2°. $(\pm 2 - 3q)\,\omega$ extrêmement petit.

19. Suivant les obſervations aſtronomiques, on a

$n = 0{,}0748$,

$n^2 = \frac{1}{178\frac{32}{40}} = 0{,}00559518$,

$\frac{3\mathfrak{C}''n^2}{2} = 0{,}008455$,

$p = -\frac{3\mathfrak{C}n^2}{4} = -0{,}004053$,

$1 - \pi = \frac{16' 16''}{360.60.60} = 16'' \left(1 + \frac{1}{60}\right) \times \frac{1}{360.60.60}$

$=$ environ $\frac{1}{360.15.15}$,

donc $\frac{3n^2}{2} = 0{,}008392$,

$\mathfrak{C}'' = 1{,}0075$,

$\frac{3n^2}{4} = 0{,}004196$,

$\mathfrak{C} = 0{,}96591$.

20. Par le moyen de ces valeurs, on pourroit s'assurer si les équations de l'art. 14 auront lieu; mais il est aisé de voir, sans entreprendre ce travail, que les termes de la forme $B\,dz$ cos. $(Nz + \gamma z)$, $\gamma$ étant une quantité très-petite, & $N = 1 - \frac{3\mathfrak{C}'n^2}{4}$, n'auront point d'influence sur le mouvement moyen de la lune, puisqu'il n'en résultera, dans l'expression du lieu, que des équations de cette forme $C$ sin. $(Nz + \gamma z)$, qui pourront, à la vérité, être fort grandes, mais qui n'affecteront point le moyen mouvement, & ne feront qu'altérer les autres équations de la lune.

21. Or comme $N + \gamma$ n'est pas une quantité fort petite, puisqu'elle est peu différente de l'unité, il est clair que s'il y avoit dans le mouvement de la lune des équations tant soit peu considérables, proportionnelles à sin. $(N + \gamma)z$, l'effet de ces équations seroit bientôt rendu sensible par les observations; & comme on n'en remarque point de telles, on peut en conclure que ces équa-

tions, ſi elles exiſtent, ont une valeur très-petite.

22. Il eſt à remarquer, que ſi $\nu$ étoit $= 0$, on auroit (art. 15) $-2q = \mp 1$; ce qui eſt impoſſible, puiſque $q$ eſt toujours néceſſairement un nombre entier poſitif ou négatif; d'où il eſt aiſé de voir que les termes dont il s'agit n'auroient point lieu, ſi l'orbite de la lune étoit ſur le plan même de l'écliptique.

23. Il eſt encore d'autres termes qui peuvent devenir très-grands par l'intégration: ce ſont ceux qui dans l'expreſſion du rayon, renfermeroient des termes cof. $p'\zeta$, dans leſquels $p'$ ſeroit très-petit; car ces termes, dans l'expreſſion du temps augmenteroient prodigieuſement par l'intégration. Or dans ces ſortes de termes, on auroit, en ſuppoſant $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}' = \mathfrak{C}'' = p = 1$, les équations ſuivantes;

$q + \mu + \nu = 0$;

$-2q + \nu = 0$,

$\lambda - \mu = 0$.

D'où l'où tire

$\mu = -3q$,

$\lambda = -3^{\circ}q$,

$\nu = 2q$,

24. Plus exactement, ſi on ſuppoſe $\mathfrak{C} = 1 + \varepsilon$, $\mathfrak{C}'' = 1 + \varepsilon'$; $\pi = 1 + \omega$, $\varepsilon$, $\mu$, $\omega$, $\varepsilon'$ étant des quantités très-petites; il faut que l'on ait dans le cas préſent

$q + \mu + \nu = 0$,

$-2q + \nu + \nu\varepsilon - 2q\varepsilon' = k$, $k$ étant une quantité extrêmement petite,

$-\mu +$

$-\bar{\mu}+\lambda+\lambda\omega=k'$, $k'$ étant de même une quantité extrêmement petite.

25. D'où il eſt aiſé de conclure, que puiſque $q$, $\lambda$, $\mu$, $\nu$, ſont des nombres entiers, on aura, comme ci-deſſus,

1°. $\mu=-3q$;

$\lambda=-3q$,

$\nu=2q$;

2°. $2q(\varepsilon-\varepsilon')$ extrêmement petit;

3°. $3q\omega$ extrêmement petit.

26. Telles ſont les conditions néceſſaires pour qu'il ſe rencontre dans la valeur de $x$ des termes $B$ cof. $pz$; $p$ étant une quantité extrêmement petite. Voici maintenant de quelle maniere ces termes peuvent influer dans l'équation ſéculaire du moyen mouvement de la lune.

27. Remarquons d'abord, que lorſque deux angles $u$ & $b$ different entr'eux d'une petite quantité $\alpha$, on aura ſin. $u$ — ſin. $b$ = $(u-b)$ cof. $b-\frac{(u-b)^2}{2}$ ſin. $b$ à très-peu près. Car ſoit $u=b+\alpha$, on aura ſin. $u$ = ſin. $b+\alpha$ = ſin. $b+\alpha$ cof. $b-\frac{\alpha^2}{2}$ ſin. $b-\frac{\alpha^3}{2\cdot3}$ × cof. $b+\frac{\alpha^4}{2\cdot3\cdot4}$ ſin. $b$, &c. Donc, &c.

28. Suppoſons donc qu'il y ait dans la formule du mouvement de la lune, un terme de cette forme $A$ ſin. $\lambda z$, $\lambda$ étant une quantité extrêmement petite; ſoit obſervé le lieu de la lune dans deux momens éloignés l'un de l'autre de l'arc $s$ qui renferme pluſieurs circonférences;

ſoit $\zeta + \delta$ l'arc $z$ que la lune a parcouru depuis l'époque où commencent les tables ( ou, pour parler plus exactement, depuis le moment où tous les argumens ſont nuls ) juſqu'au ſecond de ces deux momens, il eſt aiſé de voir que la différence des lieux obſervés ſera $B(\zeta + \delta) + A \text{ ſin. } \lambda(\zeta + \delta) - B\zeta - A \text{ ſin. } \lambda\delta = B\delta + A\lambda\delta \text{ coſ. } \lambda\zeta - \frac{A\delta^2\lambda^2}{2} \text{ ſin. } \lambda\zeta$, en ſuppoſant $\lambda$ & $A$ aſſez petits pour que $A\lambda\delta$ ſoit un angle très-petit, quoique $\delta$ contienne un grand nombre de circonférences ; donc, tant que $\delta$ ne ſera pas énormément grand, le mouvement moyen paroîtra altéré d'une quantité $= -\frac{A\delta^2\lambda^2}{2} \text{ ſin. } \lambda\zeta$, c'eſt-à-dire, d'une quantité proportionnelle au quarré de l'arc $\delta$.

29. Il eſt aiſé de voir de plus, que le mouvement moyen paroîtra accéléré ſi $A$ eſt négatif, & retardé ſi $A$ eſt poſitif ; & comme les obſervations de M. Mayer paroiſſent prouver que le mouvement moyen de la lune eſt accéléré, & que cette accélération eſt proportionnelle au quarré du temps, il s'enſuit, que ſi on peut expliquer cette accélération par le moyen que nous ſuppoſons, il faut ſuppoſer $A$ négatif.

30. Mais au bout d'un très-grand nombre de ſiécles, lorſque $\lambda\delta$ renfermera un angle de pluſieurs degrés, alors cette équation apparente n'aura plus lieu, & ſe transformera en une autre équation proportionnelle à ſin. $(\lambda\zeta + \lambda\delta) -$ ſin. $\lambda\zeta$, laquelle ne ſera ſenſible (ainſi

que l'accélération apparente du mouvement moyen) que dans le cas où le coefficient $A$ ne ſera pas trop petit.

31. Il ne s'agit donc que de trouver dans la formule du lieu de la lune, un terme $A$ ſin. $\lambda\zeta$, dans lequel $\lambda$ ſoit aſſez petit, pour qu'en prenant $\zeta$ égal à un très-grand nombre de révolutions, $\lambda\zeta$ demeure encore très-petit. Par ce moyen, on ſatisfera avec le ſecours de la gravitation ſeule, à l'équation ſéculaire apparente du moyen mouvement de la lune.

32. Or $N$ étant la quantité qui indique le mouvement de l'apogée, & $p$ celle qui indique le mouvement des nœuds, $\lambda$ ne ſera jamais égal qu'à $R(1-n)+Q(N)+Sp$, $R$, $Q$, $S$ étant des nombres entiers poſitifs ou négatifs. Il pourroit donc n'être pas impoſſible de trouver des valeurs de $R$, $Q$, $S$, telles que $R(1-n)+Q.N+Sp$ ſoit preſque $=0$. C'eſt une recherche qui me paroît digne de toute l'attention des Mathématiciens.

33. Soit $\alpha$ cof. $N\zeta$ un des termes qui entrent dans l'expreſſion du rayon vecteur, $N$ exprimant, non pas ſeulement le mouvement de l'apogée, mais un nombre conſtant quelconque; & ſoit $\zeta$ cof. $(N\zeta+\gamma\zeta)$ un autre terme, $\alpha$ étant $>\zeta$, & $\gamma$ étant ſuppoſé une quantité extrêmement petite, enſorte que la différence des argumens $N\zeta$ & $N\zeta+\gamma\zeta$ ne ſoit ſenſible qu'au bout d'un certain nombre, ou même d'un très-grand nombre de révolutions. On ſuppoſe ici que la planete parte d'une de ſes apſides; ſi elle n'en partoit pas, il faudroit, au lieu de cof. $N\zeta$, mettre cof. $(N\zeta+N.A)$,

& au lieu de cos. $(N\zeta+\gamma\zeta)$, mettre le cosinus de $(N+\gamma)\zeta+(N+\gamma)A$, $A$ étant la distance de la planete à l'apside, lorsque $\zeta$ & $t=0$. Cela posé, le temps par l'arc $\zeta$, supposé égal à zero quand $\zeta=0$, contiendra les termes $\delta$ sin. $(N\zeta+N.A)+\eta$ sin. $(N\zeta+\gamma\zeta+[N+\gamma]A)-\delta$ sin. $N.A-\eta$ sin. $(N+\gamma)A$, qu'on peut transformer ainsi, en supposant $\gamma\zeta$ fort petit, $(\delta+\eta)$ sin. $(N\zeta+N.A)+(\gamma\zeta+\gamma A)\eta$ $\times$cos. $(N\zeta+N.A)-\frac{(\gamma\zeta+\gamma A)^2\eta}{2}$ sin. $(N\zeta+N.A)$ &c. $-(\delta+\eta)$ sin. $N.A-\eta\gamma A$ cos. $N.A+\frac{\gamma^2A^2.\eta}{2}$ $\times$sin. $N.A$.

34. D'où il s'ensuit, 1°. que lorsque $N\zeta=360°$, il y a dans le mouvement moyen une altération proportionnelle à $\gamma^2\zeta^2$ sin. $N.A$; 2°. que cette altération n'est sensible que dans le cas où sin. $N.A$ n'est pas une petite quantité; 3°. que si on suppose $N.\zeta=180°$, l'altération deviendra négative : de maniere qu'on ne peut la regarder comme proportionnelle à $\zeta^2$, c'est-à-dire au quarré du nombre des révolutions, qu'en prenant toujours l'astre à la même distance de l'apside, ou à peu près à la même distance, que celle où il étoit lorsque $\zeta$ & $t$ étoient $=0$; ou du moins, en prenant toujours l'astre à peu près à la même distance de l'apside, dans les observations qui servent à comparer ses mouvemens; car dans les points que l'on compare les quantités sin. $(N\zeta+N.A)$, & cos. $(N\zeta+N.A)$ doi-

vent être ; ou les mêmes, ou à peu près les mêmes.

35. C'eſt pourquoi, ſi l'altération apparente du mouvement moyen d'une planete vient de la cauſe que nous ſuppoſons ici, ſavoir de deux équations, dont les argumens ſont à peu près les mêmes pendant un certain nombre de révolutions, cette altération ne doit pas ſuivre la loi conſtante des quarrés des temps, ſi on obſerve la planete dans différentes poſitions par rapport à ſon apſide.

36. Mais il faut remarquer de plus, que la combinaiſon des termes $\alpha$ cof. $N\zeta$, & $\mathfrak{C}$ cof. $(N\zeta + \gamma\zeta)$, donne dans l'expreſſion du temps un terme de cette forme $\frac{\alpha\mathfrak{C} \text{ ſin. } \gamma\zeta}{\gamma}$, & que l'équation ſéculaire qui en réſulte eſt proportionnelle (art. 28) à $\frac{\alpha\mathfrak{C}}{\gamma} \times \gamma^2 \times$ par le quarré du nombre des révolutions. Ce coefficient $\alpha\mathfrak{C}\gamma$ eſt au coefficient $\gamma^2 n$, ou $\gamma^2\mathfrak{C}$ de l'équation de l'art. 34, comme $\alpha$ eſt à $\gamma$ ; enſorte que ſi $\alpha$ eſt beaucoup $> \gamma$, l'équation ſéculaire, dont il s'agit dans cet article-ci, eſt beaucoup plus ſenſible que l'autre. Cette altération a d'ailleurs cet avantage, qu'elle paroîtra conſtamment proportionnelle au quarré du temps. On peut bien dire proprement qu'il n'y a que cette derniere cauſe qui donne, à parler exactement, une vraie altération dans le mouvement moyen ; puiſque l'altération qu'il faudroit faire au mouvement moyen, en vertu de l'autre cauſe, ſuit une loi différente, ſelon les points de l'orbite où la planete ſe trouve.

37. M. de la Grange, dans le Tome III des Mémoires de Turin, a expliqué fort ingénieuſement l'altération des mouvemens moyens de Saturne & de Jupiter, par une hypothèſe ſemblable à celle de l'art. 31 & des ſuivans; il paroît, que ſi l'altération du mouvement moyen de la lune vient de la gravitation, cette altération n'a pas la même cauſe que celle à laquelle M. de la Grange attribue l'altération du mouvement moyen de Jupiter & de Saturne, mais qu'elle provient d'une cauſe ſemblable à celle que nous avons expoſée art. 31 & 32.

38. Nous diſons, *ſi l'altération du mouvement moyen de la lune vient de la gravitation*; car elle pourroit venir auſſi, comme nous le verrons dans le Mémoire ſuivant, de la réſiſtance que la lune éprouve ou peut éprouver de la part de quelque fluide très-rare dans lequel elle ſeroit mue; & cette derniere ſuppoſition paroît même celle qui explique le mieux, quant à préſent, l'altération du mouvement moyen de la lune, au moins dans l'état où eſt encore juſqu'ici la théorie de la lune tirée de la ſeule gravitation; théorie qui n'a point encore fourni d'explication de l'équation ſéculaire de cette planete.

*Fin du quarantiéme Mémoire.*

# XLI^ME MÉMOIRE.

## *De la réſiſtance que les Planetes & les Cometes peuvent éprouver dans leur mouvement.*

### §. I.

### *De la réſiſtance qu'éprouvent les Planetes premieres & les Cometes.*

1. Nous avons donné dans nos *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Partie II, Liv. II, chap. VI, les formules néceſſaires pour parvenir aiſément à déterminer les effets de cette réſiſtance. Nous allons faire ici des applications de ces formules aux planetes & aux cometes.

2. En conſervant les mêmes noms que dans l'art. 277 des *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, & mettant au lieu de $F\Delta u$ ſa valeur $\frac{S+C}{xx}$, ou $(S+C)uu$ à cauſe de $u=\frac{aa}{x}$ ou $\frac{1}{x}$, on aura $ddu+udz^2-\frac{qq\,dz^2}{gg}\times(S+C)=0$; & comme $\frac{1}{qq}=1+2\int\frac{\pi a^4\,dz}{u^3\,gg}$, ou

$qq = 1 - 2\int \frac{\pi a^4 dz}{u^3 gg}$, & que $\pi = -\frac{R dz . a^2}{u ds}$, la réſiſtance $R = R' v^2$, & $\frac{a^4 dz}{uug} = \frac{ds}{v}$, on aura, en ſubſtituant, $ddu + u dz^2 - \frac{(S+C) dz^2}{gg} - \frac{2 dz^2 (S+C)}{gg} \times \int R' ds = 0$.

3. Dans cette quantité, $R'$ repréſente l'intenſité de la réſiſtance, qui dépend de la loi de denſité du fluide, de la ſurface de la planete ou de la comete, & de ſa maſſe ; enſorte que ſi la denſité du fluide réſiſtant eſt par-tout la même, on aura $\int R' ds = R' s$.

4. On remarquera de plus, que ſi $\varphi$ eſt la réſiſtance que le fluide oppoſe à la planete ou comete, mue avec la vîteſſe $g$, on aura $R' = \frac{\varphi}{g^2}$, $\varphi$ étant une conſtante, ou au moins une quantité qui dépend de la denſité du fluide, de la ſurface de la planete ou comete, de ſa maſſe, & de la vîteſſe $g$.

5. Donc, ſi on fait $-\frac{2(S+C)}{gg} \int R' ds = M$, on aura ($a$) $u = a \text{ cof. } z + \left(\frac{S+C}{gg}\right) \times (1 - \text{cof. } z) - \text{ſin. } z \int M dz \text{ cof. } z + \text{cof. } z \int M dz \text{ ſin. } z$. Or il eſt d'abord évident, qu'au bout d'un nombre quelconque complet de révolutions, on aura cof. $z = 1$, & ſin. $z = 0$, & qu'ainſi $u = a + \int M dz$ ſin. $z$.

6. Pour intégrer cette quantité $\int M dz$ ſin. $z$, lorſque

($a$) Voy. *Opuſc. Math.* Tome II, douziéme *Mémoire*, §. V.

$R'$

$R'$ eſt conſtant, il ne faut que ſavoir intégrer celle-ci, $\int s\,d\zeta$ ſin. $\zeta$, ou $-s$ cof. $\zeta + \int ds$ cof. $\zeta$. La premiere partie dépend évidemment de la rectification de l'ellipſe. A l'égard de la ſeconde, ſi on fait $e =$ à l'excentricité, $x' =$ aux abſciſſes priſes depuis le centre, $\delta =$ à la moitié du grand axe, on aura $ds = -\frac{dx'\sqrt{(\delta\delta - \frac{ee x' x'}{\delta\delta})}}{\sqrt{(\delta\delta - x'x')}}$ ; & cof. $\zeta = \frac{x' - e}{\delta - \frac{ex'}{\delta}}$ ; d'où l'on tire $ds$ cof. $\zeta =$

$$\frac{(\delta - \frac{ee}{\delta})\,x'\,dx'}{\sqrt{(\delta\delta - x'x')}.\sqrt{(\delta\delta - \frac{ee x' x'}{\delta\delta})}} + \frac{(\frac{ex'x'}{\delta} - e\delta)\,dx'}{\sqrt{(\delta\delta - x'x')}.\sqrt{(\delta\delta - \frac{ee x' x'}{\delta\delta})}}$$ ;

la premiere partie s'integre par logarithmes ; quant à la ſeconde, ſoit $x'x' = \delta\zeta'$, elle ſe changera en $-\frac{e\,d\zeta'\sqrt{(\delta - \zeta')}}{2\sqrt{\zeta'}.\sqrt{(\delta^2 - \frac{\zeta' e^2}{\delta})}}$ ; ou, en faiſant $\delta - \zeta' = u'$, en $+\frac{e\,du'\sqrt{u'}}{2\sqrt{(\delta - u')}.\sqrt{(\frac{ee}{\delta})}.\sqrt{(\frac{\delta^3}{ee} - \delta + u')}}$ ; qui dépend de la rectification de l'hyperbole. Voyez les Mém. de Berlin 1746, art. XX, & le XXXVI^e Mémoire de ces *Opuſcules*, §. IV, art. 12 & ſuiv. p. 241 de ce Volume.

7. Dans les ellipſes fort excentriques, telles que le ſont celles des cometes, on peut, au lieu de l'arc $s$, prendre la corde de cet arc, parce qu'il n'y a jamais entre l'arc & la corde qu'une différence qui eſt de l'ordre de $\delta - e$, & par conſéquent très-petite par rapport à $\delta$, & que la quantité $\int s\,d\zeta$ ſin. $\zeta$ doit être multipliée

par la quantité $R'$ qui eſt elle-même exceſſivement petite; d'où il s'enſuit, qu'en prenant la corde au lieu de l'arc, on ne néglige que des quantités de l'ordre de $\frac{R'a}{\delta}$, $a$ étant la diſtance périhélie, & $\delta$ le demi-grand axe.

8. Or la corde de l'arc eſt évidemment $\sqrt{(aa+xx-2xa\cos.z)} = \sqrt{[aa.(\delta+e\cos.z)^2+(\delta\delta-ee)^2-2a\cos.z(\delta\delta-ee)(\delta+e\cos.z)]:(\delta+e\cos.z)}$; cette quantité qui repréſente ici $s$ (art. précédent), étant multipliée par $dz$ ſin. $z$, qui eſt la différence de $-\cos. z$, il eſt facile de l'intégrer par logarithmes, ou par arcs de cercle.

9. Pour donner à cette quantité la forme la plus ſimple, on remarquera que $x$ étant $= \frac{\delta\delta-ee}{\delta+e\cos.z}$, on a $\cos. z = \frac{\delta\delta-ee}{ex} - \frac{\delta}{e}$, & $dz$ ſin. $z = \frac{(\delta\delta-ee).dx}{exx}$, donc, au lieu de $s\,dz$ ſin. $z$, on pourra mettre $\frac{(\delta\delta-ee).dx}{exx} \times \sqrt{(aa+xx+\frac{2a}{e}(\delta\delta-ee)-\frac{2a\delta x}{e})}$, quantité qui s'integre facilement par logarithmes ou par arcs de cercle, en employant les méthodes connues.

10. Si l'ellipſe étoit primitivement circulaire ou à peu près, on auroit $\int s\,dz$ ſin. $z = \int \delta z$ ſin. $z.dz = -\delta z\cos. z + \delta$ ſin. $z =$ après une révolution $-\delta.360°$. Donc $u = \delta + \frac{2S.R'}{gg} \times 2\pi\delta$, $2\pi$ exprimant le rap-

port de la circonférence au rayon : ce qui donne, à cauſe de $gg = \frac{S}{\delta}$, $u = \delta + 2\delta R' \times 2\pi\delta$, & $x = \delta(1 - 4R'\pi\delta)$. En général, ſi l'orbite primitive eſt preſque circulaire, on aura, en faiſant $a = 1$, $u = \text{cof.}\,z + \frac{S}{gg} \times (1 - \text{cof.}\,z) - \frac{2R'.S}{gg} \times (-z + \text{ſin.}\,z)$; $\pi = -\frac{R'v^2\,dz.a^2}{uds} =$ à très-peu près $-R'g^2$; & l'altération du temps périodique ſera à très-peu près $\int \frac{dz}{g} \times -3R'z = -\frac{3R'z^2}{2g}$; donc $2\pi$ exprimant la circonférence, & $\frac{2\pi}{g}$ le temps périodique abſtraction faite de la réſiſtance, l'altération ſera $-\frac{3.2\pi\pi.R'}{g}$; c'eſt-à-dire, que le temps d'une révolution $\frac{2\pi}{g}$ ſera diminué en raiſon de 1 à $1 - 3R'\pi$.

11. Donc après $m$ révolutions, l'altération du temps périodique $\frac{2\pi}{g}$ ou $\frac{2\pi a}{g}$ ſera $-\frac{3.2m^2\pi^2R'}{g}$, ou $-\frac{3.2m^2\pi^2R'a^2}{g}$, afin que cette quantité devienne de dimenſion nulle comme elle le doit être, $R'$ étant de la dimenſion $-1$.

12. Dans une planete, plus la révolution eſt prompte, plus toutes choſes d'ailleurs égales, l'effet de la réſiſtance doit être ſenſible. Car puiſque la période eſt accélérée dans tous les cas (art. 10 & 11) d'une partie

proportionnelle à $\alpha \delta$, $\alpha$ étant $= 3 R' \pi$, & $\delta$ la distance ; supposée à peu près constante, de la planete au soleil, soit $P$ la période non altérée, on aura $P - P \alpha \delta$ pour la période altérée ; donc le lieu moyen, après une révolution, est avancé de $360^\circ \times \alpha \delta$, & après $m$ révolutions de $360^\circ \times m^2 \alpha \delta$. Donc si la planete la plus prompte, dont je suppose la distance $\delta$, (la distance de l'autre étant $= 1$) fait $m$ révolutions, pendant que l'autre en fait une, l'avancement du lieu moyen dans la premiere sera à celui du lieu moyen de la seconde, comme $m^2 \delta$ est à 1 ; or $m^2$ est en raison inverse de $\delta^3$ ; donc l'avancement du lieu moyen, dans la premiere planete, est comme $\frac{1}{\delta^2}$, & par conséquent considérablement plus sensible (tout le reste d'ailleurs égal) dans la planete dont la révolution est plus prompte ; & cela en raison inverse du quarré de la moyenne distance, ou de la puissance $\frac{4}{3}$ du temps périodique.

13. Ceci suppose au reste que $R'$ soit constant ; car si $R'$ étoit comme $\delta^p$, alors l'avancement du lieu moyen seroit comme $\delta^{p-2}$.

14. Il faut remarquer de plus, que $R'$ est aussi, toutes choses d'ailleurs égales, comme la surface de la planete divisée par la masse ; d'où il s'ensuit, que si on nomme $\Delta$ la densité de la planete, & $a$ son demi-diametre, l'avancement du lieu moyen sera comme $\frac{\delta^{p-2}}{\Delta a}$.

15. Pour déterminer maintenant l'altération du mouvement des cometes, remarquons d'abord que nous pour-

rions trouver, par une méthode analogue à celle de l'art. 6 & des ſuivans, l'effet de la réſiſtance pendant une révolution, & le comparer à l'effet de la réſiſtance pendant une ſeule révolution d'une planete ordinaire. Mais cette recherche ſeroit plus curieuſe qu'utile, parce que l'effet de la réſiſtance, s'il eſt ſenſible, doit ſe manifeſter dans les cometes & dans les planetes, non par une ſeule révolution, mais par la différence de deux révolutions ſucceſſives. Car il eſt évident que l'effet de la réſiſtance pendant deux révolutions de la comete, priſes & conſidérées ſéparément, eſt ſenſiblement le même; & que par conſéquent la ſeule différence ſenſible qu'il puiſſe y avoir entre ces deux révolutions, vient uniquement de la vîteſſe initiale & de la diſtance périhélie. Donc, pour comparer deux révolutions ſucceſſives, il ſuffira de comparer les vîteſſes initiales & les diſtances périhélies, c'eſt-à-dire, de ſavoir combien la vîteſſe & la diſtance périhélie ont été altérées d'une révolution à la ſuivante par la réſiſtance du fluide; ou, ce qui eſt encore la même choſe, il ſuffira de ſavoir combien la diſtance moyenne ou le demi-grand axe que l'ellipſe de la comete auroit eu dans la premiere révolution, abſtraction faite de la réſiſtance pendant cette premiere révolution, differe du demi-grand axe que l'ellipſe auroit eu dans la ſeconde révolution, en vertu de la réſiſtance pendant la premiere révolution, & abſtraction faite de la réſiſtance pendant cette ſeconde révolution. En effet, c'eſt le rapport de ces grands axes qui détermine, comme on ſait,

le rapport des temps périodiques dans les deux ellipſes conſécutives.

16. M. Clairaut, dans ſa piéce ſur le mouvement des cometes, qui a partagé le prix de l'Académie de Pétersbourg en 1762, a donné pour l'objet dont il s'agit une méthode fort élégante, dans laquelle il s'eſt gliſſé ſeulement une mépriſe de calcul, eſſentielle pour le réſultat de la ſolution, mais très-aiſée à corriger. Ce ſavant Géometre fait voir, que ſi on prend $a$ pour le demi-axe de l'ellipſe, que la comete tend à décrire au commencement de la premiere révolution, & $\frac{a}{1-\zeta}$ pour le demi-axe de l'ellipſe que la même comete tend à décrire au commencement de la ſeconde révolution, on aura $\zeta = -\frac{2a}{M}\int R\,ds$, $M$ étant la maſſe du ſoleil, & $R$ étant $= R'v^2$; or $v^2 = \frac{2M}{r} - \frac{M}{a}$, $r$ étant le rayon variable de l'ellipſe de la comete; donc $\zeta = -2aR'\int\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)ds$. M. Clairaut ne trouve que $\zeta = -2R'\int\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)ds$; mais il eſt évident, par ſon calcul même, qu'il a omis ſans y prendre garde le facteur $a$; puiſqu'il réduit (page 41 de ſa piéce) la quantité $\frac{2a}{M}\int\frac{Rr^2\,dv^2}{ds} + \frac{2a}{M}\int\frac{R\,dr^2}{ds}$ à $\frac{2}{M}\int R\,ds$, au lieu que cette quantité eſt évidemment $\frac{2a}{M}\int R\,ds$; $r^2\,dv^2 + dr^2$ étant $= ds^2$. D'ailleurs $\zeta$ devant être ici un

nombre, doit être de dimenſion nulle, ce qui ne peut avoir lieu qu'en prenant l'équation $\zeta = -2aR'\int\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)ds$, parce que $R'$ eſt de dimenſion $-1$. Il eſt vrai qu'on peut ſupprimer $a$, en regardant cette quantité comme l'unité, ce qui n'aura point d'inconvénient quand il s'agit de comparer les altérations dans deux ellipſes où $a$ ſera à peu près la même; mais quand il s'agira de comparer l'altération des révolutions d'une comete à l'altération de la révolution d'une planete quelconque, par exemple, de la terre, alors la diſtance moyenne $a$ n'étant pas la même dans les deux cas, il faudra néceſſairement en tenir compte, ce que M. Clairaut n'a point fait.

17. Soit donc en général $a'$ la diſtance moyenne ou le rayon de l'orbite d'une planete quelconque, $2\pi$ le rapport de la circonférence au rayon, l'altération $a\zeta$ de la diſtance moyenne de la comete ſera à celle de la planete, comme $a^2\int\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)ds$ eſt à $2\pi a'^2$, & par conſéquent, le temps périodique étant en raiſon des puiſſances $\frac{3}{2}$ des diſtances moyennes, l'altération ou la diminution des temps périodiques (je dis la diminution à cauſe de $\zeta$ négatif) ſera en raiſon de $a^{\frac{5}{2}}\int\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)ds$ à $2\pi a'^{\frac{5}{2}}$, & non pas ſimplement en raiſon de $a^{\frac{3}{2}}\int\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)ds$ à $2\pi a'^{\frac{3}{2}}$, comme l'a cru M. Clairaut.

18. Ce ſavant trouve que dans la comete de 1759, la quantité $\int\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)ds$ eſt à peu près 18,005; & comme $2\pi$ eſt = à peu près 6, 281381, & que $a^{\frac{3}{2}}$ eſt à $a'^{\frac{3}{2}}$ à peu près comme $75\frac{1}{2}$ ans eſt à 1, (en prenant $a'$ pour la diſtance de la terre au ſoleil), il s'enſuit que la diminution du temps périodique de la comete doit être à celle de la terre à peu près comme $18,005 \times (75\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$ eſt à 6, 281381.

19. Ainſi, la diminution du temps périodique de la comete, en vertu de la réſiſtance, eſt moins de $3 \times (75\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$ fois la diminution du temps périodique de la terre. M. Clairaut ne trouve que $3 \times 75\frac{1}{2}$ fois, ayant omis par mégarde les coefficiens $a$ & $a'$ dans la comparaiſon des altérations des diſtances moyennes. Mais comme l'altération du temps périodique de la terre, pendant une révolution, eſt abſolument inſenſible, & qu'elle l'eſt même au bout d'un grand nombre de ſiécles, il s'enſuit que l'effet de la réſiſtance ſur la comete de 1759, eſt inſenſible auſſi, du moins d'une révolution à l'autre. En effet, on verra plus bas qu'il faudroit $\frac{100\times 100}{9}$ ans pour que le lieu de la terre fût avancé de 7″, & par conſéquent $\frac{100\times 100}{9}$ ans pour que ſon mouvement fût accéléré d'environ $\frac{7}{60\times 60}$ de jour, à raiſon d'environ un degré par jour; donc une ſeule révolution de la terre ne

ne pourra être diminuée par la réſiſtance que de $\frac{7}{60\times 60}$ jours multipliés par $\frac{81}{100^4}$, puiſque l'altération eſt en raiſon du quarré du nombre des révolutions ( art. 10 & 11 ). Donc une révolution de la terre ne pourra être diminuée par la réſiſtance que de $\frac{7\times 81^{\text{jours}}}{(60)^2.(100)^4}$. Donc deux révolutions ne pourront être diminuées que de $\frac{7\times 81\times 4^{\text{jours}}}{(60)^2.(100)^4}$. Donc la différence de deux révolutions ſucceſſives, différence qui eſt le ſeul objet dont il s'agit ici, ſera $= \frac{7\times 81\times 3^{\text{jours}}}{(60)^2.(100)^4} = \frac{7\times 81\times 3\times 24''}{(100)^4} = \frac{7\times 81''.9}{25\times 5000}$. Donc la différence de deux révolutions ſucceſſives de la comete de 1759 ſera, en vertu de la réſiſtance, $\frac{7\times 81''\times (75\frac{1}{2})^{\frac{5}{3}}\times 27}{25\times 5000}$ : ce qui ne produira qu'un temps peu conſidérable, & qu'on ne pourra par conſéquent diſtinguer par l'obſervation d'avec les autres altérations du mouvement de la comete, altérations que la théorie ne donne qu'imparfaitement.

20. A l'égard de la valeur générale de $\int\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right)ds$, c'eſt un objet que nous nous propoſons de traiter dans un autre écrit, où nous examinerons en même-temps l'altération que la réſiſtance fait éprouver à la comete pendant une ſeule révolution, & celle que la diſtance périhélie éprouve auſſi durant une ſeule révolution. En

voilà assez quant à présent sur l'objet principal de ce Mémoire, c'est-à-dire sur la comparaison de la résistance que les cometes & les planetes peuvent éprouver.

21. Au reste, nous avons supposé, avec M. Clairaut, dans les calculs précédens, que l'intensité $R'$ de la résistance étoit la même pour la comete & pour la terre, ce qui n'est vrai, qu'en supposant que l'éther soit par tout de densité uniforme, & que la comete & la terre ayent le même diametre & la même densité. Ces deux suppositions, & sur-tout la derniere, peuvent être fort éloignées de la vérité; en conséquence, le rapport trouvé des altérations du moyen mouvement peut être très-différent de celui que nous lui avons assigné d'après les suppositions de M. Clairaut, les seules au reste qui puissent, quant à présent, être faites pour le calcul.

## §. II.

### *De la résistance qu'éprouvent les planetes secondaires & principalement la lune.*

1. Venons présentement aux loix de la résistance que peut éprouver la lune dans un fluide très-rare, & que peuvent éprouver en général les planetes secondaires ou satellites; & voyons quelle influence peut avoir cette résistance sur le mouvement moyen. Nous avons déja remarqué (*Recherches sur le système du Monde*, Part. II, art. 292) que pour déterminer les loix de cette résistance, il falloit avoir égard, non à la vîtesse *relative* des

ſatellites autour de leurs planetes principales, mais à leur vîteſſe *abſolue*. C'eſt d'après ce principe que M. l'Abbé Boſſut, dans la piéce qui a remporté le prix de l'Académie en 1762, a traité cette importante matiere; elle va nous fournir quelques réflexions utiles, qu'on pourra ajouter à celles qu'il a déja faites ſur ce ſujet dans la piéce citée.

2. Soit $T$ la terre (*Fig.* 36); $QLD$ la projection de l'orbite de la lune ſur le plan de l'écliptique; $LT = x$; $LD = ds$; $NTn$ la ligne des nœuds de l'orbite de la lune; $KTk$ la direction de la terre dans ſon orbite au moment où la lune eſt en $L$; $QTS$ la ligne qui joint les centres de la terre & du ſoleil; $OLC$ une parallèle à $KTk$; $v'$ la vîteſſe de la lune; & $\lambda v'$ celle de la terre, $\lambda$ étant une quantité à peu près conſtante; $ds'$ l'arc que la terre parcourt dans ſon orbite pendant le temps que la lune parcourt l'arc $ds$ dans la ſienne, enſorte que $ds'$ ſoit à $ds$ comme $\lambda$ eſt à 1; $LA = ds'$; l'angle $DLT = 90° - \alpha$, $\alpha$ étant un aſſez petit angle; l'angle $KTS = 90° - \alpha'$; on achevera le parallélogramme $LABD$; on tirera la diagonale $BLb$, & on menera la perpendiculaire $BC$ à $LA$; cela poſé, nommant $R$ l'intenſité de la réſiſtance que la lune éprouve, & $R'$ l'intenſité de celle que ſouffre la terre, il eſt viſible, 1°. que la réſiſtance que la terre éprouve en $T$ eſt $= R'\lambda\lambda v'^2$; 2°. que la vîteſſe de la lune, dans l'eſpace abſolu, eſt $\frac{v'V(LB^2 + m^2 d(x \text{ ſin. } V)^2)}{LD}$; & par conſéquent la ré-

siſtance $= \frac{R v' v'}{L D^2} [L B^2 + m^2 d \text{ sin. } V)^2]$.

3. Or conſervant les noms donnés dans les *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, premiere Partie, art. 6 & 27, on a $L T O = z - z'$; & comme $L O T = 90° - a'$, donc $C L T = 90° - a' + z - z'$; donc puiſque $D L T = 90° - a$, on aura $C L D$ ou $C L T - D L T = z - z' + a - a'$; donc $C A = ds$ cof. $(z - z' + a - a')$; donc $L B^2$ ou $L A^2 + L D^2 + 2 L A \times C A = ds^2 + \lambda^2 ds^2 + 2 \lambda ds^2$ cof. $(z - z' + a - a')$; donc la réſiſtance que la lune éprouve dans l'eſpace abſolu, eſt $- \frac{R' v' v'}{ds^2} \times [ds^2 + \lambda^2 ds^2 + m^2 d (x \text{ sin. } V)^2 + 2 \lambda ds^2$ cof. $(z - z' + a - a')]$; & cette réſiſtance rapportée au plan de l'écliptique, ſera égale à la précédente multipliée par le rapport de $L B$ à la ligne $V (L B^2 + m^2 d (x \text{ sin. } V)^2)$ que la lune décrit dans l'eſpace abſolu; donc la réſiſtance cherchée ſuivant $L B$, ou plutôt ſuivant ſon prolongement $L b$, ſera $- \frac{R v' v'}{ds^2} \times [ds^2 + \lambda^2 ds + m^2 \times d (x \text{ sin. } V^2) + 2 \lambda ds^2 \text{ cof. } (z - z' + a - a')]^{\frac{1}{2}} \times [ds^2 + \lambda^2 ds^2 + 2 \lambda ds^2 \text{ cof. } (z - z' + a - a')]^{\frac{1}{2}}$; à quoi il faut ajouter la réſiſtance que la terre éprouve ſuivant $T k$, tranſportée à la lune en ſens contraire, & par conſéquent ſuivant $L A$; ce qui donnera $+ R' v' v' \lambda^2$.

4. Décompoſons d'abord cette derniere force $+ R' v' v' \lambda^2$ en deux autres, l'une dans le ſens du rayon vecteur $L T$, & l'autre perpendiculairement à ce même

rayon vecteur ; nous aurons pour la premiere $R' \nu' \nu' \lambda^2 \times$ cof. $CLT = R' \nu' \nu' \lambda^2$ cof. $(90° + z - z' - \alpha') = - R' \nu' \nu' \lambda^2$ ſin. $(z - z' - \alpha')$ ; & pour la ſeconde $R' \nu' \nu' \lambda^2 \times$ ſin. $CLT = R' \nu' \nu' \lambda^2$ cof. $(z - z' - \alpha')$ ; de même, ſi on nomme $B$ la quantité trouvée ci-deſſus pour la réſiſtance de la lune, on trouvera, en faiſant $CLB = \mathfrak{G}$, que les forces qui en réſultent ſont $B$ cof. $(CLT - \mathfrak{G}) = B$ cof. $(90° + z - z' - \alpha' - \mathfrak{G}) = - B$ ſin. $(z - z' - \alpha' - \mathfrak{G})$, & $B$ ſin. $(90° + z - z' - \alpha' - \mathfrak{G}) = B$ cof. $(z - z' - \alpha' - \mathfrak{G})$. Or ſin. $(z - z' - \alpha' - \mathfrak{G}) =$ ſin. $(z - z' - \alpha')$ cof. $\mathfrak{G}$ — ſin. $\mathfrak{G} \times$ cof. $(z - z' - \alpha')$ ; & cof. $(z - z' - \alpha' - \mathfrak{G}) =$ cof. $(z - z' - \alpha')$ cof. $\mathfrak{G}$ + ſin. $\mathfrak{G}$ ſin. $(z - z' - \alpha')$. De plus, ſin. $\mathfrak{G} = \frac{BC}{LB} = \frac{ds \text{ ſin. } (z - z' + \alpha - \alpha')}{LB}$ ; & cof. $\mathfrak{G} = \frac{CL}{LB} = \frac{\lambda ds + ds \text{ cof. } (z - z' + \alpha - \alpha')}{LB}$. Donc en mettant pour $B$ ſa valeur trouvée ci-deſſus, $- \frac{R' \nu' \nu' \times LB}{ds^2} \times [LB^2 + m^2 d(x \text{ ſin. } V)^2]^{\frac{1}{2}}$, on a la force totale $\varphi$ ſuivant le rayon vecteur, égale à $- R' \nu' \nu' \lambda^2$ ſin. $(z - z' - \alpha') + \frac{R \nu' \nu'}{ds^2} \times [ds^2 + \lambda^2 ds^2 + m^2 d(x \text{ ſin. } V)^2 + 2 \lambda ds^2 \times$ cof. $(z - z' + \alpha - \alpha')]^{\frac{1}{2}} \times [$ ſin. $(z - z' - \alpha') \times (\lambda ds + ds$ cof. $(z - z' + \alpha - \alpha')) -$ ſin. $(z - z' + \alpha - \alpha') \times ds$ cof. $(z - z' - \alpha')]$ ; & la force $\pi$ perpendiculaire au même rayon, ſera $+ R' \nu' \nu' \lambda^2$ cof. $(z - z' - \alpha')$

$$-\frac{Rv'v'}{ds^2}\times[ds^2+\lambda^2 ds^2+m^2 d(x\text{ sin. }V)^2+2\lambda ds^2 \text{ cos. }(z-z'+\alpha-\alpha')]^{\frac{1}{2}}\times[\text{cos. }(z-z'-\alpha')\times(\lambda ds+ds\text{ cos. }(z-z'+\alpha-\alpha'))+ds\text{ sin. }(z-z'+\alpha-\alpha')\times\text{sin. }(z-z'-\alpha')].$$

Il eſt de plus évident, que ſi $\lambda$ eſt un nombre aſſez grand, la quantité élevée à la puiſſance $\frac{1}{2}$ ſera à très-peu près $\lambda ds+ds$ cos. $(z-z'+\alpha-\alpha')$ en négligeant, ſi l'on veut, les autres termes, tous peu conſidérables par rapport à ces deux-là.

5. Suppoſons en premier lieu $\alpha=0$, $\alpha'=0$, $m=1$ dans l'expreſſion de la force $\varphi$ & de la force $\varpi$, & faiſons $\lambda=\frac{ds'}{ds}=\frac{n\delta'}{\delta}$, en nommant $\delta'$ le rayon de l'orbite terreſtre, & $\delta$ celui de l'orbite lunaire, l'un & l'autre regardés comme conſtans, & $\frac{n\delta'}{\delta}$, ou $\lambda$ étant une aſſez grande quantité (*a*). Il eſt aiſé de voir, 1°. que ni la force $\varphi$, ni les termes qui en ſeront dérivés dans l'équation de l'orbite, ne contiendront aucun terme de la forme $Mz$; 2°. que la force $\varpi$ contiendra un terme de cette forme $-\frac{Rv'v'\lambda ds^2}{ds^2}\times(\text{cos. }(z-z')^2+\text{sin. }(z-z')^2-\frac{Rv'v'\lambda ds^2}{ds^2}\times(\text{cos. }z-z')\times(\text{cos. }z-z')=-\frac{3Rv'v'\lambda}{2}$; en négligeant les termes qui contiennent des coſinus. Or il n'eſt pas difficile de voir, par

(*a*) Cette quantité eſt en effet aſſez grande, étant égale à environ $\frac{1}{12}\times\frac{17^6}{10^6}$ = environ 29.

nos formules du §. précédent (art. 10 & 11) que ſi la réſiſtance $= -Mv'^2$, $M$ étant une conſtante, l'altération du temps périodique ſera à très-peu près $\int \frac{a\,dz}{g} \times -3Mz = -\frac{3Mz^2a}{2g}$; donc $Z$ étant ſuppoſé le mouvement moyen de la lune, ce mouvement moyen ſera accéléré par la réſiſtance d'une quantité $= \frac{9R\lambda Z^2\delta}{4}$, $\lambda$ étant le rapport de la vîteſſe de la terre à celle de la lune, c'eſt-à-dire égal à $\frac{n\delta'}{\delta}$ (en prenant $n$ pour le rapport du temps périodique de la lune à celui de la terre). Donc au bout d'un an, c'eſt-à-dire de $\frac{1}{n}$ révolutions de la lune, le lieu moyen de la lune ſera plus avancé (§. I, art. 10 & 11) de $9R\pi^2\delta' . n \times \frac{1}{n^2}$; en prenant $\pi$ pour la demi-circonférence; & au bout de $m$ ans, l'avancement du lieu moyen ſera $\frac{9R\pi^2\delta' . m^2}{n}$. Pour l'orbite de la terre, l'avancement du lieu moyen, dans le même temps, ſeroit égal (§. I, art. 10 & 11) à $2 \times 3R'\pi^2\delta' . m^2$. Or les diametres de la terre & de la lune étant entr'eux comme 365 à 100, & les maſſes comme 80 eſt à 1, on aura $R : R' :: (100)^2 \times 80 : (365)^2$; de plus $n : 1 :: 27\frac{1}{3} : 365\frac{1}{4}$. Donc le rapport des quantités $9R\pi^2\delta' m^2 : n$, & $2 . 3R'\pi^2\delta' m^2$, eſt celui de $\frac{1}{2} \times \frac{80 \times (100)^2}{(365)^2} \times \frac{365}{27}$ à 1, c'eſt-à-dire d'environ 10000 à 81.

6. Or ſuivant M. Mayer, le lieu moyen de la lune en 100 ans eſt avancé de 7″; donc, pour que le lieu moyen de la terre fût avancé de 7″, il faudroit que celui de la lune fût avancé de $\frac{70000''}{81} =$, c'eſt-à-dire de $7'' \times \left(\frac{100}{9}\right)^2$. Or (§. I, art. 10 & 11) le nombre d'années néceſſaire pour produire cet avancement ſeroit $100^{ans} \times \frac{100}{9}$, c'eſt-à-dire 1111 ans; donc il faudroit ce nombre d'années pour que le lieu moyen de la terre parut avancé de 7″. Il n'eſt donc pas ſurprenant que le mouvement moyen de la terre ne paroiſſe pas ſenſiblement altéré. C'eſt auſſi ce qui réſulte des calculs de M. l'Abbé Boſſut dans ſa piéce déja citée.

7. En général, il eſt viſible que l'avancement du lieu moyen d'un ſatellite ſera à celui de ſa planete principale dans le même-temps, comme $3R$ eſt à $2nR'$, $n$ étant le rapport du temps périodique du ſatellite à celui de la planete principale, & $R$, $R'$, des quantités proportionnelles à $\frac{1}{\Delta a}$ & $\frac{1}{\Delta' a'}$, $a'$ étant le diametre de la planete, $a$ celui du ſatellite, $\Delta'$ la denſité de la planete, & $\Delta$ celle du ſatellite.

8. L'altération du lieu moyen dans un ſatellite, après une révolution, étant $360^\circ \times \frac{9R\pi n\delta'}{2}$, ou $360^\circ \times \frac{9\pi n\delta'}{2\Delta a}$, elle ſera proportionnelle, après $\mu$ révolutions,

tions, à $\frac{n\mu^2\delta^{\prime}}{\Delta a}$. Or on trouvera aiſément, par la théorie de la gravitation, que $n^2$ eſt proportionnelle à $\frac{\delta^3}{\Delta' a'^3 \delta'^3}$; donc l'altération dont il s'agit, dans deux ſatellites de deux différentes planetes, (en ſuppoſant le fluide partout homogene) eſt proportionnelle à $\frac{\mu^2 \delta \sqrt{\delta}}{\Delta a \sqrt{(M\delta')}}$; $\Delta' a'^3$ ou $M$ exprimant la maſſe de la planete principale. De plus, ſi on nomme $T$ la maſſe de la terre, $b$ la diſtance de la lune à la terre, on aura $\mu^2 = \frac{Mb^3}{T\delta^3}$, par les théorêmes d'Huyghens, $\mu$ étant le rapport du nombre de révolutions du ſatellite, au nombre de révolutions de la lune dans le même-temps. Donc l'altération du lieu moyen du ſatellite, ſera à celle de la lune dans le même-temps, en raiſon de $\frac{Mb^3}{T\delta^3} \times \frac{\delta\sqrt{\delta}}{\Delta a\sqrt{(M\delta')}}$ à $\frac{b\sqrt{b}}{D.A\sqrt{(T.B)}}$; en nommant $B$ la diſtance du ſoleil à la terre, $D$ la denſité de la lune, & $A$ ſon diametre; le rapport de ces quantités eſt celui de $\frac{D.A.\sqrt{M}.\sqrt{B}.b\sqrt{b}}{\sqrt{T}.\delta\sqrt{\delta}.\Delta a.\sqrt{\delta'}}$ à 1, & par-là on pourroit comparer l'altération du mouvement moyen d'un ſatellite quelconque à celle de la lune, ſi on connoiſſoit les quantités $\Delta$, $a$; on voit auſſi, que dans deux ſatellites d'une même planete, les altérations dans le même-temps ſeront comme $\frac{1}{\Delta a \delta \sqrt{\delta}}$; $\delta$ étant la diſtance reſpective de chaque ſatellite à ſa

planete principale, $\Delta$ la denſité du ſatellite, & $a$ ſon diametre.

9. Si la lune ſe mouvoit dans l'atmoſphere de la terre, alors il faudroit chercher l'effet de la réſiſtance comme dans une planete primitive ; & au bout de $m$ ans, le lieu ſeroit avancé (art. 5) de $\frac{2.3R\pi^2\delta m^2}{n^2} = 2.3R\pi^2\delta.m^2 \times 1178 = 2.3Rm^2.\delta\pi^2.\frac{365^2}{27^2}$ ; & comme $\delta'$ eſt à $\delta$ à peu près en raiſon de $57'$ à $10''$, en prenant $57'$ pour la parallaxe de la lune, & $10''$ pour celle du ſoleil, il eſt clair que l'avancement du lieu dans ce dernier cas, ſeroit à l'avancement du lieu dans le cas de l'art. 5, comme $\delta$ eſt à $\frac{3\delta'n}{2}$ :: 1 : $57 \times 6 \times \frac{1}{2} \times \frac{27}{365}$, c'eſt-à-dire à peu près comme 1 eſt à $\frac{57 \times 3^5}{3.3.2.2.2.5}$, ou environ comme 1 à 38. Si on veut auſſi comparer en ce dernier cas l'accélération de la lune à celle de la terre, la premiere ſera à la ſeconde comme $\frac{3R\pi^2\delta}{n^2} : 3R'\pi^2\delta'$, c'eſt-à-dire comme $(100)^2 \times 80 \times \frac{365^2}{27^2} : 365^2 \times 57 \times 6$, ou à peu près comme 10000 à 3078.

10. On voit donc que l'accélération du mouvement moyen de la lune eſt ſans comparaiſon plus ſenſible dans le cas de l'art. 5 (c'eſt-à-dire dans le cas où elle éprouveroit ſa principale réſiſtance de ſon mouvement abſolu) que dans celui où elle éprouveroit ſa principale réſiſtance de ſon mouvement relatif autour de la terre, &

retardé par l'atmoſphere terreſtre. Or comme les obſervations prouvent que l'accélération du mouvement moyen de la lune eſt en effet ſans comparaiſon plus ſenſible que celle du mouvement moyen de la terre, il eſt naturel d'en conclure, que des deux eſpéces d'accélération dont on peut ſuppoſer que le mouvement de la lune eſt altéré, par la réſiſtance qu'elle éprouve de la part du fluide où elle eſt, c'eſt en effet la premiere qui a lieu, c'eſt-à-dire celle qui eſt ſuppoſée dans l'art. 5 ci-deſſus. Cette réflexion peut être confirmée par une autre conſidération, ſavoir que l'atmoſphere terreſtre ne s'étend pas à beaucoup près juſqu'à la lune; d'où il eſt aiſé de conclure, que ſi la lune ſouffre quelque réſiſtance, elle ne la doit pas à ſon mouvement relatif autour de la terre & dans l'atmoſphere terreſtre, mais à ſon mouvement abſolu dans l'éther. En effet, l'atmoſphere terreſtre doit ceſſer à l'endroit où la gravitation de ſes parties ſeroit égale à la force centrifuge; ſoit donc $p$ la peſanteur, $r$ le rayon de la terre, $x$ la hauteur de l'atmoſphere, on aura $\frac{p\,r\,r}{x^2} = \frac{p\,x}{289\,r}$, ou $x^3 = (17)^2\,r^3$; donc $x = 6$ à 7 fois $r$, au lieu que la diſtance de la lune à la terre eſt $= 60$ fois $r$.

11. La réſiſtance que la lune éprouve dans l'eſpace abſolu, étant décompoſée en deux autres, l'une ſuivant le côté même de ſon orbite, l'autre parallèlement au plan de l'écliptique & à la direction $KTA$ de la terre; cette derniere force combinée avec la réſiſtance de la terre,

tranſportée à la lune en ſens contraire, tendra évidemment à déranger la lune du plan de ſon orbite ; donc, comme ces deux forces jointes enſemble agiſſent dans la même direction, la force qui en réſultera ſuivant $LA$, ſera $+R'\nu'\nu'\lambda^2 - \frac{R\nu'\nu'}{ds^2} \times LA \times [LB^2 + m^2 d(x \times$ ſin. $V)^2]^{\frac{1}{2}}$, dont il faudra changer les ſignes, ſi cette force s'exerce de $L$ vers $O$. Ainſi, en négligeant la quantité $m$ & les quantités très-petites par rapport aux autres, la force dont il s'agit, agiſſant ſuivant $LO$, ſera $-R'\nu'\nu'\lambda^2 + \frac{R\nu'\nu'}{ds^2} \times \lambda ds \times (\lambda ds + ds$ cof. $(z - z' + \alpha - \alpha'))$ à très-peu près ; mais nous ſuppoſerons dans les calculs ſuivans qu'elle agiſſe ſuivant $LA$. Soit cette force $= \rho$ ; ſi elle agiſſoit au point $L$, ſuivant une ligne parallèle à $OT$, on auroit pour l'élément du mouvement des nœuds $\frac{\rho dt^2}{dz} \times u$ ſin. $V \times$ ſin. $\nu(a)$ ; & pour l'élément de la variation de l'inclinaiſon, $\frac{dm}{m} = \frac{\rho dt^2}{dz} \times u$ cof. $V \times$ ſin. $\nu$ ; Or la force $\rho$ agit, non ſuivant une parallèle à $OT$, mais ſuivant $LA$, parallèle à $KTk$ ; donc puiſque $Tk$ eſt parallèle à $LA$, il faudra, au lieu de l'angle $QTn = \nu$, mettre l'angle $kTn = \nu - QTk = \nu - 90^\circ + \alpha'$ ; donc, au lieu de ſin. $\nu$, on aura, dans les deux formules ci-deſſus, ſin. $(\nu - 90^\circ + \alpha') = -$ cof. $(\alpha' + \nu)$. On peut remarquer encore, pour ſim-

(a) *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Part. I, art. 11 & 12.

plifier les formules, que $\nu' \nu' ds^2 = ds^2$, ce qui donnera le moyen de faire disparoître $\nu' \nu'$.

12. Puisque dans la force $p$ (en supposant, comme dans l'art. 5. $\alpha = 0$, $\alpha' = 0$) il entre un terme de cette forme cos. $(z - z')$, ou cos. $(z - nz)$, & que dans la différentielle du mouvement des nœuds, il entre deux facteurs de cette forme, l'un sin. $(z - pz)$, (art. 29 des *Recherches sur le système du Monde*), & l'autre (art. précédent) cos. $(\alpha' + \nu) =$ cos. $(nz - pz)$, il est visible qu'il n'y aura dans l'expression de ce mouvement que des sinus; car le produit de deux cosinus par un sinus est toujours un sinus.

13. Donc dans l'intégration, il ne se trouvera que des cosinus de $qz$, $q$ étant un nombre connu, & point de terme de cette forme $Nz$; donc la résistance ne donnera point de mouvement sensible aux nœuds de la lune, mais seulement un mouvement d'oscillation, qui sera aussi lui-même insensible.

14. Au contraire, & par une raison semblable, l'équation différentielle de l'inclinaison contiendra le produit de cos. $(z - nz)$ par cos. $(z - pz)$, & par sin. $(\nu - 90° + \alpha') = -$ cos. $(\alpha' + \nu) = -$ cos. $(nz - pz)$, & par conséquent contiendra un terme de la forme $N dz$, $N$ étant un coefficient constant, & égal à $-\frac{R\nu'\nu'\lambda}{4}$; d'où il est clair que la résistance de l'éther diminue insensiblement l'inclinaison.

15. Mais il est aisé de voir que cet effet sera comme

infiniment moindre que l'altération du moyen mouvement, & par conſéquent ſera tout-à-fait inſenſible; car $m$ étant la tangente de l'inclinaiſon, & $\lambda = 1$ le demi-diametre de l'orbite lunaire, la diminution de l'inclinaiſon eſt $\frac{R m \lambda \zeta}{4}$, & celle du temps périodique eſt $\frac{9 R \zeta \zeta \lambda}{4 g}$; donc l'avancement du lieu eſt (art. 5) $\frac{9 R . \zeta \zeta \lambda}{4}$; donc la premiere quantité eſt à la ſeconde comme $m$ eſt à $9\zeta$; donc puiſque la ſeconde $= 7''$ lorſque $\zeta = \frac{100 . 2\pi}{n}$; ($2\pi$ étant la circonférence) on aura en cent ans la diminution de l'inclinaiſon $= 7'' \times \frac{m}{9\zeta} = \frac{7'' \times m . n}{9 . 200\pi}$; quantité abſolument inſenſible, à cauſe de $\frac{m}{2\pi} = \frac{5^\circ . 18'}{360^\circ} =$ à peu près $\frac{1}{72}$, & de $n =$ environ $\frac{1}{13}$. Soit $\zeta = \frac{p . 100 . 2\pi}{n}$, on aura $p^2 \times 7''$ au lieu de $7''$, & la diminution de l'inclinaiſon ſera $= \frac{p^2 . 7'' \times m n}{9 , 200 p \pi} = \frac{7'' \times p}{13 . 9 . 72 . 100}$. Donc, pour qu'elle ſoit = à une ſeconde, il faut que $p =$ environ $\frac{72 . 100 . 13 . 9}{7}$; ainſi, la diminution de l'inclinaiſon ne ſeroit d'une ſeconde qu'après un nombre de ſiécles égal à cette valeur de $p$, c'eſt-à-dire après plus de $72 \times 14 \times 13 \times 9$ ſiécles.

16. Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que l'on avoit $\alpha = 0$, $\alpha' = 9$, $m = 0$, $\lambda =$ à une conſtante ainſi que $\nu'$. Voyons

préſentement, ſi en corrigeant ces ſuppoſitions, nous trouverons quelque nouvelle conſidération à ajouter aux recherches précédentes.

17. Et d'abord il eſt aiſé de voir que le rayon de l'orbite terreſtre contenant un terme de cette forme $\frac{\delta}{80} \times \text{cof.}(z - z')$, (en conſéquence de l'action de la lune ſur la terre) on aura pour $\alpha'$ une quantité de l'ordre de $\frac{\delta}{n.80\delta'}$ ſin. $(z - z')$; & par conſéquent, dans l'expreſſion de la force $\pi$ (art. 4) le terme $R'\nu'\nu'\lambda^2$ cof. $(z - z' - \alpha')$ donnera une quantité de cet ordre $R'\nu'\nu'\lambda^2 \times \frac{\delta}{n.80\delta'} = R'\nu'\nu'\lambda \times \frac{\lambda\delta}{n.80\delta'}$, laquelle ſera multipliée par $dz$; or $\lambda = \frac{n\delta'}{\delta}$; donc $\frac{\lambda\delta}{n.80\delta'} = \frac{1}{80}$. Donc les termes qui viendront de ceux-là ſeront plus petits en raiſon de $\frac{R'}{80}$ à $R$, que ceux de l'art. 5; & par conſéquent ils ne devront point entrer en conſidération, d'autant que $R'$ eſt à $R$, à peu près comme $(360)^2 : (100)^2 . 80$, c'eſt à-dire comme 4 eſt à 25.

18. De plus, $L$ étant la maſſe de la lune, la quantité $\nu'\nu'\lambda^2$, qui repréſente le quarré de la vîteſſe de la terre, doit contenir un terme de cette forme $\frac{Ln\delta'}{\delta\delta}$ cof. $(z - z')$ = à très-peu près $\nu'\nu'\lambda^2 \times \frac{Ln\delta' \text{ cof.}(z - z')}{\delta\delta} \times \frac{\delta'}{S} = \frac{\nu'\nu'\lambda^2 \times \delta}{n\delta'.80} \text{cof.}(z - z') = \frac{\nu'\nu'\lambda}{80} \text{cof.}(z - z')$;

donc la quantité $R' \nu' \nu' \lambda^2 \times \text{cof.}(z - z')$ produira un terme $= \frac{4 R \nu' \nu' \lambda}{25 . 80}$ à peu près, & par conſéquent le terme qui en viendra ſera encore beaucoup plus petit que celui de l'art. 5.

19. Le terme $- R \nu' \nu' \lambda^2 \text{ cof.}(z - z' - \alpha')$ qui vient auſſi de l'art. 4, & qui ſe trouve dans l'expreſſion de la force $\pi$, donnera de même un terme de cette forme $\frac{R \nu' \nu' \lambda}{80}$, qui eſt du même ordre que celui de l'art. 17, & qui par conſéquent peut auſſi être négligé.

20. A l'égard des termes qui contiendroient $m$ & $\alpha$, ils ſeront évidemment encore plus petits, puiſque la quantité $\lambda$, ou ne s'y trouvera point, ou ne s'y trouvera qu'au premier degré tout au plus, & que les quantités $m$ & $\alpha$ ſont de plus très-petites.

21. Donc les termes employés dans l'art. 5 paroiſſent être les ſeuls à conſidérer dans la recherche de la réſiſtance que la lune éprouve. Cette diſcuſſion étoit d'autant plus néceſſaire, que dans ces termes, la quantité $\lambda$, qui eſt très-grande, ne monte qu'au premier degré; & comme il y a des termes dans l'expreſſion de $\varphi$ & de $\pi$ (art. 4) qui doivent contenir le quarré $\lambda^2$, il étoit donc néceſſaire de s'aſſurer, ſi les facteurs très-petits, qui doivent multiplier ces termes, n'étoient pas de l'ordre de $\frac{1}{\lambda}$, c'eſt-à-dire $\frac{\delta}{n \delta'}$, ou même plus grands, auquel cas il auroit fallu y avoir égard dans la préſente recherche. Au reſte, on ſent aſſez que l'analyſe précédente n'eſt qu'un

qu'un léger eſſai de celle qu'il faudroit entreprendre pour déterminer exactement l'effet de la réſiſtance dans le cas où $\alpha$ & $\alpha'$ ne ſont pas égaux à zero. Il nous ſuffit ici d'avoir indiqué aux Géometres cet objet de recherches, & les conſéquences qui paroiſſent devoir en réſulter.

22. Examinons maintenant comment on peut déterminer par l'obſervation l'effet de la réſiſtance.

23. Soit $AT$ (*Fig.* 37) la ligne des temps $T$; & ſoit $Z = \alpha T + \zeta TT$, l'équation au lieu moyen d'une planete; ayant tiré la ligne droite $MA$ telle que $TM = \alpha T$, & ayant conſtruit la parabole $Am$ telle que $Mm = \zeta TT$; il eſt clair, 1°. que ſi au point $m$ on tire la tangente $m\nu$, cette tangente marquera le mouvement moyen en vertu de la réſiſtance précédente; & que les altérations ou augmentations $\mu'\nu$ de ce mouvement ſeront comme les quarrés des temps, à commencer depuis l'inſtant $T$; 2°. que cette quantité $\nu\mu'$ eſt additive à la longitude après le temps $T$, & ſouſtractive de la même longitude auparavant, pourvu qu'on prenne alors la longitude dans un ſens contraire & négatif; d'où il s'enſuit, que ſi on prend la longitude dans le même ſens avant & après l'inſtant $T$, l'équation ſéculaire, réſultante de la réſiſtance, devra toujours être ajoutée à la longitude moyenne; 3°. que ſi par les points $m$, $\mu'$, on tire la ligne droite $m\mu'$, & qu'on prenne $T\vartheta = k =$ à une révolution ſydérale de la lune, ou à peu près, $x\omega$ marquera le moyen mouvement réel pendant ce temps $T\vartheta$, & $x\delta$ le moyen mouvement apparent; 4°. ſoit $AT = T$, $T\theta = t$ ($t$ étant ſup-

posé positif ou négatif, selon que $A\theta$ ou $A\vartheta$ est $<$ ou $>AT$), $T\vartheta = k$, on aura $Tm = \alpha T + \mathfrak{C} TT$; $\theta\mu' = \alpha T + \alpha t + \mathfrak{C}(T+t)^2$; $\pi\mu' = \alpha t + 2\mathfrak{C} Tt + \mathfrak{C} tt$; $x\vartheta = \frac{\pi\mu' \times k}{t} = \alpha k + 2\mathfrak{C} Tk + \mathfrak{C} kt$; $x\omega$ par la propriété des tangentes de la parabole $= \frac{d(\alpha T + \mathfrak{C} TT)}{dT} \times k = \alpha k + 2\mathfrak{C} Tk$.

24. Par un raisonnement semblable, on trouve que le mouvement moyen pour le temps $k$, à compter du commencement du temps $AT = T$, est $(\alpha T + \mathfrak{C} TT) \times \frac{k}{T} = \alpha k + \mathfrak{C} kT$; d'où il s'ensuit que la différence des deux mouvemens moyens, pendant le temps $k$, à compter du commencement $m$ du temps $t$, & du commencement $A$ du temps $T$, savoir $\alpha k + 2\mathfrak{C} Tk + \mathfrak{C} kt$ d'une part, & $\alpha k + \mathfrak{C} Tk$ de l'autre, est $\mathfrak{C} Tk + \mathfrak{C} kt$.

25. Cela posé, soit $k = 27^{j}\ 7^{h}\ 43'\ 12''$, qui est à peu près le temps d'une révolution sydérale de la lune; l'observation fera connoître la valeur de $\mathfrak{C} Tk + \mathfrak{C} kt = m''$ de degré; pour cela, il suffira de prendre un grand nombre de révolutions depuis l'instant $A$, jusqu'à l'instant $T$ ou $m$, & un grand nombre de révolutions depuis l'instant $T$ ou $m$, jusqu'à l'instant $t$; & ayant fait 1°. $AT : k :: Tm$ est à un quatriéme terme; 2°. $T\theta : : k : : \pi\mu'$ est à un autre quatriéme terme, on connoîtra l'arc moyen parcouru durant le temps $k$ ou $T\vartheta$, 1°. à commencer de l'instant $A$, 2°. à commencer de l'instant $T$; la différence de ces arcs donnera $\mathfrak{C} Tk + \mathfrak{C} kt = m''$. De plus, le premier de

ces deux arcs donnera la valeur de $\alpha k + \zeta k T = 360° + n''$. On fera enſuite $\alpha k + 2\zeta T k + \zeta k t$, ou $360° + n'' + m''$ eſt à $360° :: k : x$; ce terme $x$ donnera le temps moyen d'une révolution ſydérale, à compter du commencement du temps $t$, & ce temps moyen ſera variable & décroiſſant, c'eſt-à-dire, d'autant moindre que le temps $t$ ſera plus grand.

26. Pour faire encore ces calculs avec plus d'exactitude, il ſera bon de dépouiller, autant que faire ſe pourra, les lieux obſervés, de l'effet que doivent produire les équations du mouvement de la lune (au moins les plus conſidérables) & de mettre à part l'effet de ces équations, pour n'avoir à peu près que le mouvement moyen obſervé pendant les temps $T$ & $t$; par-là on aura, auſſi exactement qu'il ſera poſſible, les valeurs de $\alpha k + b k T$, & $\alpha k + 2 b k T + \zeta k t$, puiſqu'il ne reſtera dans les lieux obſervés (outre le mouvement moyen) que des quantités très-petites, qui étant multipliées par les fractions $\frac{k}{T}$, $\frac{k}{t}$ (qu'on ſuppoſe l'une & l'autre très-petites) ſeront abſolument inſenſibles.

27. Il eſt d'autant plus important de choiſir de bonnes obſervations pour les lieux dont il s'agit, & d'en tirer le plus exactement qu'il ſera poſſible, la valeur du lieu moyen, que ſi dans l'obſervation, ou dans le calcul du lieu, on ſe trompoit de quelques minutes, on pourroit avoir une détermination très-fautive de l'effet de la réſiſtance, puiſque l'altération qu'on pourroit croire être

produite par cette réſiſtance, ſeroit l'effet, ou de l'erreur de l'obſervation, ou de l'erreur des tables. Ce n'eſt donc qu'en comparant avec ſoin les obſervations anciennes aux modernes, qu'on peut s'aſſurer que le mouvement moyen de la lune eſt réellement altéré; & c'eſt en effet ſur quoi les Aſtronomes paroiſſent s'accorder aſſez unanimement aujourd'hui.

28. Il n'en eſt pas de même du mouvement moyen de la terre; car les Aſtronomes ne s'accordent entr'eux, ni ſur la quantité, ni même ſur l'exiſtence de ſon altération; il paroît du moins bien certain que cette altération eſt beaucoup moins ſenſible que celle du mouvement moyen de la lune; & nous croyons en avoir donné dans l'art. 6 une raiſon ſatisfaiſante.

29. Nous avons fait voir dans ce Mémoire comment on peut expliquer, d'une maniere plauſible, l'équation ſéculaire de la lune par la réſiſtance de l'éther; nous avons cependant remarqué à la fin du Mémoire précédent, qu'il ſeroit peut-être poſſible auſſi d'expliquer cette équation par la gravitation, s'il ſe rencontroit dans l'équation du lieu moyen, des termes dont les argumens fuſſent extraordinairement petits. Mais il ne faut pas croire, comme l'avance M. de la Lande dans le Journal des Savans du mois d'Août 1768, *qu'il ſoit prouvé, par le retardement de Saturne, que ce n'eſt pas la réſiſtance qui altere le moyen mouvement des planetes.* Avec un peu d'attention, & ſur-tout d'intelligence de la matiere, on verra, que ſi la gravitation paroît rendre une raiſon ſuffiſante du retardement de Saturne, c'eſt parce qu'il

y a dans l'expreſſion du lieu moyen de cette planete des argumens, qui au bout de pluſieurs révolutions, ſont encore peu conſidérables ; que de tels argumens ſont beaucoup plus difficiles à aſſigner dans la lune que dans Saturne, parce que la lune faiſant 13 à 14 révolutions périodiques par an, & Saturne une révolution en 30 ans, un argument, qui dans Saturne, pourroit être encore aſſez petit au bout d'un grand nombre d'années, pourra être au contraire très-grand dans la lune, puiſqu'il ſera environ 400 fois plus grand que dans Saturne; qu'il eſt donc beaucoup plus difficile de trouver dans la lune que dans Saturne, des argumens aſſez petits pour qu'on puiſſe, par leur moyen, rendre raiſon de l'équation ſéculaire de la lune, comme on rend raiſon de celle de Saturne; & que par la difficulté, ou peut-être l'impoſſibilité de trouver de tels argumens dans la lune, on pourroit bien être obligé, pour expliquer l'équation ſéculaire de cette planete, de recourir à d'autres cauſes que la gravitation, quoiqu'on n'ait pas été obligé d'y recourir pour expliquer l'équation ſéculaire de Saturne.

30. Au reſte, il y auroit encore pluſieurs remarques à faire ſur l'équation ſéculaire du mouvement moyen, ſurtout en tant qu'elle peut provenir de la gravitation, & ſur d'autres inégalités ou équations qui ſont liées à celle-là. Je me ſuis borné à donner en peu de mots dans le Mémoire précédent, les principes qui doivent ſervir de baſe à cette recherche, dont je pourrai m'occuper plus en détail dans quelque autre occaſion.

*Fin du quarante-uniéme Mémoire.*

*Concluſion des Mémoires précédens ſur la Théorie de la Lune & le Problême des trois Corps.*

LES quatre Mémoires qu'on vient de lire, & qui ont principalement la théorie de la lune pour objet, ne ſont proprement qu'un commentaire & un développement des différens articles que nous n'avons fait qu'indiquer dans le XXIX^e^ Mém. de nos *Opuſc.* Tome IV. Il nous reſte à parler d'un autre point que nous avons effleuré à la fin de ce même Mémoire. C'eſt l'altération que la force qui pouſſe la lune vers la terre, doit éprouver en conſéquence de la non-ſphéricité de la terre & de celle de la lune. Nous en dirons ici deux mots.

Il faut remarquer d'abord que cette altération doit être extrêmement petite. En effet, ſuppoſons, en premier lieu, un corps peu différent d'une ſphere, lequel corps attire un corpuſcule ou atome placé à une diſtance très-grande par rapport aux dimenſions du corps. Imaginons qu'on faſſe paſſer par l'atome attiré, & par le centre de gravité du corps attirant, un plan de poſition quelconque; & ſoit $\pi$ la diſtance d'un point quelconque du corps à ce plan: il eſt évident, que par la propriété du centre de gravité, on aura $\int \alpha \pi = 0$, en nommant $\alpha$ chaque particule du corps. Or ſi on appelle $\Delta$ la diſtance du centre de gravité à l'atome, il n'eſt pas difficile de voir que l'attraction que la particule $\alpha$ exerce dans la direction de $\pi$ eſt à très-peu près $\frac{\alpha \pi}{\Delta^3}$; d'où il s'enſuit que la ſomme de ces forces eſt $= 0$, & qu'ainſi la force qui attire dans

la direction $\pi$ eſt tout au plus de l'ordre de $\pi^2$. Or ſi le corps attirant étoit une ſphere, cette derniere force de l'ordre de $\pi^2$ ſeroit encore évidemment nulle, puiſque la force attractive de la ſphere s'exerce uniquement, comme l'on ſait, dans la direction de $\Delta$. Donc, ſi le corps attirant differe très-peu d'une ſphere, l'attraction ſera encore infiniment moindre que de l'ordre de $\pi^2$, c'eſt-à-dire (ſi le corps attirant eſt elliptique) de l'ordre de $\pi^2$, multiplié par une quantité de l'ordre de l'ellipticité de ce corps; ou, pour s'exprimer avec plus d'exactitude, ſoit $\epsilon$ l'ellipticité du corps attirant, $n$ le rapport du rayon de ce corps (ſuppoſé preſque ſphérique) à la diſtance $\Delta$, la force perpendiculaire au plan ſuppoſé, ſera tout au plus de l'ordre de $\epsilon n^2$ par rapport à la force $\frac{M}{\Delta^2}$, $M$ exprimant la maſſe du corps attirant.

On prouvera de la même maniere que les forces qui s'exercent parallèlement au plan propoſé, étant diminuées comme elles le doivent être par la force $\frac{M}{\Delta^2}$, tranſportée en ſens contraire, & parallèlement à la direction $\Delta$, il ne reſtera qu'une force perturbatrice de l'ordre de $\epsilon n^2$, & par conſéquent très-petite.

De-là il s'enſuit que la force perturbatrice de la lune, qui vient de la figure de la terre, la lune étant d'abord regardée comme un point, eſt de l'ordre de $\frac{\epsilon r^2}{\Delta^2}$ par rapport à la force principale $\frac{T}{\Delta^2}$, en nommant $T$ la maſſe de la terre, $r$ ſon rayon, & $\epsilon$ ſon ellipticité; & comme $\frac{r}{\Delta}$ eſt à peu près égal à $\frac{1}{60}$, & que $\epsilon$ eſt auſſi

fort petit, il eſt clair que cette force perturbatrice eſt exceſſivement petite par rapport à la force principale.

Il n'eſt pas difficile de voir, par les mêmes principes, que la force perturbatrice de la lune, réſultante de ſa figure non ſphérique, eſt auſſi très-petite, & même plus petite encore que la précédente, au moins en ſuppoſant les ellipticités égales, parce que la quantité $\frac{r}{\Delta}$ eſt plus petite pour la lune que pour la terre. On voit donc que ces forces perturbatrices ne doivent pas produire un effet conſidérable; cependant il eſt aiſé d'y avoir égard, ſi on le juge à propos, & nous avons donné tous les principes néceſſaires pour réſoudre cette queſtion, tout ſe réduiſant à calculer les quantités $\int G(a-b)^2$, $\int Gff$ (ou plutôt $\int G(a-b)^2 - \int Gff$), & $\int Gff$ cof. $2\xi$. Sur quoi voyez le 21$^e$ Mém. Tom. IV de nos *Opuſcules*, nos *Recherches ſur la Préceſſion des Equinoxes*, art. 44, & nos *Recherches ſur le ſyſtême du Monde*, Partie II, art. 352 & ſuivans.

Il réſulte de tout ce qu'on vient de dire, que ſi deux corps de figure quelconque s'attirent mutuellement à une diſtance $\Delta$, très-grande par rapport aux dimenſions de ces corps, leur attraction ſera ſenſiblement la même que s'ils étoient ſphériques & de même maſſe, & que l'erreur ne ſera tout au plus que de l'ordre de $n^2$, $n$ étant du même ordre que le rapport des dimenſions des deux corps à leur diſtance $\Delta$; & ſi les deux corps different peu d'une ſphere, l'erreur ſera encore d'un ordre au-deſſous de $n^2$.

# XLII^ME MÉMOIRE.

*Contenant différens écrits ſur quelques ſujets d'aſtronomie phyſique.*

## §. I.

*Du mouvement des apſides quand la force centrale n'eſt pas exactement en raiſon inverſe du quarré de la diſtance.*

1. Les difficultés que nous avons expoſées dans le trente-neuviéme Mémoire, §. II, ſur la détermination du mouvement de l'apogée de la lune, ne ſont pas les ſeules qui puiſſent ſe rencontrer dans la recherche dont il s'agit. On ſait que parmi les forces perturbatrices de la lune, & en général de tous les ſatellites, il y en a une qui eſt proportionnelle à la diſtance, & qui agit ſuivant la direction du rayon; cette force, comme on le ſait encore d'ailleurs, doit produire une partie du mouvement de l'apogée; & en général, lorſque la force $\pi$ perpendiculaire au rayon eſt $= 0$, & que la force $\psi$, dans la direction du rayon, eſt $\psi = Kuu + \lambda u^m$ ou $Kuu +$

$\lambda \varphi u$, on sait que l'équation de l'orbite est représentée par l'équation $dz = \frac{dt}{\sqrt{(2et - tt)}} : \sqrt{(1 + At + Bt^2 + Ct^3}$, &c.) en regardant $t$, $e$, comme des quantités fort petites, & $\lambda$ comme très-petite par rapport à $K$.

2. Pour trouver le mouvement de l'apogée dans ces sortes d'équations, & connoître les difficultés dont cette recherche est susceptible, nous examinerons le cas le plus simple, celui où le radical $\sqrt{(1 + At + Bt^2 + Ct^3)}$ se réduiroit à $\sqrt{(1 + At)}$. Les réflexions que ce cas nous fournira, auront lieu, à plus forte raison, pour les autres cas.

3. Il y a deux manieres d'intégrer l'équation $dz = \frac{dt}{\sqrt{(2et - tt)}.\sqrt{(1 + At)}}$, l'une en prenant la valeur de $z$ en $t$, & l'autre en cherchant la valeur de $t$ en $z$. Commençons par la premiere, qui servira à jetter beaucoup de jour sur la seconde, laquelle est ici notre principal objet.

4. Pour trouver l'intégrale de $\frac{dt}{\sqrt{(a - t)}.\sqrt{(2et - tt)}}$, $t$ étant supposé beaucoup plus petit que $a$, on réduira $\frac{1}{\sqrt{(a - t)}}$ en serie, & l'on aura $\frac{1}{\sqrt{a}} \times [1 + \frac{t}{2a} + \frac{t.3t}{2a.4a} + \frac{t^3.1.3.5}{2.4.6a^3} + \frac{t^4.1.3.5.7}{2.4.6.8a^4}$, &c. ], de sorte qu'un terme quelconque, ayant pour exposant $n + 1$, sera $\frac{1}{\sqrt{a}} \times \frac{1.3.5....2n-1.t^n}{2.4....2n}$.

5. Donc ce terme sera au précédent comme $\frac{(2n-1)t}{2na}$

eſt à 1 ; c'eſt-à-dire, comme $\frac{(2n-1)t}{a}$ à $2\pi$.

6. Maintenant, on peut voir aiſément que $\int \frac{t^n dt}{\sqrt{(2et-tt)}} = -\frac{t^{n-1}\sqrt{2et-tt}}{n} + \frac{2n-1}{n}\int \frac{et^{n-1}dt}{\sqrt{(2et-tt)}}$ ; d'où il s'enſuit, que lorſque $t = 2e$, & qu'ainſi $\int \frac{dt}{\sqrt{(2et-tt)}} = \pi$, $2\pi$ étant le rapport de la circonférence au rayon, on aura $\int \frac{t^n dt}{\sqrt{(2et-tt)}} = \frac{1.3.5....2n-1}{1.2.3....n} \times \pi \times e^n$. Donc lorſque $t = 2e$, l'intégrale du terme $(n+1)^e$ de la ſuite qui exprime la valeur de $\frac{dt}{\sqrt{(a-t)}.\sqrt{(2et-tt)}}$, ſera $\left(\frac{1.3.5....2n-1}{1.2.3....n}\right)^2 \times \frac{\pi e^n}{2^n a^n} \times \frac{1}{\sqrt{a}}$. Donc chaque terme de cette ſuite ſera au précédent en raiſon de $\frac{(2n-1)^2}{n^2} \times \frac{e}{2a}$ ou de $\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 \times \frac{2e}{a} = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^2 \times \frac{2e}{a}$, à l'unité ; de maniere qu'en ſuppoſant $n = \infty$, on voit que la ſerie ſera divergente ſi $2e$ eſt $> a$.

7. Donc alors la ſerie donnera un faux réſultat ; mais on remédiera à cet inconvénient lorſque $2e$ eſt $> a$, en écrivant $\frac{dt}{\sqrt{(at-tt)}\sqrt{(2e-t)}}$ au lieu de $\frac{dt}{\sqrt{(a-t)}.\sqrt{(2et-tt)}}$, ce qui donnera une ſuite convergente. Si $2e = a$, on fera attention que $\frac{dt}{\sqrt{(2et-tt)}} \times \frac{1}{\sqrt{(a-t)}}$ de-

vient alors $\frac{dt}{(2e-t)\sqrt{t}}$, quantité qui s'integre par logarithmes, & dont l'intégrale, en ſuppoſant $t = \frac{uu}{2e}$, ſe trouve $= \frac{1}{\sqrt{(2e)}} \log. \left(\frac{2e+\sqrt{(2et)}}{2e-\sqrt{(2et)}}\right)$; de ſorte que ſi on avoit $dz = \frac{dt}{\sqrt{\left(1-\frac{t}{2e}\right)}.\sqrt{(2et-tt)}}$, l'intégrale ſeroit $z = \log. \left(\frac{2e+\sqrt{(2et)}}{2e-\sqrt{(2et)}}\right)$, en ſuppoſant $t = 0$ lorſque $z = 0$.

8. On peut remarquer encore, 1°. que ſi $2e$ eſt $=$ ou $< a$, le rapport $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2 \times \frac{2e}{a}$ va toujours en augmentant, quoique toujours plus petit que l'unité, & qu'ainſi la ſerie eſt convergente dès ſes premiers termes, mais toujours de moins en moins convergente; 2°. que ſi $2e$ eſt $< a$, & que $n$ ſoit ſuppoſé un aſſez grand nombre, par exemple, 10, le rapport $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2 \times \frac{2e}{a}$ eſt ſenſiblement $= \frac{2e}{a}$, & qu'ainſi la ſerie devient ſenſiblement géométrique, ce qui ſe confirme encore par la remarque déja faite dans le trente-cinquiéme Mémoire, §. I, art. 22 & ſuiv.; 3°. que ſi $2e$ eſt $> a$, mais en même-temps $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2 < \frac{a}{2e}$, la ſerie ſera convergente dans ſes premiers termes juſqu'à ce que $\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2$ ſoit $=$ ou $> \frac{a}{2e}$, après quoi elle ſera divergente; ce qui arrivera, par exemple, ſi $\left(1-\frac{1}{2}\right)^2$ eſt

$< \frac{a}{2e}$, ou $\left(1 - \frac{1}{2.2}\right)^2 < \frac{a}{2e}$, ou $\left(1 - \frac{1}{2.3}\right)^2 < \frac{a}{2e}$, &c. & ainſi de ſuite. On aura donc en ce cas $1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(2e)}} < \frac{1}{2n}$; & comme $n$ ne ſauroit être $< 1$, il s'enſuit que ſi $1 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{(2e)}}$ n'eſt pas $< \frac{1}{2}$, la ſerie ſera divergente dès ſes premiers termes. On voit encore, que ſi la différence de $2e$ & de $a$ eſt fort petite, $2e$ étant toujours $> a$, enſorte que $\frac{2e}{a} = \frac{1}{(1-p)^2}$, $p$ étant un très-petit nombre, la ſerie ſera convergente tant que $\frac{1}{2n}$ ſera plus grand que $p$, de ſorte que la ſerie pourroit être convergente juſqu'au milliéme ou millioniéme terme, & cependant donner un faux réſultat, parce qu'elle ſeroit divergente dans ſes derniers termes.

9. Si l'on avoit $\frac{dt}{\sqrt{(a+t)}.\sqrt{(2et-tt)}}$, & $2e = a$, en ce cas, la ſerie ne pourroit être réduite à des logarithmes comme dans le cas de $a - t$, & de $2e = a$, & elle ne pourroit alors être repréſentée que par une ſuite de termes aſſez peu convergente.

10. Enfin, ſi $2e$ eſt $< a$, & qu'on ait $a + t$, la ſerie ſera convergente à la vérité, mais beaucoup moins que dans le cas de $a - t$, parce que dans ce dernier cas de $a - t$, tous les termes de la ſerie ont le ſigne $+$, au lieu que dans le cas de $a + t$, ils auroient alternativement les ſignes $+$ & $-$.

vient alors $\frac{dt}{(2e-t)\sqrt{t}}$, quantité $c\frac{dt}{(2e-t)^{\frac{m}{2}}\sqrt{(2et-tt)}}$ logarithmes, & dont l'intégrale [illegible], dont l'exposant $\frac{uu}{2e}$, se trouve $= \frac{1}{\sqrt{(2e)}}$ log[illegible] $\frac{\frac{m}{2}+n-1}{n} \times \frac{t}{a}$ [illegible] forte que si on avoit $dz =$ [illegible] $(m+2n-2)\frac{t}{a}$ est à $2n$, [illegible] tégrale seroit $z =$ [illegible] de l'intégrale, lorsque $t = 2e$; [illegible] sant $t = 0$ lor[illegible] [illegible] son de $\frac{(m+2n-2)(2n-1)}{2nn}$

8. On [illegible] [illegible] rapport qui va toujours en augmentant [illegible] $< a$, [illegible] [illegible] augmente; d'où l'on tirera des conclu- m[illegible] [illegible] à celles du cas où $m = 1$; savoir, que [illegible] $= a$, le rapport est $= \frac{2e}{a}$, & que quand [illegible] $= 1$, le rapport est $\frac{me}{2a}$, & qu'en général le rapport [illegible] $\frac{2e}{a}\left(1 - \frac{2-m}{2n}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2n}\right)$. On voit aisément que quand même $\frac{2e}{a}$ seroit $< 1$, le nombre $m$ pourroit être tel que la série seroit divergente dans les premiers termes; par exemple, si $\frac{m}{4}$ étoit $> \frac{a}{2e}$, le second terme seroit évidemment $>$ que le premier, &c.

11. Soit $a = 2pe$, & soit supposé $dz = \frac{ds}{\sqrt{(a-s)} \cdot \sqrt{(2es-ss)}}$ on aura $z = \frac{\pi}{\sqrt{a}} \times \left[1 + \frac{1}{4p} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16p^2} + \frac{1}{4} \times \frac{9}{16}\right.$

$\frac{25}{16p^3}$ + &c. ]; on ajoutera enſemble les 9 à 10 pre-
s termes de cette ſerie, & on regardera les autres
8) comme formant ſenſiblement une progreſſion
ique. J'appelle S la ſomme totale de cette ſerie.
t $e - z = e$ cof. $u$, on aura, lorſque $z = 2e$,
ſéquent $u = 180° = \pi$, l'équation $z =$
$u = \frac{2\sqrt{a}}{S}$; donc le premier terme de la
de $z$ eſt $e - e$ cof. $\frac{2\sqrt{a}}{S}$.

15. Si l'équation étoit $dz = \frac{dz}{\sqrt{(1-\frac{z}{a})}.\sqrt{(2ez-zz)}}$,
on auroit, ſans rien changer d'ailleurs, $\frac{2}{S}$ à la place
de $\frac{2\sqrt{a}}{S}$.

16. On aura de plus (art. 6) en omettant les termes
où ſe trouve l'angle $u$; $\int \frac{z\,dz}{\sqrt{(2ez-zz)}} = -\sqrt{(2ez-zz)} = -$ ſin. $u$; $\int \frac{z^2\,dz}{\sqrt{(2ez-zz)}} = -\frac{z\sqrt{(2ez-zz)}}{2}$
$+ \frac{3e}{2} \times -\sqrt{(2ez-zz)}$; $\int \frac{z^3\,dz}{\sqrt{(2ez-zz)}} = -$
$\frac{z^2\sqrt{(2ez-zz)}}{3} + \frac{5e}{3} \times \left(-\frac{z\sqrt{(2ez-zz)}}{2} - \right.$
$\left.\frac{3e\sqrt{(2ez-zz)}}{2}\right)$; $\int \frac{z^4\,dz}{\sqrt{(2ez-zz)}} = -\frac{z^3\sqrt{(2ez-zz)}}{4}$
$+ \frac{7}{4} \times \left[-\frac{z^2\sqrt{(2ez-zz)}}{3} + \frac{5e}{3} \times \left(-\frac{z\sqrt{(2ez-zz)}}{2}\right.\right.$
$\left.\left. - \frac{3e\sqrt{(2ez-zz)}}{2}\right)\right]$.

11. Pour avoir l'intégrale de $\frac{dt}{(a-t)^{\frac{m}{2}}\sqrt{(2at-tt)}}$, on remarquera qu'un terme quelconque, dont l'exposant est $n+1$, sera au précédent comme $\frac{\frac{m}{2}+n-1}{n} \times \frac{t}{a}$ est à 1, c'est-à-dire comme $(m+2n-2)\frac{t}{a}$ est à $2n$.

12. Donc chaque terme de l'intégrale, lorsque $t=2e$, sera au précédent en raison de $\frac{(m+2n-2)(2n-1)}{2nn} \times \frac{e}{a}$ à l'unité, rapport qui va toujours en augmentant à mesure que $n$ augmente; d'où l'on tirera des conclusions analogues à celles du cas où $m=1$; savoir, que quand $n=\infty$, le rapport est $=\frac{2e}{a}$, & que quand $n=1$, le rapport est $\frac{me}{2a}$, & qu'en général le rapport est $\frac{2e}{a}\left(1-\frac{2-m}{2n}\right)\times\left(1-\frac{1}{2n}\right)$. On voit aisément que quand même $\frac{2e}{a}$ seroit $<1$, le nombre $m$ pourroit être tel que la serie seroit divergente dans les premiers termes; par exemple, si $\frac{m}{4}$ étoit $>\frac{a}{2e}$, le second terme seroit évidemment $>$ que le premier, &c.

13. Soit $a=2pe$, & soit supposé $dz=\frac{dt}{\sqrt{(a-t)}.\sqrt{(2at-tt)}}$, on aura $z=\frac{\pi}{\sqrt{a}}\times\left[1+\frac{1}{4p}+\frac{1}{4}\times\frac{9}{16p^2}+\frac{1}{4}\times\frac{9}{16}\right.$

$\times \frac{25}{36p^3} +$ &c. ]; on ajoutera enſemble les 9 à 10 premiers termes de cette ſerie, & on regardera les autres (art. 8) comme formant ſenſiblement une progreſſion géométrique. J'appelle $S$ la ſomme totale de cette ſerie.

14. Soit $e - x = e \text{ cof. } u$, on aura, lorſque $x = 2e$, & par conſéquent $u = 180° = \pi$, l'équation $z = \frac{uS}{\sqrt{a}}$; donc $u = \frac{z\sqrt{a}}{S}$; donc le premier terme de la valeur de $x$ eſt $e - e \text{ cof. } \frac{z\sqrt{a}}{S}$.

15. Si l'équation étoit $dz = \frac{dx}{\sqrt{(1-\frac{x}{a})}.\sqrt{(2ex-xx)}}$, on auroit, ſans rien changer d'ailleurs, $\frac{z}{S}$ à la place de $\frac{z\sqrt{a}}{S}$.

16. On aura de plus (art. 6) en omettant les termes où ſe trouve l'angle $u$; $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(2ex-xx)}} = -\sqrt{(2ex-xx)} = -\text{ ſin. } u$; $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{(2ex-xx)}} = -\frac{x\sqrt{(2ex-xx)}}{2} + \frac{3e}{2} \times -\sqrt{(2ex-xx)}$; $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{(2ex-xx)}} = -\frac{x^2\sqrt{(2ex-xx)}}{3} + \frac{5e}{3} \times \left(-\frac{x\sqrt{(2ex-xx)}}{2} - \frac{3e\sqrt{(2ex-xx)}}{2}\right)$; $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{(2ex-xx)}} = -\frac{x^3\sqrt{(2ex-xx)}}{4} + \frac{7}{4} \times \left[-\frac{x^2\sqrt{(2ex-xx)}}{3} + \frac{5e}{3} \times \left(-\frac{x\sqrt{(2ex-xx)}}{2} - \frac{3e\sqrt{(2ex-xx)}}{2}\right)\right]$.

17. On voit donc que l'intégrale de $\frac{t^n dt}{\sqrt{(2et-tt)}}$, contiendra (outre les termes qui renferment des arcs de cercle) les termes $-\frac{t^{n-1}\sqrt{(2et-tt)}}{n} + \frac{(2n-1).e}{n} \times -t^{n-2}\sqrt{(2et-tt)} + \frac{(2n-1).(2n-3).e^2}{n.(n-1)} \times -t^{n-3}\sqrt{(2et-tt)} + \frac{(2n-1).(2n-3).(2n-5).e^3}{n.(n-1).(n-2)} \times -t^{n-4}\sqrt{(2et-tt)}$, &c. qui peuvent être transformés en sinus & cosinus de $u$ & de ses multiples, puisque $\frac{e-t}{e} = \text{cos. } u$, & $\frac{\sqrt{(2et-tt)}}{e} = \text{sin. } u$.

18. Donc mettant pour $t$ sa valeur $e - e \text{ cos. } u$, on aura aisément la valeur de $z$ par une serie composée de $u$ & de sin. $u$, & par conséquent on trouvera, par les méthodes connues, celle de $u$ en $z$ & sin. $z$.

19. Mais on peut y parvenir d'une maniere plus simple par la méthode suivante; au lieu de $\alpha - t$, on écrira $\alpha - e + e - t$, & en faisant $\alpha - e = 6$, on aura $\frac{dt}{\sqrt{(\alpha-t)}.\sqrt{(2et-tt)}} = \frac{dt}{\sqrt{(6+e-t)}.\sqrt{(2et-tt)}} = \frac{dt}{\sqrt{6}.\sqrt{(2et-tt)}} \times \left(1 - \frac{e-t}{2.6} + \frac{1.3(e-t)^2}{2.4.6^2} - \frac{1.3.5(e-t)^3}{2.4.6.6^3} + \text{&c.}\right)$, de sorte qu'un terme quelconque, ayant pour exposant $n+1$, sera $\pm \frac{dt}{\sqrt{6}.\sqrt{(2et-tt)}} \times \left(\frac{1.3.5.....2n-1(e-t)^n}{2.4.....2n}\right)$. Or $(e-t)^n = (\text{cos. } u)^n e^n$; & l'on peut trouver aisément la

la valeur de $\int du \cdot \text{cos.}\, u^n$ lorsque $u = 180°$.

20. Pour cela, il suffira de considérer que $\text{cos.}\, u^n = \frac{1}{2^{n-1}} \times (\text{cos.}\, nu + n \cdot \text{cos.}\,(n-2)u + \frac{n.(n-1)}{2} \times \text{cos.}\,(n-4)u$, &c.); d'où il est aisé de voir, 1°. que si $n$ est un nombre impair, l'intégrale de $du\ \text{cos.}\, u^n$ sera composée de termes de cette forme $A\ \text{sin.}\, nu + B\ \text{sin.}\,(n-2)u +$ &c. & qu'ainsi elle sera $= 0$, lorsque $u = 180°$; 2°. que si $n$ est pair & $= 2m$, la différentielle $du\ \text{cos.}\, u^n$ contiendra un terme constant de cette forme $\frac{n.n-1 \ldots n-m+1}{2^{n-1}.2.3 \ldots m} du$; 3°. que dans les autres termes on aura des quantités de cette forme $\frac{n.n-1 \ldots n-p}{2^{n-1}.2 \ldots p+1} \times \frac{\text{sin.}\,(n-2(p+1)u)}{n-2(p+1)}$.

21. De-là il sera facile de trouver la valeur de $z$ en $u$, & en sinus & cosinus de $u$ & de ses multiples.

22. Soit maintenant en général $t = e - e\ \text{cos.}\, u$, & $z = Au + B\varphi u$, $B$ étant un coefficient très-petit par rapport à $A$, & $\varphi u$ une suite de sinus & de cosinus de multiples de $u$; on aura d'abord $u = \frac{Z}{A} - \frac{B}{A}\varphi u$ ou $u = \frac{z}{A} - \frac{B}{A}\varphi\frac{z}{A}$ à très-peu près; ensuite faisant $u = \frac{z}{A} - \alpha$, on aura exactement $u = \frac{z}{A} - \frac{B}{A} \times \varphi\left(\frac{z}{A} - \alpha\right) = \frac{z}{A} - \frac{B}{A}\varphi\left(\frac{z}{A}\right) + \frac{B\alpha}{A.dz} \times d\varphi\left(\frac{z}{A}\right).A - \frac{B\alpha^2}{2Adz^2} dd\varphi\left(\frac{z}{A}\right).A^2 +$

$\frac{B\alpha^3 . A^3}{2.3.A.dz^3} \times ddd\varphi\left(\frac{z}{A}\right)$ — &c. D'où il eſt aiſé de voir que les valeurs de $-\alpha$ ſeront ſucceſſivement & par approximation $-\frac{B}{A}\varphi\left(\frac{z}{A}\right)$, $-\frac{B}{A}\varphi\left(\frac{z}{A}\right) + \frac{B}{dz}d\varphi\left(\frac{z}{A}\right) \times -\frac{B}{A}\varphi\left(\frac{z}{A}\right)$, & ainſi de ſuite, en mettant ſucceſſivement dans chaque terme les valeurs de $\alpha$ trouvées par les corrections précédentes, & négligeant ſucceſſivement dans ces corrections les puiſſances de $\frac{B}{A}$ plus hautes que celles auxquelles on veut avoir égard. La valeur de $u$ en $z$ étant connue, on aura facilement $s$ par l'équation $s = e - e\ \text{cof.}\ u = e - e\ \text{cof.}\left(\frac{z}{A} - \alpha\right) = e - e\ \text{cof.}\left(\frac{z}{A}\right) + \frac{e\alpha\, d\,\text{cof.}\left(\frac{z}{A}\right)}{dz} \times A - \frac{e\alpha^2}{2} \times \frac{dd\,\text{cof.}\left(\frac{z}{A}\right)}{dz^2} \times A^2$, &c. & ainſi de ſuite.

23. On trouvera donc de cette maniere la valeur de $u$ en $z$, & celle de $s$ en $u$ & en $z$. Et on remarquera que la valeur de $u$ en $z$ eſt donnée par une ſerie très-convergente lorſque $\alpha$ eſt conſidérable par rapport à $2e$, & que pour lors, dans l'équation $z = Au +$ &c. le coefficient $A$ eſt auſſi donné par une ſerie très-convergente; d'où il eſt facile de connoître le mouvement des apſides.

24. Voyons maintenant ce que donnera l'intégration de l'équation, en cherchant immédiatement la valeur de $s$ en $z$.

25. Soit $dz = \frac{dt}{\sqrt{(1-\frac{t}{a})}.\sqrt{(2et-tt)}}$, on aura $ddt = dz^2(e-t-\frac{2et}{a}+\frac{3t^2}{2a})$. Soit enſuite ſuppoſé pour une premiere approximation $t = A+B$ cof. $Nz$, & négligeant d'abord les quarrés de $B$, on aura

$$0 = BN^2 \text{ cof. } Nz + e,$$
$$-B \text{ cof. } Nz \quad -A$$
$$-\frac{2e}{a}B \text{ cof. } Nz - \frac{2eA}{a} \text{ &c.}$$
$$+\frac{3AB.2 \text{ cof. } Nz}{2a} + \frac{3AA}{2a}$$

Donc ſuppoſant $dt = 0$, & $t = 0$, lorſque $z = 0$, on aura $B = -A$; $A = \frac{e}{1+\frac{2e}{a}-\frac{3A}{2a}}$; $N^2 = 1+\frac{2e}{a}-\frac{3A}{a}$.

26. La premiere équation donne $-\frac{3AA}{2a}+A(1+\frac{2e}{a}) = e$; ou $AA - A(\frac{2a}{3}+\frac{4e}{3}) = -\frac{2ae}{3}$; d'où $A = +\frac{a}{3}+\frac{2e}{3}\pm\sqrt{(\frac{(a+2e)^2}{9}-\frac{2ae}{3})}$.

27. Si $a$ eſt très-grand par rapport à $2e$, on a le radical égal à très-peu près à $\frac{a+2e}{3}-\frac{ae}{a+2e}$; ainſi les deux valeurs de $A$ ſont à très-peu près $\frac{e}{1+\frac{2e}{a}}$, & $+\frac{2a+4e}{3}$

$-e = +\frac{2a+e}{3}$. Mais, de ces deux valeurs, il ne faut admettre que la premiere ; car l'équation $dz = \frac{dt}{\sqrt{(1-\frac{t}{a})}.\sqrt{t}.\sqrt{(2e-t)}}$ fait voir, que ſi $t$ eſt $> 2e$, & $< a$, la valeur de $dz$ eſt imaginaire, & par conſéquent auſſi celle de $z$.

28. Il faut dire la même choſe des valeurs de $N^2$, qui réſultent des deux valeurs de $A$, & ne prendre que la valeur réſultante de $A = \frac{e}{1+\frac{2e}{a}}$.

29. C'eſt donc une imperfection dans la ſolution qu'on vient d'expoſer, de donner de fauſſes valeurs de $A$ & de $N$, mêlées avec les véritables ; & c'eſt en général une imperfection de l'analyſe de repréſenter la valeur d'une quantité $x$, qu'on ſuppoſe devoir être très-petite, par une équation qui donne à $x$ pluſieurs valeurs, dont il n'y en a qu'une de très-petite, & par conſéquent de réellement utile à la ſolution du problême ; par exemple, ſoit $a + 2bx + cx^2 = 0$, $b$ étant ſuppoſé beaucoup plus grand que $a$ & que $c$ ; on aura $x = \frac{b \pm \sqrt{(bb-ac)}}{c}$ ; or $\sqrt{(bb-ac)} = b - \frac{ac}{2b} + \frac{a^2c^2}{b^3} \times \frac{1}{2} \times \frac{-1}{4} - \frac{a^3c^3}{b^5} \times \frac{\frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} \times \frac{-3}{2}}{2.3} \ldots \pm \frac{a^n c^n b}{b^{2n}} \times \frac{1.3.5.7 \ldots 2n-3}{2^n.2.3.4.5 \ldots n}$, $n$ étant égal au nombre des termes moins 1. D'où il eſt clair que les deux valeurs de

$x$ ſeront $-\frac{a}{2b}+\frac{a^2c}{b^3}+$ &c. & $-\frac{2b}{c}+\frac{a}{2b}$ $-\frac{a^2c}{b^3}$, &c. dont la premiere ſeulement repréſente la valeur de $x$, lorſque $x$ doit être très-petite; c'eſt donc une ſorte d'imperfection dans l'analyſe, que de préſenter en même-temps une autre valeur.

30. Si on fait, pour une ſeconde approximation plus exacte, $t = A + B$ cof. $Nz + C$ cof. $2Nz$, on aura cof. $Nz\left(BN^2 - B - \frac{2Be}{a} + \frac{6AB}{2a} + \frac{3CB}{2a}\right)$ $+ e - A - \frac{2eA}{a} + \frac{3A^2}{2a} + \frac{3BB}{4a} + \frac{3CC}{4a} +$ cof. $2Nz\left(4N^2C - C - \frac{2eC}{a} + \frac{3BB}{4a} + \frac{3CA}{a}\right) = 0$. D'où l'on tire $N^2 = 1 + \frac{2e}{a} - \frac{3A}{a}$ $- \frac{3C}{2a}$; $B = -A - C$; $e = A + \frac{2eA}{a} - \frac{3A^2}{2a} - \frac{3(A+C)^2}{4a} - \frac{3CC}{4a}$; $C = -\frac{3(A+C)^2}{4a\left(4N^2 - 1 - \frac{2e}{a} + \frac{3A}{a}\right)}$.

On voit donc que les ſubſtitutions donneroient pluſieurs valeurs pour $A, B, C, N$; & en pouſſant ainſi le calcul à l'infini, on trouveroit une infinité de valeurs, quoiqu'il n'y en ait réellement qu'une de vraie pour chacune de ces quantités, ſavoir celle qui rend $A, B, C$, &c. infiniment petites de l'ordre de $e$, ou de $e^2$. Cela eſt clair, 1°. par l'équation même $dz = \frac{dt}{\sqrt{\left(1-\frac{t}{a}\right)}.\sqrt{(2et-tt)}}$;

qui fait voir que $t$ ne sauroit être $> 2e$; 2°. par l'intégration trouvée ci-dessus (art. 4 & suiv.) de l'équation $dz = \frac{dt}{\sqrt{(\alpha - t)}\sqrt{(2et - tt)}}$, qui ne donne qu'une seule valeur pour $\frac{N\alpha}{S}$, laquelle quantité est évidemment la valeur de $N$, puisque $t = e - e$ cos. $\frac{zN\alpha}{S}$, &c.

31. Il faut avouer d'ailleurs, que quoiqu'on démêle aisément parmi toutes les valeurs de $N$ celle qui doit être employée dans le cas dont il s'agit, la méthode est encore imparfaite par une autre raison; car la valeur de $t$ devant contenir une suite de termes de cette forme $G$ cos. $pz$, il faudroit que l'équation en $N$ contînt toutes les valeurs possibles de $p$; & c'est ce qui n'est pas.

32. Pour voir un exemple bien sensible de cette imperfection, supposons $\alpha = 2e$, nous avons remarqué ci-dessus qu'en ce cas $z = \log. \left(\frac{2e + \sqrt{(2et)}}{2e - \sqrt{(2et)}}\right)$, d'où il est aisé de voir que $t$ sera exprimé en quantités de la forme $Ac^{fz}$, $f$ étant réel, & que par conséquent, si on fait $t = A + B$ cos. $Nz$, &c. $N$ doit être imaginaire; cependant les valeurs de $A$ & de $N^2$ trouvées ci-dessus, art. 25, donnent en ce cas $A = 2e$, & $A = \frac{2e}{3}$, & $N^2 = -1$, $N^2 = 1$, d'où l'on voit que $N$ a deux valeurs imaginaires $\pm \sqrt{(-1)}$, & deux réelles $\pm 1$, lorsqu'il ne devroit au contraire en avoir que d'imaginaires. La complication des difficultés seroit encore plus grande

Si on poussoit le calcul au-delà des deux équations $N^2 = 1 + \frac{2e}{\alpha} - \frac{3A}{\alpha}$, & $A = \frac{e}{1 + \frac{2e}{\alpha} - \frac{3A}{2\alpha}}$.

33. D'où il s'ensuit que la formule $A + B \cos. Nz + C \cos. 2Nz$, &c. ne donne réellement la valeur de $t$ que dans les cas où $\alpha$ est une quantité beaucoup plus grande que $2e$, & où nous avons déja vû que la valeur de $z$ en $t$ est exprimée par une suite très-convergente. De même, lorsqu'on veut avoir la valeur de $t$ en $z$, & que $2e$ est supposée très-petite par rapport à $\alpha$, il est aisé de voir que les valeurs de $N$, $A$, $B$, $C$, &c. seront exprimées par des series très-convergentes.

34. On peut encore remarquer en passant, que lorsque $t$ est à la fois $> 2e$, & $> \alpha$, la valeur de $\frac{dz}{dt}$ est réelle; mais celle de $z$ reste toujours imaginaire, puisque $dz$ est imaginaire lorsque $t$ est $> 2e$, & $< \alpha$. D'où l'on voit que $t$ étant supposé $> 2e$, & $> \alpha$, la valeur de $z$ sera égale à une fonction réelle de $t$, plus à une constante imaginaire. Ainsi la valeur de $z$ en $t$, pour répondre à tous les cas possibles, devroit être telle, 1°. qu'en supposant $t < 2e$, & $< \alpha$, les valeurs de $dz$ & de $z$ fussent réelles; 2°. qu'en supposant $t > 2e$, & $< \alpha$, les valeurs de $dz$ & de $z$ fussent imaginaires; 3°. qu'en supposant $t > 2e$, & $> \alpha$, la valeur de $dz$ fut réelle, & celle de $z$ imaginaire.

35. On doit sentir suffisamment par ces remarques, & par celles que nous avons faites dans le trente-neu-

viéme Mémoire, § II, tout ce qui reſte encore à faire aux Géometres pour perfectionner les méthodes qui donnent le mouvement des apſides dans la ſolution du problême des trois Corps.

## §. II.

### *Sur le mouvement des nœuds des Satellites.*

1. Suppoſons qu'un ſatellite décrive autour de ſa planete principale une orbite à peu près circulaire, mais qui faſſe *un angle conſidérable* avec le plan de l'écliptique ; on demande le mouvement des nœuds en vertu de l'action du ſoleil.

2. On a trouvé (art. 29 des *Recherches ſur ſyſtême du Monde*) qu'en ſuppoſant les orbites circulaires, & à peu près dans le même plan, le mouvement $d\zeta$ des nœuds, pendant un inſtant $dt$, eſt $= -\frac{3n^2 d\zeta}{4} \times [1 - \text{cof.}(2\zeta - 2p\zeta) - \text{cof.}(2n\zeta - 2p\zeta) + \text{cof.}(2\zeta - 2n\zeta)]$ ; & on a trouvé en général (art. 11 & 29 du même Ouvrage) que $d\zeta$ étoit $= -\frac{3Sdt^2}{d\zeta . B'}$ cof. $\theta$ ſin. $V$ ſin. $\nu$.

3. Suppoſons maintenant les orbites ſenſiblement circulaires, enſorte que $B'$ ſoit conſtant ou puiſſe être regardé comme tel, & imaginons que l'orbite du ſatellite, qui étoit ſuppoſé à très-peu près dans le plan de l'écliptique, ſoit relevée ſur ce plan, de maniere, 1°. qu'elle faſſe avec l'écliptique l'angle $h'$ ; 2°. que l'angle $\zeta$, parcouru

couru durant le temps $t$, ait pour projection sur l'écliptique l'angle $\zeta'$; on aura $d\zeta = -\frac{3Sdt^2}{d\zeta'.B^3} \times [\cos.(\zeta' - n\zeta).\sin.(\zeta' - p\zeta).\sin.(n\zeta - p\zeta)]$. Or $dt^2 =$ à très-peu près $\frac{d\zeta^2}{g^2} = \frac{(xxd\zeta')^2}{(g\cos.h')^2}$, parce que la vîtesse de projection étant $g$ dans l'orbite réelle, est $= g\cos.h'$ dans la projection de l'orbite; donc, par la même raison, $d\zeta' = \frac{d\zeta\cos.h'}{xx}$; donc (en prenant $a = 1$ pour le rayon de l'orbite réelle) on aura $d\zeta = -3n^2 d\zeta \times \frac{xx}{\cos.h'} \times [\cos.(\zeta' - n\zeta).\sin.(\zeta' - p\zeta).\sin.(n\zeta - p\zeta)]$.

4. Maintenant, comme l'inclinaison est à peu près constante, & le mouvement des nœuds à peu près uniforme, on aura à très-peu près $aa\cos.\zeta^2 + aa\sin.\zeta^2 \times \cos.h'^2 = xx$, & $x\cos.(\zeta' - p\zeta) = a\cos.\zeta$; d'où l'on tire $\cos.(\zeta' - p\zeta) = \frac{a\cos.\zeta}{x}$, & $\sin.(\zeta' - p\zeta) = \frac{a\sin.\zeta\cos.h'}{x}$. Enfin, $\cos.(\zeta' - n\zeta) = \cos.(\zeta' - p\zeta - n\zeta + p\zeta) = \cos.(\zeta' - p\zeta) \times \cos.(n\zeta - p\zeta) + \sin.(n\zeta - p\zeta) \times \sin.(\zeta' - p\zeta)$. Donc, substituant toutes ces valeurs, & prenant $a$ pour l'unité, on aura $\sin.(\zeta' - p\zeta) \times \cos.(\zeta' - n\zeta) = \frac{\cos.h'\sin.\zeta}{x} \times \frac{\cos.\zeta\cos.(n\zeta - p\zeta) + \cos.h'\sin.(n\zeta - p\zeta)\sin.\zeta}{x}$.

5. On pourra même, au lieu du produit $\cos.(\zeta' - n\zeta) \times \sin.(\zeta' - p\zeta)$, écrire plus généralement $\cos.(\zeta'$

$-\zeta - n\zeta + \zeta) \times \text{sin.}(\zeta' - \zeta) = \left[\frac{\text{cos.}\,\zeta}{x} \times \text{cos.}(\zeta - n\zeta) - \frac{\text{sin.}(\zeta - n\zeta) \times \text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,h'}{x}\right] \times \frac{\text{sin.}\,\zeta\,\text{cos.}\,h'}{x}$; d'où l'on voit que $d\zeta$ est égal à $+ 3n^2\,d\zeta \times \text{sin.}(\zeta - n\zeta) \times \left[\frac{\text{sin.}(2\zeta + \zeta - n\zeta)}{4} + \frac{\text{sin.}(2\zeta - \zeta + n\zeta)}{4} - \frac{\text{cos.}\,h'\,\text{sin.}(\zeta - n\zeta)}{2} + \frac{\text{cos.}\,h'\,\text{sin.}(\zeta - n\zeta + 2\zeta)}{4} + \frac{\text{cos.}\,h'\,\text{sin.}(\zeta - n\zeta - 2\zeta)}{4}\right] = + \frac{3n^2\,d\zeta}{4} \times [-\text{cos.}\,h' + \text{cos.}\,h' \times \text{cos.}(2\zeta - 2n\zeta) + \left(\frac{\text{cos.}\,h' + 1}{2}\right) \times [-\text{cos.}(2\zeta + 2\zeta - 2n\zeta) + \text{cos.}\,2\zeta] + \left(\frac{1 - \text{cos.}\,h'}{2}\right) \times [-\text{cos.}\,2\zeta + \text{cos.}(2\zeta - 2\zeta + 2n\zeta)] = + \frac{3n^2\,d\zeta}{4} \times [-\text{cos.}\,h' + \text{cos.}\,h'\,\text{cos.}(2\zeta - 2n\zeta) + \text{cos.}\,h'\,\text{cos.}\,2\zeta + \left(\frac{\text{cos.}\,h' + 1}{2}\right) \times [-\text{cos.}(2\zeta + 2\zeta - 2n\zeta)] + \left(\frac{1 - \text{cos.}\,h'}{2}\right) \times [\text{cos.}(2\zeta - 2\zeta + 2n\zeta)]$.

6. De-là on voit, que dans le cas même où l'orbite du satellite fait un angle considérable avec l'orbite de la planete principale, le mouvement des nœuds renferme une partie toujours rétrograde $-\frac{3n^2\,\zeta\,\text{cos.}\,h'}{4}$, proportionnelle à cos. $h'$.

7. La solution que M. Newton a donnée du *Problême de la préceſſion des Equinoxes*, ſolution peu exacte d'ailleurs a pluſieurs égards (comme je l'ai prouvé dans mes

*Recherches sur la précession des Equinoxes* & dans le trente-septiéme Mémoire ci-dessus) suppose implicitement la vérité de cette proposition, qui avoit besoin, ce me semble, d'être démontrée.

8. On trouvera de même la variation de l'inclinaison du satellite, par les formules des art. 12 & 30 de nos *Recherches sur le système du Monde*, en mettant dans le premier membre de l'équation $d\zeta = -3n^2 d\tau \times \frac{xx}{\text{cos. } h} \times [\text{cos.}(\tau' - n\tau).\text{sin.}(\tau' - p\tau)\,\text{sin.}(n\tau - p\tau)], \frac{dm}{m}$ au lieu de $d\zeta$, & dans le second membre cos. $(\tau' - p\tau)$ au lieu de sin. $(\tau' - p\tau)$; & achevant le calcul comme ci-dessus, on aura cos. $(\tau' - n\tau) \times$ cos. $(\tau' - p\tau) = \left[\frac{\text{cos. } \tau}{x} \times \text{cos.}(\zeta - n\tau) - \frac{\text{sin.}(\zeta - n\tau) \times \text{sin. } \tau \text{ cos. } h'}{x}\right] \times \frac{\text{cos. } \tau}{x}$; & par conséquent $\frac{dm}{m} = +3n^2 d\tau \times \text{sin.}(\zeta - n\tau) \times \left[\frac{\text{cos.}(\zeta - n\tau)}{2} + \frac{\text{cos.}(2\tau + 2\zeta - 2n\tau)}{4} + \frac{\text{cos.}(2\tau - 2\zeta - 2n\tau)}{4} - \frac{\text{cos. } h'}{4} \times (-\text{cos.}(2\tau + 2\zeta - 2n\tau) + \text{cos.}(2\tau - 2\zeta - 2n\tau))\right]$; d'où il est aisé de voir que l'inclinaison aura une équation principale proportionnelle à cos. $(2\zeta - 2n\tau)$, c'est-à-dire au cos. de la distance du soleil au nœud, & indépendante de l'inclinaison; comme il est évident aussi, par l'art. 5, que le mouvement du nœud a une équation principale proportionnelle à cos. $h'$ sin. $(2\zeta - 2n\tau)$.

9. Nous avons négligé dans cet article l'excentricité

de l'orbite & ſa double courbure ; mais il eſt aiſé, ſi l'on veut, d'y avoir égard, au moyen des formules du trente-huitiéme Mémoire, art. 21 & ſuivans. Il peut même réſulter de-là quelques conſéquences importantes que nous nous propoſons de développer dans un autre écrit ; il nous ſuffit d'avoir démontré dans celui-ci la propoſition ſuppoſée vraie par M. Newton, & que perſonne n'avoit encore ſuffiſamment prouvée.

## §. III.

### *Sur l'altération du mouvement des Cometes dans le ſyſtême de la gravitation.*

1. J'ai déja remarqué dans le Tome II de mes *Opuſcules*, pag. 233, un inconvénient conſidérable des méthodes d'approximation pour trouver l'altération du mouvement des Cometes par l'action de Jupiter & de Saturne. Cet inconvénient conſiſte en ce que l'altération produite par l'action réunie des deux planetes, ſe trouve quelquefois, par le calcul, plus éloignée de l'altération obſervée, que ne le ſeroit l'altération produite par une ſeule ; au lieu que ſi les méthodes d'approximation n'étoient pas ſujettes à des erreurs conſidérables, l'altération produite par les deux planetes devroit différer moins de l'altération réelle, que l'altération produite par une ſeule. J'ai donné au même endroit un exemple de cet inconvénient, d'après les calculs de M. Clairaut, pour la différence des périodes de 1531 à 1607, & de 1607 à 1682. En effet, par ces calculs, en n'ayant égard qu'à

l'action de Jupiter, la différence calculée des deux périodes ne differe que de 16 jours de la différence réelle observée ; au lieu qu'en ayant égard de plus à l'action de Saturne, la différence calculée differe de la différence observée de 33 jours ; c'eſt-à-dire, qu'en ayant égard à l'action de Saturne, l'erreur de 16 jours, qui auroit dû être diminuée, a été au contraire augmentée de 17 jours.

2. M. Clairaut paroît s'être propoſé d'infirmer cette objection dans ſa piéce envoyée à Pétersbourg ſur l'altération des périodes de la comete ; il trouve, que pendant la révolution de 1531 à 1607, l'action de Jupiter a dû produire une altération de . . . — $5^{j}, 49$ ; il trouve encore que cette même action de Jupiter, ſur la comete, de 1531 à 1607, a dû altérer la période de 1607 à 1682, (abſtraction faite de l'action de Jupiter pendant cette derniere période) de . . . — $37^{j}, 28$ ; & que l'action de Jupiter a dû de plus altérer la période de 1607 à 1682, de . . . . — $420^{j}, 05$

| | | |
|---|---|---|
| donc ajoutant | — | 420, 05 |
| & | — | 37, 28 |
| on aura, pour l'altération totale produite par Jupiter de 1607 à 1682, | — | 457, 33 |
| dont la différence à | — | 5, 49 |
| eſt | — | 451, 84. |

Ainſi la ſeconde période a dû être plus courte que la premiere de $451^{j}, 84$ en n'ayant égard qu'à l'action de Jupiter.

3. Or la comete a passé en 1531, par son p.rih. le 25 Août, & en 1607 le 26 Octobre, ce qui donne 76 ans + 61 jours (— 10); je retranche 10 jours à cause de la réformation du Calendrier en 1582, qui a mis le 16 Octobre au 26. Donc la période de 1531 à 1607 est de 76 ans + 51$^{j}$. De plus, la comete en 1682 a passé à son périhélie le 14 Septembre. Donc de 1607 à 1682, la période est de 75 ans — 42 jours; donc la différence des deux périodes est 1 an + 51$^{j}$ + 42$^{j}$ = 365$^{j}$ + 93 = 458$^{j}$; donc la seconde période = la précédente moins 458$^{j}$; ce qui ne differe que de 6 jours de la période dûe à l'action de Jupiter.

3. Par la même piéce de M. Clairaut, l'action de Saturne, pendant la premiere période de 1531 à 1607, a produit une altération égale à . . . — 177$^{j}$, 44;
l'altération de la seconde période de 1607 à 1682, en vertu de l'action de Saturne pendant la période précédente, est . . . . . — 152, 90
l'altération de la seconde période, par l'action de Saturne, . . . . — 8, 18
Donc l'altération totale de la seconde période, par l'action de Saturne, est . . — 161, 08
donc ajoutant — 177, 44
à + 161, 08
on aura, pour la différence des deux périodes, par l'action de Saturne, ou pour la quantité dont la premiere a surpassé la seconde, . . . . . — 16$^{j}$, 36

or on a, pour la différence des deux périodes, par l'action de Jupiter, ou pour la quantité dont la premiere a surpassé la seconde, . . . . . } . . . + 451, 84.

Donc la seconde période est plus courte que la premiere de $435^{l}$, 48 en vertu des deux actions réunies; & par conséquent, puisque cette période est réellement plus courte de 458 jours, l'erreur totale est de 23 jours.

4. Ainsi, l'erreur qui n'auroit été que de 6 jours, en ayant égard à l'action de Jupiter seulement, a été de 23 jours, en ayant égard aux actions de Jupiter & de Saturne, ce qui ne devroit pas être; l'action de Saturne auroit dû diminuer l'erreur d'environ 6 jours, pour que tout s'accordât, au lieu qu'elle l'augmente de 17.

5. M. Clairaut avoit trouvé d'abord, pour la différence des deux périodes causée par l'action seule de Jupiter, — $16^{l}$; & en vertu de l'action de Saturne, l'augmentation d'erreur — $17^{l}$, ce qui faisoit — $33^{l}$ d'erreur; ici il trouve pour l'action de Jupiter — 6 seulement, & pour celle de Saturne — 17, ce qui rend l'erreur totale de 23 jours plus petite, à la vérité, que la premiere erreur de $33^{l}$; mais il n'en est pas moins vrai, que l'erreur est toujours augmentée par le calcul de l'action de Saturne, au lieu qu'elle devroit être diminuée.

6. Au reste, cette objection, comme je l'ai dit dans l'endroit cité, n'a point pour objet d'attaquer les calculs de M. Clairaut, dont on doit louer le travail & le courage; mais seulement de faire voir combien, dans

ce problême ſi compliqué, les méthodes d'approximation ſont imparfaites & ſujettes à erreur.

7. L'inconvénient du calcul de M. Clairaut, dans la comparaiſon des périodes de 1531 & de 1607, n'a pas lieu dans celle des périodes de 1607 & 1682 ; car il trouve que l'action de Jupiter de 1602 à 1682 a dû retarder la révolution de 1682 à 1759 de $387^{j}, 99$, & que l'action de Jupiter, pendant la période de 1682 à 1759, a dû accélérer cette révolution de $301^{j}, 22$ ; d'où il s'enſuit qu'elle a dû retarder en total la révolution de $86^{j}, 77$ ; or la révolution de 1607 à 1682 a dû être accélérée de $420^{j}, 05$ par l'action de Jupiter durant cette révolution ; donc la différence des deux révolutions de 1607 & 1682 eſt de $506^{j}, 82$, dont la premiere a dû être plus courte que la ſeconde. D'après les obſervations, elle a été plus courte de 586 jours ; donc la différence ou l'erreur, eſt de $81^{j}$ à peu près en ayant égard à la ſeule action de Jupiter. Maintenant, en ayant égard à la ſeule action de Saturne, on trouvera que l'action de cette planete, pendant la ſeconde révolution, a dû retarder la troiſiéme de $102^{j}, 59$ ; que l'action de cette même planete, pendant la troiſiéme révolution, a dû l'accélérer de $9^{j}, 39$ ; ainſi la troiſiéme révolution a été retardée de $93^{j}, 20$ par l'action ſeule de Saturne. Or cette action, pendant la ſeconde révolution, l'a accélérée de $8^{j}, 18'$ ; donc l'action de Saturne a dû rendre la troiſiéme période plus longue que la ſeconde de $101^{j}, 38'$ ; donc les deux actions enſemble

ont dû retarder la troiſiéme période de $506^{l}$, 82 + $101^{l}$, 39 = 608, 21, ce qui ſe rapproche beaucoup plus de $586^{l}$, qu'en ayant égard à la ſeule action de Jupiter.

8. Si on ſuppoſe dans la comparaiſon de la premiere & de la ſeconde période, que $\alpha$ ſoit la quantité dont on ſe ſoit trompé dans l'évaluation de l'altération cauſée par Jupiter, & $\zeta$ celle dont on ſe ſoit trompé dans la valeur de l'altération cauſée par Saturne, on aura $6 + \alpha + 17 + \zeta = 0$; donc l'erreur $\zeta = -6 - \alpha - 17$; donc l'erreur commiſe dans le calcul de l'action de Saturne ſera $>$ ou $< 23^{l}$, ſelon que $\alpha$ ſera poſitif ou négatif, c'eſt-à-dire, ſelon qu'on aura trouvé trop d'accélération ou trop de retardement par l'action de Jupiter.

9. Au reſte, quelque eſtimable que ſoit le travail de M. Clairaut, & quoique les erreurs qui ont pu ſe gliſſer dans ſon calcul doivent être imputées en grande partie à la nature du problême, cependant il en eſt auſſi une partie qu'on pourroit rejetter ſur l'imperfection de ſa méthode à certains égards. C'eſt de quoi on pourra plus aiſément juger en comparant la méthode de ce ſavant Géometre avec celle que j'ai donnée pour calculer les perturbations des cometes, & dans laquelle je crois avoir évité pluſieurs inconvéniens de la méthode de M. Clairaut. Ces inconvéniens, & les avantages de ma méthode, ſont expoſés dans le ſecond Volume de ces *Opuſcules*, pag. 208 & ſuivantes. La ſource principale, ſelon moi, des erreurs qui peuvent s'être gliſſées dans les cal-

culs de M. Clairaut, eſt celle que j'ai marquée pag. 209 de l'Ouvrage cité, n°. 5. Elle conſiſte en ce que M. Clairaut eſt obligé de fixer, d'une maniere vague & aſſez arbitraire, le temps où la comete paſſe à ſon périhélie à la fin de la ſeconde révolution, pour trouver la poſition de la planete perturbatrice; ſur quoi je renvoye à l'endroit cité.

10. Il n'eſt pas impoſſible de comparer entr'elles, par une ſorte d'eſtimation, les erreurs $\alpha$, $\zeta$, commiſes dans le calcul pour Jupiter, & dans le calcul pour Saturne. Car, 1°. ces erreurs, toutes choſes égales, doivent être en raiſon des maſſes, c'eſt-à-dire à peu près en raiſon de 3 à 1; 2°. elles doivent être à peu près en raiſon inverſe des quarrés des diſtances de Jupiter & de Saturne au ſoleil; 3°. elles dépendent de l'erreur qu'on peut commettre dans la poſition de la planete perturbatrice par rapport à la comete; & cette erreur, toutes choſes égales, eſt d'autant plus grande, que la planete parcourt un plus grand angle dans un temps donné, c'eſt-à-dire, que le temps de la révolution de la planete eſt plus court. C'eſt pourquoi, nommant $M$ la maſſe de la planete perturbatrice, $T$ ſa période, & $D$ ſa diſtance au ſoleil, l'erreur peut être ſuppoſée par eſtimation, proportionnelle à $\frac{M}{D^2 T}$; or $T$ eſt comme $D^{\frac{3}{2}}$; & $D$ comme $T^{\frac{2}{3}}$; donc l'erreur peut être eſtimée proportionnelle à $\frac{M}{D^{\frac{7}{2}}}$ ou $\frac{M}{T^{\frac{7}{3}}}$; par conſéquent le rapport

$\frac{\alpha}{\zeta}$ peut être estimé égal à environ $\frac{3}{12^{\frac{7}{3}}} \times 30^{\frac{7}{3}} =$ $3(1+\frac{1}{2})^{\frac{7}{3}}$, c'est-à-dire, plus de 18; donc on peut supposer $\zeta = \pm \frac{\alpha}{18k}$, $k$ étant $> 1$. Donc, à cause de $6+\alpha+17+\zeta = 0$ (art. 8), on aura $6+\alpha+17 \pm \frac{\alpha}{18k} = 0$, & par conséquent $\alpha =$ à peu près $-24$ ou $-22$.

11. On doit sentir au reste, que cette maniere d'estimer le rapport des erreurs $\alpha$ & $\zeta$, n'est qu'une approximation assez vague; mais c'est la seule dont la question paroisse susceptible; & on ne sauroit au moins douter qu'en général le rapport de $\alpha$ à $\zeta$ ne dépende de ces trois causes, la masse des planetes, leur distance au soleil & leur période; les deux dernieres en raison inverse, la premiere en raison directe. On doit même remarquer, que des trois rapports qui entrent dans celui de $\alpha$ à $\zeta$, le rapport direct des masses est celui qui y influe le plus constamment & le plus uniformément, par la raison que la masse de la planete perturbatrice est un facteur constant dans la quantité qui marque l'altération : d'où l'on voit, que tout le reste d'ailleurs égal, $\alpha$ doit être en général au moins trois fois aussi grand que $\zeta$.

*Fin du quarante-deuxiéme Mémoire.*

# XLIII^ME MÉMOIRE.

*Des loix de la réfraction de la lumiere à des ſurfaces très-courbes, dans l'hypothéſe de l'attraction Newtonienne.*

1. LE Mémoire qu'on va lire ſera un Supplément à ce que j'ai déja dit dans le troiſiéme Volume de mes *Opuſcules*, chap. VIII, §. VI, art. III, pag. 397 & ſuiv. ſur les loix de la réfraction dans l'hypothéſe Newtonienne, quand la ſurface réfringente eſt très-courbe.

Je ferai voir, 1°. que dans l'hypothéſe Newtonienne pour expliquer la réfraction, le rapport des ſinus eſt très-différent, toutes choſes d'ailleurs égales, lorſque la ſurface réfringente a beaucoup de courbure, & lorſqu'elle a une courbure médiocre, ou lorſqu'elle eſt plane.
2°. Que la propoſition ſuppoſée (art. 16 du même Vol. III, pag. 8) n'eſt point vraie dans les ſurfaces très-courbes.
3°. Qu'un rayon qui tombe ſur le ſommet d'une lentille plane concave, & d'une très-grande courbure, ne ſortira point de cette lentille dans une poſition parallèle

à ſa poſition primitive, comme il paroît qu'il le devroit, ſuivant la théorie ordinaire de la réfraction.

4°. J'appliquerai le calcul réſultant de l'attraction Newtonienne, à une lentille totalement ſphérique, & d'un très-petit rayon ; & je ferai voir combien la réfraction dans cette lentille doit être différente de ce que donne la théorie ordinaire.

5°. Je ferai obſerver quelles doivent être dans cette même hypothéſe les irrégularités de la réfraction dans les angles des priſmes & le tranchant des lentilles.

6°. Je ferai voir auſſi que la propoſition ſuppoſée, art. 16, pag. 8 du III^e^ Vol. pourroit n'avoir pas lieu, même pour des ſurfaces réfringentes planes ou de courbure médiocre, dans des hypothéſes plauſibles ſur les loix de la réfraction.

7°. Enfin (ce qui n'a pas un rapport immédiat aux autres objets de ce Mémoire) je prouverai la propoſition ſuppoſée dans l'art. 879 de ce même III^e^ Vol. des *Opuſcules*.

## §. I.

2. Conſervant donc les noms de l'art. 969 de cet Ouvrage, ſoit $CG = a$ (*Fig.* 38) ; l'attraction du corpuſcule $C$ ſeroit (tout le reſte égal) proportionnelle à $FGB = \xi$, ſi la ſurface réfringente $FB$ étoit plane ; mais à cauſe de la courbure $fAb$, cette attraction ſera proportionnelle à $FGB - BAb - FAf = 2(AGB - BAb) = X$ ; & quand le point $C$ ſera parvenu en-deſſous (*Fig.* 39) à une diſtance $= CA$, $X$ ſera $= 2(GAB + BAb')$,

& $\xi$ reſtera le même, c'eſt-à-dire $= 2\,(GAB)$; or $BAb'$ eſt $> Bab$ par l'inſpection de la figure, excepté quand $C$ tombe en $A$, où $BAb' = Bab$. Donc $2(GAB + BAb') + 2(GAB - BAb) > 2\,GAB + 2\,GAB$, c'eſt-à-dire la ſomme des deux $\xi$, égaux, & pris à égale diſtance de $A$, eſt $<$ que la ſomme des deux $X$, inégaux, pris à la même diſtance; donc $\int X\,dx > \int \xi\,dx$.

3. Donc le rapport des ſinus $\left(1 - \frac{1}{m}\right) \times \sqrt{\left(1 + \frac{2\int X\,dx}{gg}\right)}$, dans une ſurface réfringente très-courbe ($m$ étant le rapport du rayon de la ſurface à celui de la ſphere d'activité) ſera différent du rapport des mêmes ſinus $\sqrt{\left(1 + \frac{2\int \xi\,dx}{gg}\right)}$ dans une ſurface plane réfringente; le milieu étant d'ailleurs de la même denſité dans les deux cas, & la vîteſſe $g$ du rayon incident étant la même.

4. Comme le corpuſcule commence à décrire une courbe dès qu'il eſt parvenu à la diſtance $a$ de la ſurface, le rapport des ſinus eſt exactement celui de $\frac{1}{g(ma+a)}$ à $\frac{1}{(ma-a)\sqrt{(gg+2\int X\,dx)}}$, $ma$ étant le rayon de la ſurface; & la démonſtration ſubſiſte.

## §. II.

5. Soit $AK$ (*Fig.* 40) la courbe ou trajectoire décrite par le corpuſcule lumineux, l'angle $KOA = z$, $KO = u = \frac{1}{x}$, $h$ le ſinus de l'angle d'incidence, qu'on ſup-

pose être au point $A$, $Q$ la force qui tend vers $O$; on aura, par la théorie connue des trajectoires, l'équation $dz = -\frac{du}{uu\sqrt{\left(\frac{1}{h^2} + \frac{2\int Q\,du}{ggh^2} - \frac{1}{u^2}\right)}}$; & cette équation donne, lorsque $h$ est très-petit, $dz = -\frac{ghdu}{uu\sqrt{(gg+2\int X dx)}} = \frac{ghdx}{\sqrt{(gg+2\int X dx)}}$.

6. D'où l'on voit, 1°. que $u$ étant donné, l'angle $z$ ou $AOK$ est $= A.h$, $A$ étant une constante qui dépend de l'intégration de $\frac{dx}{\sqrt{(gg+2\int X dx)}}$; or l'angle de réfraction $VKO$, suivant la théorie (art. 4 précédent), est $B.h$, $B$ étant $= \frac{(m+1)g}{(m-1)\sqrt{(gg+2\int X dx)}}$, & les angles étant supposés très-petits; donc l'angle de $KV$ avec $AO$, c'est-à-dire $VKO - z$, est $= Bh - Ah$.

7. Or en prenant les angles & les sinus comme on a coutume de le faire dans la théorie des lentilles (c'est-à-dire rapportant les angles d'incidence & de réfraction à la surface même réfringente) on voit aisément, 1°. que le véritable angle d'incidence $LAO$, au lieu d'être $h$, est $\frac{hm\sqrt{(gg+2\int Y' dx)}}{(m+1)g}$, $\int Y' dx$ étant la valeur de $\int X dx$, lorsque le corpuscule lumineux touche la surface réfringente; car le véritable angle d'incidence est celui du rayon lorsqu'il commence à se plier, c'est-à-dire, lorsqu'il est arrivé à la distance $\alpha$ de la surface réfringente; or si on nomme $h'$ cet angle $LAO$, l'angle

d'incidence à la ſurface ſera $\frac{h'(m+1)g}{m\sqrt{(gg+2\int Y'dx)}}=h$; donc $h'=\frac{hm\sqrt{(gg+2\int Y'dx)}}{(m+1)g}$; 2°. on voit auſſi que l'angle de réfraction $u\,AO=\frac{LAO\times g(m+1)}{(m-1)\sqrt{(gg+2\int Xdx)}}=\frac{hm\sqrt{(gg+2\int Y'dx)}}{(m-1)\sqrt{(gg+2\int Xdx)}}=\frac{Bhm\sqrt{(gg+2\int Y'dx)}}{(m+1)g}$. Donc cet angle eſt fort différent de $(B-A)h$.

8. Si un corpuſcule traverſe ſucceſſivement, avec très-peu d'obliquité, differentes ſurfaces, dont les rayons ſoient $m\alpha$, $m'\alpha$, $m''\alpha$, le rayon $\alpha$ de la ſphere d'activité étant ſuppoſé par-tout le même pour plus de ſimplicité, on aura (en faiſant même abſtraction des angles $z$) le ſinus ou l'angle de réfraction $=h\times\frac{(m+1)g}{(m-1).\sqrt{(gg+2\int Xdx)}}\times\frac{(m'+1).\sqrt{(gg+2\int Xdx)}}{(m'-1).\sqrt{(gg+2\int X'dx)}}=\frac{h(m+1).(m'+1)g}{(m-1).(m'-1).\sqrt{(gg+2\int X'dx)}}$; Or cette quantité n'eſt pas la même que $\frac{hg}{\sqrt{(gg+2\int X'dx)}}$, qui repréſenteroit l'angle de réfraction, ſi les ſurfaces étoient planes ou d'une courbure finie; & cette derniere valeur $\frac{hg}{\sqrt{(gg+2\int X'dx)}}$ s'accorderoit en ce cas avec la loi de réfraction ſuppoſée, art. 16 du troiſiéme Volume de nos *Opuſcules*. Donc, quand on ſuppoſeroit que cette loi eût lieu pour les ſurfaces planes ou d'une courbure finie, il ne s'enſuivroit pas qu'elle eût lieu pour les ſurfaces très-courbes.

9. Si le corpuſcule paſſoit immédiatement du vuide dans

dans le milieu qui exerce la force $X'$ ($m'\alpha$ étant supposé le rayon), on auroit (même en faisant toujours abstraction de l'angle $\zeta$) l'angle de réfraction égal à $\frac{h(m'+1)g}{(m'-1).\sqrt{(gg+2\int X'dx)}}$, quantité qui n'est pas non plus la même que $\frac{h(m+1).(m'+1)g}{(m-1).(m'-1).\sqrt{(gg+2\int X'dx)}}$. D'où l'on voit que la loi supposée art. 16 de l'Ouvrage cité, n'a pas lieu non plus dans les surfaces très-courbes, étant envisagée sous un autre point de vûe; c'est-à-dire, que la réfraction à travers plusieurs milieux contigus, n'est pas la même que si le corps passoit immédiatement du premier milieu dans le dernier.

## §. III.

10. Si la lentille $MAN$ (*Fig.* 41) est terminée par une surface plane $DB$, à une épaisseur assez grande, pour que le rayon réfracté puisse arriver à l'extrémité $K$ de la sphere d'activité, de maniere que la distance de ce point $K$ à la surface plane, ne soit pas $< \alpha$; alors la vîtesse $gg + 2\int Xdx$ deviendra, après la seconde réfraction en $P$, $gg+2\int Xdx-2\int\xi dx > gg$, & le rapport du sinus de réfraction $QPZ$, au sinus d'incidence sur la surface plane $DPB$, sera $\frac{\sqrt{(gg+2\int Xdx)}}{\sqrt{(gg+2\int Xdx-2\int\xi dx)}}$; donc le rayon réfracté $PQ$ ne sera pas parallèle au rayon incident $AR$; car on a (négligeant d'abord l'angle $\zeta$, art. 5) sin. $uAO$ = sin. $K'AR \times \frac{(m+1)g}{(m-1).\sqrt{(gg+2\int Xdx)}}$; sin.

$QPZ = \text{sin. } uAO \times \frac{\sqrt{(gg+2\int X dx)}}{\sqrt{(gg+2\int X dx-2\int \xi dx)}}$ ; donc

$\text{sin. } QPZ = \text{sin. } K'AR \times \frac{(m+1)g}{(m-1)\sqrt{(gg+2\int X dx-2\int \xi dx)}}$ ;

Donc $QPZ$ ne ſera pas $= K'AR$. Donc le rayon réfracté $PQ$ ne ſortira pas parallèlement à $AR$, comme il ſortiroit, ſi la ſurface $MAN$ étoit plane ainſi que la ſurface $PB$.

11. Il n'y auroit qu'un ſeul cas pour le paralléliſme des rayons $PQ$ & $AR$; ce ſeroit celui où l'on auroit $(m+1)\times g = (m-1)\sqrt{(gg+2\int X dx-2\int \xi dx)}$. Mais alors, il eſt clair que le ſinus du premier angle de réfraction $uAO$ ne ſeroit pas le même que ſi la ſurface $MAN$ étoit plane; car puiſque (*hyp.*) $\text{sin. } K'AR = \text{sin. } QPZ = \text{sin. } uAO \times \frac{\sqrt{(gg+2\int X dx)}}{\sqrt{(gg+2\int X dx-2\int \xi dx)}}$, donc $\text{sin. } uAO$: $\text{sin. } K'AR = \frac{\sqrt{(gg+2\int X dx-2\int \xi dx)}}{\sqrt{(gg+2\int X dx)}} = (hyp)$ $\frac{(m+1)g}{(m-1)\sqrt{(gg+2\int X dx)}}$; or ſi $MAN$ étoit plane, $\text{sin. } uAO$: $\text{sin. } K'AR$ ſeroit $= \frac{g}{\sqrt{(gg+2\int \xi dx)}}$, quantité qui n'eſt pas $= \frac{(m+1)g}{(m-1)\sqrt{(gg+2\int X dx)}}$; car il faudroit pour cela qu'on eût $\frac{m+1}{m-1} = \frac{\sqrt{(gg+2\int X dx)}}{\sqrt{(gg+2\int \xi dx)}}$; or $\frac{m+1}{m-1}$ $= (hyp.)$ $\frac{\sqrt{(gg+2\int X dx-2\int \xi dx)}}{g}$, & il eſt aiſé de voir que $\frac{\sqrt{(gg+2\int X dx)}}{\sqrt{(gg+2\int \xi dx)}}$ n'eſt pas $= \frac{\sqrt{(gg+2\int X dx-2\int \xi dx)}}{g}$; puiſqu'il faudroit qu'on eût $g^4 + 2gg\int X dx = g -$

$4(\int \xi dx)^2 + 2gg\int X dx + 4(\int \xi dx)(\int X dx)$, ou $\int X dx = \int \xi dx$; ce qui eſt contraire à l'art. 2 ci-deſſus.

12. Donc ſi le rapport des ſinus eſt tel qu'il doit être d'après la théorie, dans la lentille courbe convexe plane dont il s'agit, & dans un verre plan, le rayon réfracté $PQ$ ne ſortira point parallèle au rayon incident $AR$; & s'il ſort parallèle à $AR$, le rayon réfracté $uA$, à la ſurface courbe $MAN$, ſera encore différent de ce qu'il ſeroit ſi la ſurface $MAN$ étoit plane.

13. On remarquera encore, pour plus d'exactitude, que ſin. $QPZ$ = ſin. $(PKO - \zeta) \times \frac{\sqrt{(gg + 2\int X dx)}}{\sqrt{(gg + 2\int X dx - 2\int \xi dx)}}$, $\zeta$ étant l'angle que fait $KO$ avec $AO$; & qu'ainſi, dans la démonſtration de l'art. 10 précédent, il faut, pour l'exactitude rigoureuſe, mettre $PKO - \zeta$ au lieu de $uAO$: ce qui rendra encore plus général, & moins ſuſceptible d'exception, le théorême démontré dans cet article 10.

## §. IV.

14. Soit une très-petite lentille ſphérique $STV$ (*Fig.* 42), $B$ le point où le rayon commence à être courbé, $BQ = a$, le rayon $CQ = ma$; le corpuſcule lumineux décrit d'abord une petite courbe $BG$ juſqu'à ce que $CG = ma - a$, enſuite une droite $GD$, qui faſſe avec $CD$ l'angle $CGD$; cela poſé, on fera l'angle $CDG = CGD$, & décrivant une courbe $DE$ pareille à $BG$, on fera $CEO = CBA$, ou $MEO = ABb$; or on a $AC(\delta) : CB(ma + a) :: \text{ſin. } ABb : \text{ſin. } BAC = \text{ſin.}$

$(ABb - BCA)$; donc $\delta = \frac{\alpha(m+1)\,\text{sin.}\,ABb}{\text{sin.}(ABb - BCA)}$; de même, après la sortie de la lentille, $CO$ que j'appelle $\delta'$, sera $= \frac{\alpha(m+1)\,\text{sin.}\,MEO}{\text{sin.}(MEO - ECO)} = \frac{\alpha(m+1)\,\text{sin.}\,ABb}{\text{sin.}(ABb - ECO)}$. Or soit $BCG = \epsilon$, $DGC = \gamma = GDC$, on aura $GCD = 180° - 2\gamma$; $BCE = 2\epsilon + 180° - 2\gamma$; $ECO = 180° - BCE - ACB = 2\gamma - 2\epsilon - ACB$; donc $\delta' = \frac{\alpha(m+1)\,\text{sin.}\,ABb}{\text{sin.}(ABb + BCA - 2\gamma + 2\epsilon)}$.

15. Or il faut remarquer, que par la théorie Newtonienne de la réfraction, sin. $ABb$ = sin. $\gamma \times \frac{(m\alpha - \alpha)\sqrt{(gg + 2\int X dx)}}{g(m\alpha + \alpha)}$. Il faut remarquer de plus, que sin. $ABb$ ne sera pas le même si on n'a point d'égard à la petite courbe $GB$; mais qu'en prolongeant le rayon $AB$ jusqu'à la surface, on trouvera sin. $ABb$ un peu plus grand; dans ce cas, $BCA$ sera augmenté de la même quantité $n$ que $ABb$, & par conséquent $ABb - BCA$ demeurera le même qu'auparavant, & $m\alpha + \alpha$ sera réduit à $m\alpha$; donc on aura, pour plus de simplicité,

$$\delta = \frac{\alpha m\,\text{sin.}(ABb + n)}{\text{sin.}(ABb - BCA)};$$

& $\delta' = \frac{\alpha m\,\text{sin.}(ABb + n)}{\text{sin.}(ABb + BCA - 2\gamma')}$, $\epsilon$ étant ici supposé $= 0$, & $\gamma'$ étant l'angle de réfraction, tel qu'on le suppose ordinairement, c'est-à-dire tel, que le corpuscule ne décrive point de ligne courbe.

16. Cela posé, on voit d'abord que $m$ sin. $(ABb+n) = (m+1)$ sin. $ABb$. On voit ensuite, que si $2\gamma - 2\epsilon$ n'est pas égal à $2\gamma'$, les distances $N'$, ou les valeurs de $CO$, trouvées dans les deux cas, ne seront pas égales à beaucoup près; or sin. $\gamma' = \text{sin.}(ABb+n) \times \frac{g}{\sqrt{(gg+2\int\xi dx)}} = \frac{(m+1)\text{ sin. }ABb}{m} \times \frac{g}{\sqrt{(gg+2\int\xi dx)}}$; sin. $\gamma =$ sin. $ABb \times \frac{(m\alpha+\alpha)g}{(m\alpha-\alpha)\sqrt{(gg+2\int Xdx)}}$; donc sin. $\gamma'$ : sin. $\gamma$ :: $(m-1)\sqrt{(gg+2\int Xdx)} : m\sqrt{(gg+2\int\xi dx)}$.

17. On voit donc, 1°. que $\gamma'$ & $\gamma$ ne sont pas égaux; 2°. que s'ils le sont, alors $\gamma - \epsilon$, & $\gamma'$ ne le seront pas. En général on aura sin. $(\gamma - \epsilon) =$ sin. $\gamma$ cos. $\epsilon -$ sin. $\epsilon$ cos. $\gamma$; il faudroit donc, pour que $\gamma'$ fût $= \gamma - \epsilon$, qu'on eût $\frac{\text{sin. }\gamma(m-1)\sqrt{(gg+2\int Xdx)}}{m\sqrt{(gg+2\int\xi dx)}} =$ sin. $\gamma$ cos. $\epsilon -$ sin. $\epsilon$ cos. $\gamma$; or on a sin. $\gamma =$ sin. $ABb \times \frac{(m\alpha+\alpha)}{m\alpha-\alpha} \times \frac{g}{\sqrt{(gg+2\int Xdx)}}$; & $\epsilon = \int \frac{-dx \times (m\alpha+\alpha)}{xx\sqrt{\left(\frac{1}{hh} - \frac{2\int Xdx}{gg} - \frac{\alpha^2(m+1)^2}{x^2}\right)}}$; d'où il est aisé de voir que la valeur de $\epsilon$ dépend d'une double quadrature, tandis que celle de $\gamma$ ne dépend que d'une quadrature simple. Ce ne pourroit donc être que par hazard, & dans certains cas particuliers, qu'on auroit $\gamma - \epsilon = \gamma'$; puisque cette équalité supposeroit une équation entre deux quantités indépendantes l'une de l'autre.

18. Nous supposons dans les propositions précéden-

tes, que $m$ ſoit $> 1$, & que le rayon ou corpuſcule lumineux pénétre aſſez profondément, pour que la matiere qui compoſe la lentille ſphérique puiſſe exercer ſur ce corpuſcule lumineux toute ſon activité. Or il faut pour cela qu'il puiſſe parvenir, ſans ſortir de la lentille, à une diſtance au-deſſous de la ſurface, qui ſoit au moins $= \alpha$, & que la lentille par conſéquent ſoit d'une épaiſſeur convenable pour cet effet. Si la lentille avoit trop peu d'épaiſſeur, les formules précédentes ſeroient plus compliquées, & les propoſitions démontrées ci-deſſus n'en ſeroient que plus vraies.

## §. V.

19. Lorſqu'un rayon tombe très-près de l'angle d'un priſme fort aigu, alors la force $X$ peut ne pas agir perpendiculairement à la ſurface; car ſoit $C$ (*Fig.* 43) le corpuſcule lumineux, & $CB$ le rayon de la ſphere d'activité, il y aura une attraction perpendiculaire à $CB$, qui vient de la partie manquante $FBO$, ou plutôt (*Fig.* 44) de la partie $FLK$, en menant la corde $OBK$ perpendiculaire au rayon $CB$; car la partie $KLO$ agit ſuivant $CB$, & la partie $FLK$ agit à-la-fois ſuivant $CB$, & perpendiculairement à $CB$. Donc ſi un rayon de lumiere tombe vers l'extrémité d'un priſme fort aigu, alors ſa viteſſe parallèle à la ſurface du priſme, eſt, ou peut être altérée, & la raiſon conſtante des ſinus n'a plus lieu dans le ſyſtême de l'attraction Newtonienne. La même remarque aura lieu pour les rayons qui tombent ſur le

tranchant des lentilles, au moins quand ce tranchant formera un angle très-aigu.

## §. VI.

20. Soient trois milieux $A$, $B$, $C$, dont les denſités ſoient $\Delta$, $\Delta'$, $\Delta''$, & $g$ la vîteſſe du rayon, en entrant du milieu $A$ dans le milieu $B$; ſi la vîteſſe du rayon dans le milieu $B$ eſt $V(gg + A(\phi\Delta' - \phi\Delta))$, le rapport du ſinus d'incidence au ſinus de réfraction, ſera égal à $\frac{V(gg+A(\phi\Delta'-\phi\Delta)}{g}$, en paſſant du milieu $A$ dans le milieu $B$; paſſant enſuite du milieu $B$ dans le milieu $C$, le rapport des ſinus ſera $\frac{V(gg+A(\phi\Delta'-\phi\Delta)+A(\phi\Delta''-\phi\Delta'))}{V(gg+A(\phi\Delta'-\phi\Delta))}$ $= \frac{V(gg+A(\phi\Delta''-\phi\Delta))}{V(gg+A(\phi\Delta'-\phi\Delta))}$; alors la réfraction ſera la même que ſi le rayon paſſoit directement du milieu $A$ dans le milieu $C$, puiſqu'en ce dernier cas, le rapport des ſinus ſeroit $\frac{V(gg+A(\phi\Delta''-\phi\Delta))}{g} = \frac{V(gg+A(\phi\Delta'-\phi\Delta))}{g}$ $\times \frac{V(gg+A(\phi\Delta''-\phi\Delta))}{V(gg+A(\phi\Delta'-\phi\Delta))}$.

21. En général, ſi $g$ eſt la vîteſſe d'un corpuſcule de lumiere, en entrant de l'air dans le milieu $A$, que $V$ ſoit la vîteſſe après la réfraction, & que le rapport des ſinus ſoit $P = \frac{\phi V}{\phi g}$; ſoit $V'$ la vîteſſe du rayon, en paſſant du milieu $A$ dans un autre milieu $B$, on aura $P' = \frac{\phi V'}{\phi V}$; donc $\frac{P'}{P} = \frac{\phi V'}{\phi g}$, c'eſt-à-dire, que le rap-

port des ſinus ſera le même, que ſi le rayon paſſoit immédiatement de l'air dans le milieu $B$, pourvu que la vîteſſe $V'$ ſoit la même dans les deux cas, ce qui arrivera ſi $\varphi V' = \varphi g + \varphi \Delta' - \varphi \Delta$. Telle eſt la loi du rapport qu'il doit y avoir entre les vîteſſes & les ſinus, pour que le rapport des ſinus ſoit le même en paſſant immédiatement ou médiatement d'un milieu dans un autre. On remarquera, que dans toutes ces hypothèſes & dans les ſuivantes, nous ſuppoſons que la vîteſſe parallèle à la ſurface du milieu demeure conſtante, & qu'il n'y a que la ſeule vîteſſe perpendiculaire qui ſoit altérée.

22. Mais ſi la vîteſſe dans le milieu $B$ eſt, par exemple, $g[1 + \varphi(\Delta' - \Delta)]$, ou en général $g[1 + (\Delta' - \Delta)(\varphi(\Delta', \Delta)]$, la vîteſſe dans le troiſiéme milieu $C$ ſera $g[1 + (\Delta' - \Delta)(\varphi\Delta', \Delta)] \times [1 + (\Delta'' - \Delta')\varphi(\Delta'', \Delta')]$; donc le rapport des ſinus, en paſſant du milieu $A$ dans le milieu $B$, ſera $1 + (\Delta' - \Delta)\varphi(\Delta', \Delta)$, & en paſſant du milieu $B$ dans le milieu $C$, $1 + (\Delta'' - \Delta') \times \varphi(\Delta'', \Delta')$; donc en paſſant du milieu $A$ au milieu $C$, par le milieu $B$, le rapport des ſinus ſera $1 + (\Delta' - \Delta) \times \varphi(\Delta', \Delta)$ multiplié par $1 + (\Delta'' - \Delta')\varphi(\Delta'', \Delta')$; au lieu que ſi le rayon paſſe immédiatement du premier au troiſiéme milieu, le rapport des ſinus ſera $1 + (\Delta' - \Delta)\varphi(\Delta'', \Delta)$ qui n'eſt pas le même que le précédent.

23. Il eſt aiſé d'imaginer d'autres hypothèſes d'après leſquelles le rapport des ſinus ne ſeroit pas le même dans les deux cas; par exemple, ſi la vîteſſe dans le milieu $B$ étoit en général une fonction $\Gamma$, de $g$ & de $\Delta'$, $\Delta$, qui devînt

vînt ſimplement égale à $g$ dès que $\Delta'$ ſeroit $= \Delta$, il eſt aiſé de voir, qu'excepté dans la ſuppoſition de l'art. 20, le rapport des ſinus ne ſera pas le même pour les deux cas dont il s'agit. On peut donc faire une infinité d'hypothèſes dans leſquelles les ſinus ſeront en raiſon conſtante, ſans que la réfraction, en paſſant par pluſieurs milieux ſucceſſifs $A, B, C$, ſoit la même que ſi la lumiere paſſoit immédiatement du milieu $A$ dans le dernier milieu $C$.

24. Cependant, ſi le rapport des ſinus eſt en général $1 + (\Delta' - \Delta)\varphi(\Delta', \Delta)$, l'identité de réfraction aura lieu à très-peu près, pourvu que la différence de $\Delta, \Delta', \Delta''$ ſoit fort petite ; car en paſſant à travers les trois milieux ſucceſſifs, le rapport des ſinus ſera $[1 + (\Delta' - \Delta)\varphi(\Delta', \Delta)] \times [1 + (\Delta'' - \Delta')\varphi(\Delta'', \Delta')] =$ (à cauſe de $\Delta'$ & $\Delta''$ peu différens de $\Delta$) $1 + (\Delta'' - \Delta)\varphi\Delta$ à très-peu près ; or ce rapport ſera à très-peu près le même quand le paſſage ſe fera immédiatement du premier milieu dans le troiſiéme ; l'erreur ne ſera que d'un infiniment petit du ſecond ordre, en regardant les différences de $\Delta'', \Delta', \Delta$, comme infiniment petites du premier. La même choſe aura lieu dans un grand nombre d'autres hypothèſes, pourvu que $\Delta, \Delta', \Delta''$ different très-peu l'un de l'autre.

25. Voici de quelle maniere on prouve ordinairement que la réfraction de la lumiere, en paſſant immédiatement du milieu $A$ dans le milieu $C$, ſera la même ( les ſurfaces étant ſuppoſées planes & parallèles ) que ſi le

paſſage ſe faiſoit médiatement par le milieu *B*. Soit, dit-on, 1 : *M* le rapport du ſinus d'incidence au ſinus de réfraction, en paſſant du milieu *A* dans le milieu *B*; *M* : *m* le rapport des mêmes ſinus, en paſſant du milieu *B* dans le milieu *C*, on aura ces deux proportions:
1°. Le ſinus d'incidence eſt (*hyp.*) au ſinus de réfraction dans le milieu *B*, comme 1 eſt à *M*;
2°. Le ſinus de réfraction dans le milieu *B* (qui devient le ſinus d'incidence dans le milieu *C*) eſt encore (*hyp.*) au ſinus de réfraction dans ce milieu *C*, comme *M* eſt à *m*;

Donc, *en multipliant par ordre*, le ſinus d'incidence dans le milieu *A* eſt au ſinus de réfraction dans le milieu *C*, comme 1 eſt à *m*; donc 1 : *m* ſera le rapport des ſinus, en paſſant immédiatement du milieu *A* dans le milieu *C*.

26. Il eſt aiſé de voir en quoi conſiſte le paralogiſme de cette prétendue démonſtration. On y ſuppoſe implicitement ce qui eſt en queſtion, ſavoir que le ſinus de réfraction dans le milieu *C*, après avoir traverſé le milieu *B*, ſera le même que ſi le rayon paſſoit immédiatement du milieu *A* dans le milieu *C*.

27. Il eſt aiſé de voir encore, que dans les hypothèſes des art. 22 & 23, un rayon qui traverſe un milieu, & qui en ſort, pourra ne pas ſortir parallèlement à ſa premiere ſituation; car le rapport des ſinus étant $1 + (\Delta' - \Delta) \times \varphi(\Delta', \Delta)$ en paſſant de l'air dans ce milieu, il ſera en repaſſant de ce milieu dans l'air $1 + (\Delta - \Delta')\varphi(\Delta, \Delta')$, & par conſéquent le ſinus d'incidence ſera au ſecond ſinus de réfraction, comme $[1 + (\Delta' - \Delta)\varphi(\Delta,$

$\Delta')] \times [1 + (\Delta - \Delta')\varphi(\Delta', \Delta)]$ est à l'unité. Donc, &c. Il en sera de même dans une infinité d'autres cas.

## §. VII.

28. Passons maintenant à d'autres considérations. Soit, comme dans le troisième Volume de nos *Opuscules*, $P$ le rapport de réfraction pour les rayons d'une certaine couleur dans un milieu quelconque, $P'$ le rapport de réfraction pour les rayons de la même couleur dans un autre milieu, $P + dP$ & $P' + dP'$ les rapports de réfraction pour d'autres rayons d'une autre couleur dans les deux mêmes milieux. Pour que $P - 1$ soit tel dans cette hypothèse, que $\frac{dP}{P-1}$ soit en rapport constant avec $\frac{dP'}{P'-1}$; il faut que le logarithme de $P - 1$ soit égal à une quantité telle, que si on la différentie en regardant seulement $g$ comme variable, & qu'on divise ensuite par $dg$ & par $P - 1$, la quantité $g$ ne se trouve plus dans le résultat; donc log. $(P - 1)$ doit être $= Ag + K$, $A$ & $K$ étant des constantes qui ne renferment point $g$, & qui ne dépendent que de la densité du milieu ou de quelque autre quantité ou force indépendante de $g$; donc si $P - 1$ est tel que l'on ait, par exemple, $P = \frac{Bc^{Ag+K} + \psi\Delta' - \psi\Delta}{Bc^{Ag+K}}$, $B$, $A$, $K$ étant des constantes quelconques, on aura $\frac{dP}{P-1} = -Adg \times (\psi\Delta' - \psi\Delta)$;

paſſage ſe faiſoit médiatement par le [illegible] $B \cdot c^{A.V+K} =$ dit-on, 1 : $M$ le rapport du ſinus d'[illegible] de réfraction, en paſſant du mil[illegible] $B$; $M : m$ le rapport des mêm[illegible], $M$ & $m$ étant fort lieu $B$ dans le milieu $C$, on [illegible] éſentant le rapport de 1°. Le ſinus d'incidence [illegible], deux milieux différens, dans le milieu $B$, cor[illegible]ſraction d'un autre rayon de 2°. Le ſinus de réfr[illegible]s deux mêmes milieux, on aura le ſinus d'incider

au ſinus de réf[illegible]. Car ſoit $m' = 1 + C$, $m = 1 + C + dC$,

Donc,

dans le [illegible] $+ B$, $M = 1 + B + dB$, on aura (*hyp.*)

$C$, c[illegible] $= \frac{B+dB}{B} = a$; $\frac{M}{m} - 1 = \frac{1+B+dB}{1+C+dC}$

e[illegible]

$$\frac{1}{} = \frac{-C+B-dC+dB}{1+C+dC} = (-C+B+dB-dC) \times \frac{1}{(1+C)\left(1+\frac{dC}{1+C}\right)} = \frac{B-C+dB-dC}{1+C} -$$

$\frac{(B-C)\,dC}{(1+C)^2}$; $\frac{M'}{m'} - 1 = \frac{1+B}{1+C} - 1 = -\frac{C-B}{1+C}$;

donc $\frac{\frac{M}{m} - 1}{\frac{M'}{m'} - 1}$ eſt $= 1 + \frac{dB-dC}{B-C} - \frac{dC}{1+C}$ ; or

$\frac{dB-dC}{B-C} = \frac{dB}{B} = \frac{dC}{C}$, puiſque $\frac{dC}{C} = \frac{dB}{B}$, à cauſe de $\frac{C+dC}{C} = \frac{B+dB}{B} = a$; donc ſi $\frac{dC}{1+C}$ peut ſe négliger devant $\frac{dC}{C}$, c'eſt-à-dire ſi $C$ eſt fort petit, comme on le ſuppoſe ici, on aura $\frac{\frac{M}{m} - 1}{\frac{M'}{m'} - 1}$ à très-peu

près $= 1 + \frac{dc}{c} = \alpha$. C'eſt auſſi la remarque de M. Klingenſtierna, & qui réſulte de ſa conſtruction (Mém. ad. 1756, pag. 406).

o. En effet, les cordes $HI$, $HG$ (*Fig.* 45) étant ées ſur des arcs ſemblables, puiſque ces arcs me- un même angle $HTG$, ſont entr'elles comme les es cercles; les arcs $gG$, $Ii$ étant auſſi ſembla- puiſqu'ils meſurent un même angle $ITi$, les an- es $GHg$, $IHi$ ſont égaux; les angles $g$ & $G$ ſont auſſi évidemment égaux étant appuyés ſur la même corde; donc les triangles $HIG$, $Hig$ ſont ſemblables; donc $IG$, $ig$ ſont entr'elles comme $HG$ à $Hg$, & $HG$ à $Hg$ comme $HI$ à $Hi$; d'où il eſt aiſé de voir, 1°. que $\frac{IG}{ig}$ eſt toujours conſtant; 2°. que ſi le point $L$ appartenoit à un arc décrit ſur la corde $TH$, on auroit $IG : ig :: HG : Hg :: GL : gl$. Ainſi, pour qu'on ait $LI : LG :: li : lg$, il faut que les points $L$, $G$, $I$ ſoient très-près de $H$: alors la proportion aura lieu à très-peu près; parce qu'alors l'arc $HL$, décrit du centre $T$, coincidera avec l'arc $HL$ du cercle qui auroit pour diametre $HT$.

31. C'eſt pourquoi, ſi on a $\frac{P-1}{P'-1} = \frac{\varpi-1}{\varpi'-1}$, $P$, $P'$, $\varpi$, $\varpi'$ étant très-peu différens de l'unité, on aura $\frac{\frac{P}{\varpi}-1}{\frac{P'}{\varpi'}-1} = \frac{P-1}{P'-1}$. Ainſi la propoſition de M. Klingenſtierna eſt vraie à cet égard. Mais cet Auteur s'eſt

trompé, comme nous l'avons observé art. 879 du troisiéme Volume de nos *Opuscules*, lorsqu'il a confondu le cas où $P$ & $P'$ sont supposés très-peu différens de l'unité, avec le cas où le sinus d'incidence (& par conséquent celui de réfraction) sont fort petits.

32. Il est aisé de voir, par l'art. 28, comment il pourroit se faire que la loi supposée dans l'art. 16 du Tome III de nos *Opuscules* fût observée, & qu'en même-temps $\frac{dP(P'-1)}{(P-1)dP'}$ fut constant. Il est vrai que cette supposition n'a pas lieu dans la nature; mais ce que nous venons de dire suffit pour montrer qu'elle pourroit avoir lieu, sans que le raisonnement de M. Klingenstierna fût bon; c'est-à-dire, qu'il pourroit très-bien arriver, 1°. que les sinus d'incidence & de réfraction fussent en raison constante pour tous les rayons & dans tous les milieux; 2°. que la réfraction fût la même en passant médiatement ou immédiatement d'un milieu dans un autre; 3°. qu'en passant d'un milieu $A$ dans deux milieux $B$, $C$, le rapport $\frac{dP(P'-1)}{dP'(P-1)}$ fût constant, sans que pour cela il en fût de même en passant du milieu $B$ dans le milieu $C$; ou, ce qui revient au même, que $\frac{P'-1}{P-1}$ pourroit être constant dans le passage du milieu $A$ aux milieux $B$ & $C$, sans que la même chose eût lieu dans le passage du milieu $B$ dans le milieu $C$. C'est ce qu'on prouve aisément par ce qui vient d'être démontré plus haut; car on a vû,

(art. 28) que $P - 1 = \frac{\downarrow\Delta' - \downarrow\Delta}{B c^{Ag+K}}$, & par conséquent $P' - 1 = \frac{\downarrow\Delta' - \downarrow\Delta}{B c^{Ag'+K}}$; d'où $\frac{P'-1}{P-1} = \frac{c^{Ag+K}}{c^{Ag'+K}} = c^{A(g-g')}$; quantité qui est la même en passant du milieu $A$ dans le milieu $B$, ou du milieu $A$ dans le milieu $C$; au lieu qu'en passant du milieu $B$ dans le milieu $C$, & quels que soient d'ailleurs les deux milieux $B$, $C$, on a $P = \frac{B c^{Ag+K} + \downarrow\Delta'' - \downarrow\Delta}{B c^{Ag+K} + \downarrow\Delta' - \downarrow\Delta}$; & $P' = \frac{B c^{Ag'+K} + \downarrow\Delta'' - \downarrow\Delta}{B c^{Ag'+K} + \downarrow\Delta' - \downarrow\Delta}$; d'où il est clair que $\frac{P'-1}{P-1}$ n'est ni égal à la valeur déjà trouvée $\frac{c^{Ag+K}}{c^{Ag'+K}} = c^{A(g-g')}$, ni même égal à une quantité constante indépendante de la densité des milieux, puisqu'on a dans cette hypothèse $\frac{P'-1}{P-1} = \frac{B c^{Ag+K} + \downarrow\Delta'' - \downarrow\Delta'}{B c^{Ag'+K} + \downarrow\Delta'' - \downarrow\Delta'}$, qui n'est point $= c^{A(g-g')}$, & qui dépend des densités $\Delta''$ & $\Delta$.

33. Mais si $\Delta''$ & $\Delta$ différoient peu l'un de l'autre, alors on auroit $\frac{P'-1}{P-1}$ = à très-peu près $\frac{B c^{Ag+K}}{B c^{Ag'+K}} \times \left( + \frac{\downarrow\Delta'' - \downarrow\Delta}{B c^{Ag+K}} - \frac{\downarrow\Delta'' - \downarrow\Delta}{B c^{Ag'+K}} \right)$ = à très-peu près $c^{Ag-Ag'}$, parce que si $g$ & $g'$ different très-peu l'un de l'autre, ainsi que $\Delta''$ & $\Delta$, la quantité $(\downarrow\Delta'' - \downarrow\Delta) \times \left( \frac{1}{B c^{Ag-K}} - \frac{1}{B c^{Ag'+K}} \right)$ peut être supposée égale à zero, étant censée infiniment petite du second ordre,

34. Ceci s'accorde avec ce que nous avons déja démontré d'une autre maniere dans l'art. 29, que ſi $m$ & $M$ different peu de l'unité, & qu'on ait $\frac{m'-1}{m-1} = \frac{M'-1}{M-1} = \alpha'$, on aura auſſi $\frac{\frac{M'}{m'}-1}{\frac{M}{m}-1} = \alpha'$ à très-peu près.

35. A l'occaſion de ces nouvelles remarques ſur la prétendue démonſtration de M. Klingenſtierna, je ne puis m'empêcher de témoigner quelque ſurpriſe de ce que cette démonſtration, déja ſuffiſamment réfutée dans le troiſiéme Volume de mes *Opuſcules*, a cependant encore été adoptée depuis dans les *Additions* à la traduction de l'*Optique de Smith* (Avign. 1767, page 425), & qu'on ait adopté de même (pag. 430 de cet Ouvrage) le raiſonnement très-fautif de M. Dollond contre M. Euler, déja pareillement adopté dans les Mémoires de l'Académie de 1757, & pleinement réfuté, ce me ſemble, dès l'année 1764, à la note de la page 366 du Tome III de mes *Opuſcules*.

*Fin du quarante-troiſiéme Mémoire.*

## XLIV^me MÉMOIRE.

# XLIV^ME MÉMOIRE.

*Contenant pluſieurs écrits ſur différens ſujets.*

## §. I.

*Qui contient quelques problêmes ſur les fonctions.*

1. Soit $V+V'$ une fonction rationnelle de $u$, telle que $V$ ne contienne que les puiſſances paires, & $V'$ les impaires ; ſi on met dans cette fonction $-u$ au lieu de $u$, elle deviendra $V-V'$, & la ſomme des deux fonctions ſera $2V$, fonction paire de $u$. Donc ſi on a une fonction paire de $u$, donnée à volonté, que j'appelle $2V$, & qu'on cherche $\varphi u$, telle que $\varphi u+\varphi -u=2V$, il n'y a qu'à prendre $\varphi u=V+V'$, $V'$ étant une fonction impaire de $u$ telle qu'on voudra.

2. Cela poſé, puiſque $u=a+u-a$, $a$ étant une conſtante quelconque, & que $-u=a-u-a$, que d'ailleurs on peut changer $\varphi(a\pm u)$ en $\varphi[(a\pm u)-a]$, il eſt clair, que ſi on demande de trouver $\varphi u$, telle que $\varphi(a+u)+\varphi(a-u)=2V$, il n'y a qu'à écrire l'équation en cette ſorte $\varphi[(a+u)-a]+\varphi[(a-u)-a]=$

$2V$. Donc $\varphi[(a+u)-a]$ ſera $= V+V'$, $V$ étant une fonction paire de $u$ ou de $(a+u)-a$, & $V'$ une fonction impaire de $u$ ou de $(a+u)-a$. Soient donc miſes dans $V$ & dans $V'$, au lieu de $u$ & de ſes puiſſances $(u+a)-a$ & ſes puiſſances; ſi dans $V$ & dans $V'$, on met, après cette transformation, $u$ pour $a+u$, on aura la fonction cherchée. Donc on aura la fonction cherchée en mettant dans $V$ & dans $V'$, d'abord $(u+a)-a$ & ſes puiſſances au lieu de $u$, & enſuite dans cette transformée $u$ au lieu de $u+a$, c'eſt-à-dire, qu'on aura la fonction cherchée en mettant $u-a$ au lieu de $u$ dans $V$ & dans $V'$.

3. La différence des fonctions $V+V'$ & $V-V'$ eſt $2V'$. Donc ſi on propoſe de trouver $\varphi u-\varphi-u = 2V'$, $V'$ étant une fonction impaire de $u$, il n'y aura qu'à prendre $\varphi u = V+V'$, $V$ étant une fonction paire telle qu'on voudra; & ſi on veut trouver $\varphi u$ telle que $\varphi(a+u)-\varphi(a-u) = 2V'$, il n'y a qu'à prendre $\varphi u$ égale à la quantité qu'on auroit en ſubſtituant $u-a$ dans $V+V'$ au lieu de $u$.

4. Si $V$, au lieu d'être ſuppoſé rationnel, étoit une quantité radicale, qui ne contînt que des puiſſances paires de $u$, le problême de l'art. 1 ſe réſoudroit de la même maniere. Il en ſeroit de même, ſi $V'$ étoit un radical qui ne contînt que des puiſſances impaires de $u$, ce qui arrivera ſi $V' = U \times U'$, $U$ étant une fonction impaire rationnelle de $u$, & $U'$ un radical qui ne contienne que des puiſſances paires de $u$.

5. Si on propoſe de trouver $\varphi u$, telle que $\varphi(u+a)+\varphi(u-a)$ ſoit $=2V$, $V$ étant une fonction paire de $u$, & que $\varphi u$ ſoit une puiſſance paire, il eſt viſible que la queſtion ſe réduira à trouver $\varphi(a+u)+\varphi(a-u)=2V$. Donc, puiſque $\varphi u$ ſe trouvera en mettant dans $V$ & dans $V'$, $u-a$ au lieu de $u$ (ou, ce qui revient au même, en mettant $a-u$ dans $V$ au lieu de $u$, puiſque $V$ ne contient que des puiſſances paires de $u$) & dans $V'$ $-(a-u)$ au lieu de $u$, puiſque $V'$ ne renferme que des puiſſances impaires; il faut, pour que $\varphi u$ ſoit une puiſſance paire, que les coefficiens des puiſſances impaires de $u$, après cette ſubſtitution, ſoient égaux à zero dans la quantité $V+V'=\varphi u$. Il faudra avoir égard à cette condition en prenant la valeur de $V'$, qui ne peut plus être à volonté, mais qui dépendra de la valeur de $V$. En effet, ſi on a pris, par exemple, $V=A+B(u-a)^2$, il faudra prendre $V'=P(u-a)$, $P$ étant un coefficient qu'on déterminera en faiſant évanouir le terme où ſeroit $u$, dans $V+V'$. Si on a pris $V=A+B(u-a)^2+C(u-a)^4$, il faudra prendre $V'=P(u-a)+Q(u-a)^3$, $P$ & $Q$ étant des indéterminées qui ſerviront à faire évanouir les termes où ſeroient $u$, & $u^3$; & ainſi du reſte.

6. Si on a $\varphi(u+a)-\varphi(u-a)=V'$, $\varphi u$ étant toujours une fonction paire, on peut écrire $\varphi(u+a)-\varphi(a-u)=V'$, $V'$ étant une fonction impaire, & on déterminera $\varphi u$ comme dans l'art. précédent.

7. Si on a $\varphi(u+a)+\varphi(u-a)=V'$, $\varphi u$ étant une

fonction impaire, on écrira $\varphi(u+a)-\varphi(a-u)=V'$, $V'$ étant une fonction impaire, & on déterminera de même $\varphi u$, avec cette différence que dans la valeur de $\varphi u$, les termes qui doivent s'évanouir sont ceux qui contiennent des puissances paires de $u$.

8. Donc si on a $\varphi(u+a)\pm\varphi(u-a)=V+V'$; $V$ étant une fonction paire, & $V'$ une impaire, on fera $\varphi(u+a)=\Delta(u+a)+\Gamma(u+a)$, $\Delta u$ étant une fonction paire, $\Gamma u$ une impaire; & on aura $\Delta(u+a)\pm\Delta(u-a)=U$, $U$ étant une fonction paire ou impaire, & $\Gamma(u+a)\pm\Gamma(u-a)=U'$, $U'$ étant une fonction impaire ou paire; on résoudra donc ces deux équations par les méthodes précédentes, & on fera de plus attention que les fonctions paires ou impaires $U$, $U'$, sont les mêmes que les fonctions $V$, $V'$, c'est-à-dire, que $U=V$ ou $V'$, & $U'=V'$ ou $V$.

9. Il est très-aisé de voir que $\varphi(a+u)+\varphi(a-u)$ ne sauroit jamais contenir que des puissances paires de $u$. Donc si on proposoit de trouver $\varphi u$, telle que $\varphi(a+u)+\varphi(a-u)$ fût $=2V$, $V$ contenant des puissances impaires, mêlées ou non avec des puissances paires, le problême ne pourroit se résoudre.

10. Par la même raison, on ne pourroit trouver $\varphi u$ telle que $\varphi(a+u)-\varphi(a-u)$ fût $=2V'$, $V$ contenant des puissances paires, mêlées ou non avec des impaires.

11. Soit proposé de trouver $\varphi x$, telle que $\varphi(b+x)\pm\varphi(c-x)=X$, $X$ étant une fonction de $x$, ration-

nelle & ſans diviſeur ; on ſuppoſera $b + x = a + u$, $c - x = a - u$ ; & on aura $b + c = 2a$, & $\frac{b-c}{2} + x = u$, ou $x = u - \frac{b}{2} + \frac{c}{2}$ ; donc faiſant la ſubſtitution, on aura $\varphi(a+u) \pm \varphi(a-u) = U$, $U$ étant une fonction rationnelle de $u$. Donc on aura $\varphi u$ ; donc on aura $\varphi\left(x + \frac{b}{2} + \frac{c}{2}\right)$ ; ou, ce qui revient au même, $\varphi x$.

12. Mais on peut y arriver plus directement de la maniere ſuivante. Puiſque $X$ eſt une fonction rationnelle de $x$, ſans radical & ſans diviſeur, donc différentiant ſucceſſivement pluſieurs fois les deux membres de l'équation, le ſecond membre deviendra enfin $= 0$, & par conſéquent l'équation ſe réduira à celle-ci $dx\,\Gamma(b+x) \pm dx\,\Gamma(c-x) = 0$, ou $\Gamma(b+x) \pm \Gamma(c-x) = 0$ ; donc faiſant $b + x = u$, on aura $\Gamma u \pm \Gamma(c+b-u) = 0$, ou $\Gamma u \pm \Gamma(e-u) = 0$, $e$ exprimant une conſtante. Or il eſt très-facile de trouver en général la valeur de $\Gamma u$ qui ſatisfait à cette équation.

13. On peut trouver aiſément, par la même méthode, la ſolution de l'équation $\varphi(b+x) \pm \varphi(c+x) = X$, $X$ étant une fonction rationnelle de $x$, ſans radical ni diviſeur.

14. Soit donnée une équation entre deux indéterminées $u$ & $u'$, & ſoit $\Delta u$ une fonction de $u$, telle qu'en y mettant au lieu de $u$ la valeur de $u'$ en $u$, elle ne change point de valeur, enſorte qu'on ait $\Delta u = \Delta u'$. Soit de

même donnée une équation entre deux autres indéterminées $V$ & $V'$, & ſoit $\Gamma V = \Gamma V'$, en mettant pour $V'$ ſa valeur en $V$. Il eſt clair, que ſi on forme une équation quelconque entre $\Delta u$ & $\Gamma V$, on aura $\Gamma V = \Gamma V'$ dès que $\Delta u$ ſera $= \Delta u'$, c'eſt-à-dire, que les équations entre $u$ & $u'$ appartiendront à la même courbe que les équations entre $V$ & $V'$.

15. Pour que $\Delta u = \Delta u'$, il faut que l'on ait $u = t + \sqrt{t'}$, $u' = t - \sqrt{t'}$, $t$ étant une indéterminée quelconque, & $t'$ une fonction quelconque de $t$; car alors à un même $t$, il répondra les valeurs de $u$ & $u'$, & par conſéquent $t$ ſera une même fonction de $u$ que de $u'$. Il en eſt de même des conditions néceſſaires pour que $\Gamma V$ ſoit $= \Gamma V'$. Au reſte, cette derniere ſolution n'eſt pas générale; car ſi, par exemple, $u' = u \pm a$, nous avons donné ailleurs une méthode différente de celle-ci, pour rendre $\Delta u$ telle que $\Delta u = \Delta (u \pm a)$. Quoi qu'il en ſoit, la ſolution préſente, qu'il paroît facile de généraliſer, pourra être utile dans pluſieurs Problêmes.

16. Soit une courbe dont les coordonnées ſoient $x$ & $y$, & ſoit fait $x + y = 2V$, $x - y = 2V'$; ſuppoſons de plus, que $V$ ſoit une fonction paire de la quantité $u$, & $V'$ une fonction impaire; on pourra toujours trouver, par les méthodes précédentes, une quantité $\varphi u$, telle que $\varphi(u + a) \pm \varphi(u - a) = V$ ou $V'$, ou telle que $\varphi(u + a) \pm \varphi(a - u) = V$ ou $V'$. Ce problême peut être utile auſſi dans la ſolution de différentes queſtions analytiques, dont nous pourrons parler dans un

autre lieu. Nous remarquerons seulement ici que l'équation en $x$ & en $y$ doit être telle, qu'en y substituant $V + V'$ pour $x$, & $V - V''$ pour $y$, & supposant $V'$ une fonction impaire, $V$ soit une fonction paire.

## §. II.

### *Sur différentes remarques d'Optique.*

### I.

J'ai donné dans les Mémoires de l'Académie de 1764 les formules pour la courbure des surfaces d'un objectif à trois lentilles. Je dois avertir à l'occasion de ces formules, que si on mesure par quelque moyen la courbure des surfaces d'un objectif donné, on aura par ce moyen les valeurs de $P$, $P'$ & celles de $\frac{dP}{dP'}$; car nommant $\rho$, $\rho'$, $\rho''$ les distances focales des trois lentilles, on aura $\frac{P-1}{\lambda} = \frac{1}{\rho}$, $\frac{P'-1}{\lambda'} = \frac{1}{\rho'}$, $\frac{P-1}{\rho''} = \frac{1}{\lambda''}$; $\frac{dP}{\lambda} + \frac{dP}{\lambda''} = \frac{dP'}{\lambda'}$. Ainsi, puisqu'on connoît $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$, on aura d'abord $\frac{dP}{dP'}$. De plus, on aura $\frac{P-1}{P'-1} = \frac{\lambda\rho'}{\lambda'\rho} = \frac{\lambda''\rho'}{\lambda'\rho''}$. Donc connoissant $\rho$ & $\rho''$, ce qui se peut aisément par l'expérience, on aura $\rho'$ & $\frac{P-1}{P'-1}$; & connoissant $\rho$ & $\lambda$, on aura $P - 1$. Donc &c. J'ai cru devoir faire cette remarque, parce qu'il peut arriver qu'après avoir déterminé les surfaces courbes des lentilles, & avoir supposé $P = 1,55$, $P' = 1,6$ & $\frac{dP}{dP'} = \frac{2}{3}$, on ne

trouve pas les réſultats des meſures d'accord avec ces ſuppoſitions. En ce cas, il faudra ſuppoſer $P = 1,55 + \alpha$, $P' = 1,6 + \mathfrak{C}$, $\frac{dP}{dP'} = \frac{2}{3} + \delta$, & voir quelles valeurs doit donner aux quantités $\alpha$, $\mathfrak{C}$, $\delta$ pour faire quadrer les réſultats avec les meſures. C'eſt par ce moyen que j'ai répondu aux queſtions d'un des membres de l'Académie des Sciences, qui ayant déterminé les courbures des différentes ſurfaces courbes dans un objectif de Dollond, ne trouvoit point le foyer total d'accord avec la ſuppoſition de $P = 1,55$, & $P' = 1,6$. J'ai prouvé que les réſultats s'accordoient aſſez bien, en altérant un peu les valeurs ſuppoſées de $P$ & de $P'$, altération évidemment permiſe. Voy. *Mém. Acad.* 1767.

## II.

Dans les Mém. de 1765, p. 96, j'ai donné les dimenſions des deux meilleures lentilles ſimples biconvexes, en ſuppoſant $P = 1,5$, ou $P = 1,55$. Ces lentilles, comme je l'ai remarqué au même endroit, different très-ſenſiblement l'une de l'autre pour la figure. Si on ſuppoſe $P = 1,54$, comme dans le troiſiéme Volume de nos *Opuſcules*, on aura le rayon $r$ de la premiere ſurface $= + R \times \frac{13716}{23716} = + R \times 0,57968$; & le rayon $\rho$ de la ſeconde ſurface $= - R \times \frac{13716}{1684} = - R \times 8,1449$; & ainſi du reſte, ſelon la valeur qu'on ſuppoſera à $P$. Les trois différentes valeurs de $r$ & de $\rho$, dans ces

ces trois hypothèſes de $P = 1,5$, ou $1,54$ ou $1,55$, pourroient ſervir à former une table ſuffiſamment exacte pour pluſieurs autres cas.

## III.

1. Il eſt clair (*Mém.* 1764, p. 82) qu'en ſuppoſant l'épaiſſeur $\epsilon$ quelconque, & faiſant $\gamma = 0$, $\varkappa = 0$, la diſtance primitive $a$ de l'objet à l'axe, deviendra, après toutes les réfractions, $amm'm''m''' \times \frac{\delta'\delta''\delta'''}{\delta(\delta'-\epsilon)(\delta''-\epsilon')}$ &c.

2. Donc ſuppoſant $\delta''$ & $\delta$ conſtans, il faut, pour que l'aberration de réfrangibilité ſoit nulle, que la fraction $\frac{mm'm''m'''}{\left(1-\frac{\epsilon}{\delta'}\right)\left(1-\frac{\epsilon'}{\delta''}\right)}$ ſoit conſtante.

3. Donc (art. 126 du Tome III des *Opuſcules*) il faudra, pour rendre l'aberration de réfrangibilité nulle dans l'œil, faire égale à une conſtante la quantité

$$\frac{mm'm''}{\left[1-e\left(\frac{1-A}{a}-\frac{A}{\delta}\right)\right]\times\left[1-f\left(\frac{1-B}{b}+\frac{B}{\delta'-\epsilon}\right)\right]} = \frac{mm'm'}{1-e\left(\frac{1-A}{a}-\frac{A}{\delta}\right)} \times \frac{1}{1-f\left(\frac{1-B}{b}+\frac{B(D\delta-Aa)}{a\delta-De\epsilon+Aa\epsilon}\right)}.$$

4. Soit $\frac{\varkappa}{\varrho}$ l'angle viſuel, ou l'angle que forment l'axe optique & la ligne dirigée de l'objet au centre de la cornée; cet angle, après la premiere réfraction, devient $\frac{\varkappa}{\delta''}$, & après deux réfractions, il ſera dans la ſuppoſition précédente $\varkappa \times \frac{\delta'-e}{\delta'\delta''}$.

5. Donc, dans cette même ſuppoſition, l'angle viſuel, qui auroit été $\frac{u}{\varrho}$ ſans la réfraction, deviendra, après la double réfraction, $\frac{u(\delta' - e)}{\delta'\delta''}$.

6. Maintenant, ſoit $k$ la diſtance du fond de l'œil au dernier foyer de réfraction; il faudra multiplier la quantité précédente par $k$, & la diviſer par $k + \delta'' - \rho + e$; pour avoir le dernier angle viſuel, en ſuppoſant que le centre de la cornée & celui de la retine coincident. Donc ſi on veut que cet angle $= \frac{u}{\varrho}$, il faudra que l'on ait $\frac{k(\varrho\delta' - \varrho e)}{(k + \delta'' - \varrho + e)\delta'\delta''} = 1$.

7. Or il faut que $k + \delta''$ ſoit égal à la diſtance focale des rayons réfractés dans l'œil, c'eſt-à-dire (en ſuppoſant l'objet très-éloigné) égal à $\frac{(b - Ef)\left(\frac{a - 2De}{D}\right) - fBb}{E\left(\frac{a - 2De}{D}\right) + Bb}$. Donc on doit avoir l'équation ſuivante, au moins très-approchée, $\frac{(b - Ef)(a - 2De) - fBbD}{E(a - 2De) + BbD} = k + \frac{gb\varrho - fg(E\varrho + Bb)}{Fb\varrho + (Gg - Ff)(E\varrho + Bb)}$; d'où l'on tire la valeur de $k$, qui étant ſubſtituée dans la quantité $\frac{k(\varrho\delta' - \varrho e)}{(k + \delta'' - \varrho + e)}$, le réſultat doit être $= \delta'\delta''$.

8. Au reſte, il ne paroît pas rigoureuſement néceſſaire de ſuppoſer dans ces calculs que le centre de la cornée & celui de la retine coincident; il ſuffit, pour que l'ob-

jet ſoit vû à très-peu près dans ſa place, que la ligne menée de l'image au centre de la retine, ſoit parallèle à la ligne menée de l'objet au centre de la cornée ; car alors, ſi $\mathcal{C}$ eſt la diſtance entre les centres, la grandeur de l'objet ſera augmenté ou diminuée en raiſon de $a\,\mathcal{C}$, qui eſt une quantité inſenſible.

9. Il ſuffira donc que l'on ait $\frac{n}{\varrho} = \frac{n(\delta''-e)}{\delta'\delta''} \times \frac{\varkappa}{k+\delta''-\varrho+e+\mathcal{C}}$, équation dans laquelle $\mathcal{C}$ eſt poſitive, ſi le centre de la retine eſt plus près du ſommet de l'œil que le centre de la cornée, & au contraire.

10. Si on fait abſtraction de l'épaiſſeur du cryſtallin & de celle de la cornée, on trouvera (Tome III des *Opuſcules*, page 162) que l'angle ſous lequel l'image ſeroit vûe du ſommet de l'œil, ſeroit $\frac{a\,m\,m'\,m''}{\delta} = \frac{a\times 3}{4\delta}$, en ſuppoſant $m = \frac{3}{4}$, $m' = \frac{12}{13}$, $m'' = \frac{13}{12}$ ; d'où l'on peut aiſément conclure qu'il faudroit que le centre de la retine fût éloigné du fond de l'œil d'une quantité égale aux $\frac{3}{4}$ de la diſtance entre la cornée & le fond de l'œil. Alors l'objet placé hors de l'axe ſeroit vû, non en rigueur, mais à très-peu près, en ſon vrai lieu ; je dis non en rigueur, mais à très-peu près, parce que l'angle viſuel ſeroit en effet augmenté dans la raiſon du quart de diametre de l'œil à la diſtance de l'objet à l'œil ; mais cette augmentation ſeroit inſenſible.

11. En ſuppoſant l'objet très-près de l'axe de l'œil, & en ayant égard à l'épaiſſeur des humeurs, l'angle $\frac{a''}{\delta''}$

ſeroit à très-peu près $\frac{a\,m\,\delta'}{\delta} \times \frac{m'\,\delta''}{\delta' - \varepsilon} \times \frac{m''}{\delta'' - \varepsilon'} =$ $\frac{a\,m\,m'\,m''}{\delta} \times \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta' - \varepsilon}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon'}{\delta - \varepsilon'}\right)$. Pour lors, ſi on nomme $\Delta$ la diſtance entre la cornée & le fond de l'œil, il faudra que le centre de la retine ſoit éloigné du fond de l'œil d'une quantité $= \frac{\frac{3\Delta}{4}}{\left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta' - \varepsilon}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon'}{\delta'' - \varepsilon'}\right)}$; pour que l'image ſoit vûe à très-peu près en ſon vrai lieu.

12. Suivant les dimenſions que j'ai données d'après les meilleures obſervations, pag. 272 du Tome I de mes *Opuſcules* (dont je ſuppoſe qu'on ait ici ſous les yeux la figure, qui eſt la 48^e^ du premier Volume) on a $BZ = 5 + \frac{13}{20}$, & $KZ = 4 + \frac{25}{64}$; donc $BK = 1 + \frac{83}{4 \cdot 5 \cdot 16} =$ environ $\frac{5}{4}$ de ligne; donc $BK$ eſt à $KZ$, comme $320 + 83$ à $20 \times 64 + 125$, c'eſt-à-dire à peu près comme 2 à 7.

13. On a de plus $\frac{1}{NZ} = \frac{1 - m''}{r''} + \frac{m''}{\delta'' - \varepsilon'}$; donc $\frac{1}{\delta'' - \varepsilon'} = \frac{1}{m'' \cdot NZ} + \frac{1}{r''} - \frac{1}{m'' r''}$; or $NZ =$ (*Fig.* 47. *ibid*) $RZ - RM - MN = 9$ l. $\frac{2}{3} - 1$ l. $\frac{1}{4} - 2$ l. $= 6$ lig. $\frac{3}{20}$, $m'' = \frac{13}{12}$, $r'' = -2$ l. $\frac{1}{2}$; donc $\frac{1}{\delta'' - \varepsilon'} =$ $\frac{12}{13\,NZ} + \frac{1}{13\,r''} = \frac{1}{NZ} \times \left(1 - \frac{1}{13} - \frac{6\frac{1}{20}}{13 \times \frac{1}{2}}\right) =$ $\frac{1}{NZ} \times \left(\frac{477}{650}\right)$; donc $\delta'' - \varepsilon' = 6$ lig. $\frac{3}{20} \times \frac{650}{477} =$

6 lig. $+\frac{363}{954}$; donc à cauſe de $\epsilon' = 2$ lig., on aura $\delta''$ $= 10$ lig. $+\frac{363}{954}$ à très-peu près 10 lig. $\frac{3}{8}$.

14. Suppoſons que les rayons tombent parallèles ſur la cornée, on a d'abord $\delta' = \frac{r}{1-m} = 4r = 15$ lig. à cauſe de $m = \frac{3}{4}$, & $r = 3$ lig. $\frac{3}{4}$. En ſecond lieu, $\frac{1}{\delta''} = \frac{1-m'}{r'} + \frac{m'}{\delta' - \epsilon}$ = (à cauſe de $m' = \frac{12}{13}$, $r'$ $= 4$ lig., $\epsilon = 1$ lig. $\frac{1}{4}$) $\frac{1}{13.4 \text{ lig.}} + \frac{12}{13.13 \text{ lig.} \frac{1}{4}}$. Donc $\delta'' = 11$ lig. $\frac{143}{247}$ = environ 11 lig. $\frac{14}{25}$.

15. Pour faire coincider exactement cette valeur de $\delta''$, avec celle qui a été trouvée (art. 13) de 10 lig. $\frac{3}{8}$, il faut ſeulement ſuppoſer la fraction $m'$ égale à $\frac{12}{13+\alpha}$, $\alpha$ étant une quantité (poſitive ou négative) très-petite par rapport à 13 & à 12; ou en général altérer un peu le rapport $m' = \frac{12}{13}$.

16. Le Docteur Hook, ſelon M. Smith, trouve que le rapport du ſinus d'incidence au ſinus de réfraction, en paſſant de l'humeur vitrée dans le cryſtallin, eſt $>$ que celui de 13 à 12; Pemberton le trouve plus petit, mais dit que l'expérience n'a pas été faite exactement. Selon d'autres habiles Phyſiciens, ce rapport eſt un peu plus petit que de 13 à 12; mais leur calcul eſt établi ſur la coincidence qu'ils ſuppoſent des centres de la retine & de la cornée. Or cette coincidence ne ſauroit être

admiſe, comme on le verra dans un moment

17. Dans le neuviéme Mémoire de ces *Opuſcules*; j'ai prouvé, que ſuivant la conſtruction de l'œil & le rapport de réfraction des humeurs, donné par les Opticiens, l'objet ne devoit pas être vû à ſa véritable place. D'après d'autres dimenſions & d'autres rapports, on peut trouver facilement le moyen de faire enſorte que la ligne qui va de l'image à l'objet, paſſe par le centre de la retine, en le ſuppoſant le même que celui de la cornée. Mais ces dimenſions & ces ſuppoſitions ſeroient contredites par les obſervations des Opticiens ſur la ſtructure de l'œil.

18. En effet, il ne paroît pas poſſible de faire coincider le centre $K$ de la retine avec le centre $B$ de la cornée, en ſuppoſant, 1°. que $BZ = 5 + \frac{13}{20}$; 2°. que $RZ = 9$ lig. $\frac{2}{7}$, & $QD = 2$ lig, $\frac{1}{2}$, ſuivant les dimenſions données par M. Petit. Car ſi les centres $B$ & $K$ coincident, il faut que l'arc $QRS$ (*Fig.* 48) étant continué aboutiſſe en $Z$, & que par conſéquent $QD^2$ ou (2 lig. $\frac{1}{2}$)$^2$ $= RD \times DZ =$ 1 lig. $\frac{2}{7} \times$ (9 lig. $+ \frac{2}{7}$ — 1 lig. $- \frac{2}{7}$) $=$ 1 lig. $\frac{2}{7} \times$ 8 lig. ce qui n'eſt pas ; la ſeconde de ces quantités étant évidemment beaucoup plus grande que l'autre.

19. J'ajoute que non-ſeulement les centres $B$ & $K$ de la cornée & de la retine ne coincident pas, mais encore que le rayon tiré de l'image au centre de la retine, ne ſauroit être parallèle au rayon tiré de l'objet ou du point viſible au centre de la cornée. En effet, on aura (*Fig.* 47 du Tome I) $BO = \frac{4}{13} BE = \frac{3}{2.13}$; $BK = BZ$

$-KZ = 5 + \frac{13}{20} - 4 - \frac{25}{64} = 1 + \frac{13}{20} - \frac{25}{64}$, quantité plus grande que $BQ$; donc $OK$ est une quantité positive, & $K$ est au-dessous de $O$. Si par le centre $K$ de la retine on mene une parallèle à $LuVB$, (même *Fig.* 47 du Tome I) & que cette ligne aboutisse, comme elle le doit, au point $X$, il faudra que $XZ$ soit $= \frac{Mu \times KZ}{MB}$; de plus, la ligne $uO$ prolongé coupera dans le fond de l'œil, depuis le point $Z$, un espace $= \frac{Mu \times OZ}{MO}$; or $\frac{OZ}{MO} = \frac{5 + \frac{11}{20} - \frac{3}{26}}{2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.11}}$; & $\frac{KZ}{MB} = \frac{4 + \frac{25}{64}}{2 + \frac{1}{2}}$; donc, si la seconde de ces fractions est plus petite que la premiere, $X$ tombera au-dessous du point où la ligne $uO$ rencontre le fond de l'œil; & par conséquent alors la ligne $VX$ tomberoit au-dessous de $VO$, ce qui ne se peut, puisque la réfraction, en sortant du cryſtallin, doit écarter le rayon de la perpendiculaire.

20. Voyons donc si $\frac{OZ}{MO}$ n'est pas $< \frac{KZ}{MB}$; en voici le calcul: on aura d'abord $\frac{KZ}{MB} = \frac{2.281}{5.64}$; & $\frac{OZ}{MO} = \frac{2.\left(5 + \frac{11}{20} - \frac{3}{26}\right).13}{68}$. Il faut donc voir si $\frac{281}{5.64}$ n'est pas $< \frac{\left(65 + \frac{13^2}{20} - \frac{3}{2}\right)}{68}$, c'est-à-dire $\frac{281}{320} < \frac{64 - \frac{1}{2} + \frac{169}{400}}{68}$; ou $2810 \times 68 < 25569.8$; or c'est

ce qui eſt en effet, puiſque le premier membre eſt $= 19.1080$, & le ſecond $= 20.4552$. D'où il s'enſuit que $\frac{KZ}{MB} < \frac{OZ}{MO}$.

21. Donc ſi on veut que le rayon tiré de l'image au centre de la retine, ſoit parallèle au rayon tiré de l'objet au centre de la cornée, il faut ſuppoſer (toutes les dimenſions étant d'ailleurs telles que les Anatomiſtes les admettent) que la réfraction, en ſortant du cryſtallin, rapproche le rayon de la perpendiculaire; ce qui ne ſauroit être admis.

22. Je terminerai cette diſcuſſion par une formule générale, qui pourra être utile dans la recherche préſente pour trouver le rapport des angles de l'objet & de l'image. Soient trois ſurfaces ſphériques $RS$, $Mu$, $NV$, (Voyez la même *Fig.* 47 du Tome I des *Opuſcules*) dont les centres ſoient $B$, $E$, $C$; & ſoit $LB$ un rayon qui tombe ſur la premiere ſurface, & qui de-là ſe réfracte en $uO$ & en $VI$; on propoſe de trouver le rapport de l'angle $AiV$ à l'angle $ABL$. Soient $BR = r$, $ME = r'$, $CN = r''$, qui eſt ici négatif, $RM = e$, $MN = f$; & ſuppoſant l'angle $ABL$ très-petit, on aura $AiV = AOV \times \frac{NO}{Ni}$; $AOV = Aou = ABL \times \frac{MO}{MB}$; Donc $AiV = ABL \times \frac{NO.MO}{Ni.MB}$. Or par les formules précédentes, $MB = r - e$; $MO = \frac{1}{\frac{1-m'}{r'} + \frac{m'}{r-e}}$;

&

& $\frac{MO}{MB} = \frac{1}{\frac{(1-m')(r-e)}{r'} + m'}$; de plus, $NO =$

$MO - f$, & $Ni = \frac{1}{\frac{1-m'}{-r''} + \frac{m''}{MO-f}}$. Donc $\frac{NO}{Ni}$

$= -\frac{(1-m'')(MO-f)}{r''} + m'' = -\frac{(1-m'')}{r''} \times$

$\frac{rr'-er'-(1-m')(fr-fe)-m'r'f}{(1-m')(r-e)+m'r'} + m''$. Donc $AiV$

$= ABL \times -\left(\frac{1-m''}{r''}\right) \times \frac{rr'^2-er'^2}{[(1-m')(r-e)+m'r']^2}$

$+ \left(\frac{1-m''}{r''}\right) \times \frac{r'f}{(1-m')(r-e)+m'r'} +$

$\frac{m''r'}{(1-m')(r-e)+m'r'}$.

23. Connoiſſant donc exactement les rayons des ſurfaces, les épaiſſeurs des humeurs, & les rapports de réfraction $m$, $m'$ &c. on aura, par la formule précédente, le rapport exact de l'angle $AiV$ à l'angle $ABL$.

## §. III.

### *Sur le mouvement des Corps qui tournent.*

1. A la fin du vingt-deuxiéme Mémoire de mes *Opuſcules*, Tome IV, j'ai promis quelques recherches ſur le mouvement d'un Corps qui pirouette librement ſur un plan horizontal. Voici un léger eſſai de celles qu'on peut faire ſur ce ſujet. Nous ſuppoſerons ici les calculs du vingt-deuxiéme Mémoire, & les noms qui y ont été donnés. Mais avant d'entrer dans ce détail, je dois remarquer

que les équations de l'art. 25 du §. II de ce XXII^e Mémoire, ne ſont intégrables que dans le cas où le ſecond membre $Q\,dt^2$ de la ſeconde équation eſt $= 0$, ou bien $= Q\,dt\,d\Pi$, $Q$ étant une fonction de $\Pi$. En conſéquence de cette obſervation, il faut apporter quelque modification aux concluſions qu'on a tirées de cet article 25, & qui n'ont lieu que dans le cas où $Q = 0$, & où par conſéquent (art. 26, 28, 32 & 33 du §. II de ce Mémoire) on aura $\Gamma'(\Pi) = 0$.

2. Imaginons que le corps qui pirouette autour d'un point ſoit tel que $\int G' ff \text{ cof. } 2\xi = 0$, & $\int G' ff \text{ ſin. } 2\xi = 0$; le point ſur lequel le corps pirouette, étant, ſi l'on veut, l'extrémité de ce corps terminé en pointe, comme le ſommet d'un cone, par exemple. Imaginons de plus que le corps qui pirouette ſur le point dont il s'agit ne ſoit pas attaché fixement par ce point, mais ſeulement qu'on ait $q = 0$, c'eſt-à-dire, que le corps ſoit toujours ſur le plan; imaginons enfin que le plan ſoit horizontal, & voyons quelles ſeront dans ce cas les équations pour trouver le mouvement du corps. Nous ſuppoſerons, pour plus de ſimplicité, que l'axe des $a - b$, paſſant par le point du pirouettement & par le centre de gravité, ſoit un axe naturel de rotation du corps, enſorte qu'on ait $\int G\lambda f \text{ ſin. } X = 0$, $\int G\lambda f \text{ cof. } X = 0$.

3. En nommant $-\gamma$, $-\varphi$, les forces retardatrices qui réſultent du frottement, leſquelles ſont ſuppoſées placées à la pointe du corps & ſur le plan même, & faiſant de plus $\downarrow = -Mp$, laquelle force $\downarrow$ eſt perpendiculaire

au plan de projection, & placée au centre de gravité du corps, on aura les équations suivantes,

$1°. \int G' ds + \int G' du = -\frac{2adt.\int \gamma dt}{p\theta^2} + Cdt;$

$2°. \int G' dx + \int G' dz = -\frac{2adt.\int \phi dt}{p\theta^2} + Bdt;$

$3°. -\int G' z\,ddu + \int G' u\,ddz - \int G' z\,dds + \int G' u\,ddx = (\gamma\chi' - \phi\theta') \times \frac{2adt^2}{p\theta^2};$

$4°. \int G'(\pi\,ddz - z\,dd\pi)\cos.e + \int G'(\pi\,ddu - u\,dd\pi) \times \sin.e + \int G' \pi\,ddx \cos.e - \int G' z\,ddq \cos.e + \int G' \pi\,dds \times \sin.e - \int G' u\,ddq \sin.e = (-\phi\zeta' \cos.e + Mp \cos.e \times \mu' - \gamma\xi' \sin.e + Mp\nu' \sin.e) \times \frac{2adt^2}{\theta^2};$

$5°. \int G'(\pi\,ddz - z\,dd\pi) \sin.e - \int G'(\pi\,ddu - u\,dd\pi) \times \cos.e + \int G' \pi\,ddx \sin.e - \int G' z\,ddq \sin.e - \int G' \pi\,dds \times \cos.e + \int G' u\,ddq \cos.e = (-\phi\zeta' \sin.e + Mp\mu' \sin.e + \gamma\xi' \cos.e - Mp\nu' \cos.e) \times \frac{2adt^2}{\theta^2};$

4. Faisons d'abord abstraction des forces $\gamma$, $\phi$, & voyons ce qui en résultera. D'abord il est clair, qu'en mettant pour $\mu'$ sa valeur $\mu \cos.e - \nu \sin.e$, & pour $\nu'$ sa valeur $\nu \cos.e + \mu \sin.e$, le second membre de la quatriéme équation se réduira à $+ Mp\mu$, & le second membre de la cinquiéme à $- Mp\nu$.

5. En second lieu, puisque $z = \varpi \cos.e - \rho \sin.e$, & $u = \rho \cos.e + \varpi \sin.e$, on aura facilement les valeurs de $ddz$ & de $ddu$ en $\rho$, $\varpi$, $e$, & leurs différences.

6. Or $\varpi = f \sin.X$, $d\varpi = fdP \cos.X$, $dd\varpi = fddP \times \cos.X - fdP^2 \sin.X$;

$\rho = \lambda$ cof. $\Pi - f$ fin. $\Pi$ cof. $X$; $d\rho = -\lambda d\Pi$ fin. $\Pi + fdP$ fin. $X$ fin $\Pi - fd\Pi$ cof. $\Pi$ cof. $X$; $dd\rho = -\lambda dd\Pi \times$ fin. $\Pi - \lambda d\Pi^2$ cof. $\Pi + fddP$ fin. $X$ fin. $\Pi + fdP^2 \times$ cof. $X$ fin. $\Pi + fdP\, d\Pi$ fin. $X$ cof. $\Pi - fdd\Pi$ cof. $\Pi \times$ cof. $X + fd\Pi^2$ fin. $\Pi$ cof. $X + fd\Pi\, dP$ cof. $\Pi$ fin. $X$.

7. Enfin, $M$ étant la maſſe du corps ou $= fG'$, on a $ddz = -\int \frac{G'\,ddu}{M}$, à cauſe de $\gamma = 0$; & $ddx = -\int \frac{G'\,dd\zeta}{M}$, à cauſe de $\varphi = 0$; ſubſtituant, & négligeant tous les termes où doivent ſe trouver $fG'f$ fin. $X$ & $fGf$ cof. $X$, leſquels ſont nuls, on aura les équations ſuivantes; $ddz = -\frac{1}{M} \times (-dd\Pi$ fin. $\Pi - d\Pi^2$ cof. $\Pi - de^2$ cof. $\Pi) \times$ cof. $efG'\lambda - \frac{1}{M}(-dde$ cof. $\Pi + 2\,ded\Pi$ fin. $\Pi)$ fin. $efG'\lambda$; $ddx = -\frac{1}{M}(dd\Pi \times$ fin. $\Pi + d\Pi^2$ cof. $\Pi + de^2$ cof. $\Pi)$ fin. $efG'\lambda - \frac{1}{M} \times (-dde$ cof. $\Pi + 2\,de\,d\Pi$ fin. $\Pi)$ cof. $efG'\lambda$.

8. On peut avoir ces équations d'une maniere encore plus ſimple, en conſidérant que $ddz = -\int \frac{G'\,ddu}{M}$; donne $z = -\int \frac{G'u}{M} + Bt + D$, & que de même $x = -\int \frac{G'\zeta}{M} + Et + F$; d'où l'on tire, en négligeant les termes qui renferment $fGf'$ cof. $X$ & $fG'f$ fin. $X$; $z = -\frac{\text{cof. }\Pi \text{ cof. } efG'\lambda}{M} + Bt + D$; $x = +\frac{\text{cof. }\Pi \text{ fin. } efG'\lambda}{M}$

$+Et+F$; $ds=(d\Pi \text{ sin. } \Pi \text{ cos. } e+de \text{ cos. } \Pi \text{ sin. } e)\times\int\frac{G'\lambda}{M}+Bdt$; $dx=(-d\Pi \text{ sin. } \Pi \text{ sin. } e+de\times \text{cos. } \Pi \text{ cos. } e)\times\int\frac{G'\lambda}{M}+Edt$; & les valeurs de $dds$ & $ddx$ comme dans l'art. précédent.

9. Donc $\int -G'\zeta\, dds+\int G'u\, ddx$ ou $-dd\varepsilon\int G'\zeta+dd\alpha\int G'u$ (en négligeant les termes qui renferment $\int G'f\text{cos. }X$ & $\int G'f\text{sin. }X$) $=(-\frac{dde\text{cos. }\Pi^2\int(G'\lambda)^2}{M}+\frac{2d\Pi de\text{ sin. }\Pi\text{ cos. }\Pi(\int G'\lambda)^2}{M}=\frac{(\int G'\lambda)^2}{M}\times -d(de\text{cos. }\Pi^2)$.

10. Donc, en mettant au lieu de $-\int G'\zeta\, ddu+\int G'u\, dd\zeta$ sa valeur déja trouvée dans le vingt-deuxiéme Mémoire, §. II, la troiſiéme équation de l'art. 3 ci-deſſus deviendra

$$d[-dP\text{ sin. }\Pi\int G'ff+d\Pi\text{ cos. }\Pi\text{sin. }2P\times\int\frac{G'ff\text{cos. }2\xi}{2}-de\text{ cos. }\Pi^2\int G'\lambda\lambda-\frac{G'ff}{2}+de\text{cos. }\Pi^2\text{ cos. }2P\times\int\frac{G'ff\text{cos. }2\xi}{2}-de\int G'ff-\frac{de\text{ cos. }\Pi^2(\int G\lambda)^2}{M}]=0;$$

ſuppoſant donc (art. 1) $\int G'ff\text{cos. }2\xi=0$, $\int G'ff\text{sin. }2\xi=0$, on tire aiſément de cette équation une valeur de $de$, qui ſera $\Pi' dP+Adt$, $\Pi'$ & $A$ étant des fonctions de $\Pi$; & cette valeur ſera la même que dans l'art. 24, §. II du vingt-deuxiéme Mémoire, avec cette ſeule différence qu'on aura ici $\int G'\lambda\lambda+\frac{1}{M}(\int G\lambda)^2$ au lieu de $\int G'\lambda\lambda$ ſeulement qu'on avoit dans l'art. 24 dont nous parlons.

11. Dans la quatriéme équation du même art. 3 ci-deſſus, on aura $\int G'\pi\,ddx\cos.e+\int G'\pi\,dds\sin.e=ddx\cos.e\int G'\pi+dds\sin.e\int G'\pi=(ddx\cos.e+dds\sin.e)\int G'\pi$ ; or $\pi=\lambda\sin.\Pi+f\cos.X\cos.\Pi$ ; donc $(ddx\cos.e+dds\sin.e)\int G'\pi=-\frac{1}{M}\,(-dde\cos.\Pi\sin.\Pi+2ded\Pi\sin.\Pi^2)(\int G'\lambda)^2=(d(-de\sin.\pi\cos.\Pi)+ded\Pi)\times-\frac{1}{M}(\int G'\lambda)^2$.

12. Enfin, dans la cinquiéme équation, $\int G'\pi\,ddx\times\sin.e-\int G'\pi\,dds\cos.e=(ddx\sin.e-dds\cos.e)\int G'\pi=-\frac{1}{M}(dd\pi\sin.\pi^2+d\pi^2\cos.\pi\sin.\pi+de^2\cos.\pi\times\sin.\pi)\,(\int G'\lambda)^2=-\frac{1}{M}(\int G'\lambda)^2\times[d(d\pi\sin.\pi^2)+(de^2-d\pi^2)\times\cos.\pi\sin.\pi)]$.

13. Donc la quatriéme équation ſera, en mettant pour $\int(G'\pi\,dd\zeta-G'\zeta\,dd\pi)\cos.e+\int(G'\pi\,ddu-G'u\,dd\pi)\sin.e$ ſa valeur déja trouvée (Vingt-deuxiéme Mémoire, §. II,) $d(dP\cos.\pi\int G'ff+d\pi\sin.\pi\sin.2P\times\int\frac{G'ff\cos.2\xi}{2}-de\sin.\pi\cos.\pi\times\int G'\lambda\lambda-\frac{G'ff}{2}+de\cos.\pi\sin.\pi\cos.2P\times\int\frac{G'ff\cos.2\xi}{2})+ded\pi\times\int G'\lambda\lambda+\frac{G'ff}{2}+ded\pi\cos.2P\times\int\frac{G'ff\cos.2\xi}{2}-de^2\times\cos.\pi\sin.2P\times\int\frac{G'ff\cos.2\xi}{2}-\frac{1}{M}(\int G'\lambda)^2\times[d(-de\sin.\pi\cos.\pi)+ded\pi]=Mp\mu\times\frac{2ade^2}{p\beta^2}$. Dans

cette équation, on ſuppoſe $q = 0$, ainſi que dans la ſuivante.

14. Enfin, la cinquiéme équation ſera $d[d\Pi \int G' \lambda\lambda + \frac{G'ff}{2} + d\Pi \text{ cof. } 2P \times \int \frac{G'ff \text{ cof. } 2\xi}{2} - de \text{ cof. } \Pi \text{ ſin. } 2P \times \int \frac{G'ff \text{ cof. } 2\xi}{2}] - dedP \text{ cof. } \Pi \times \int G'ff - dedP \times \text{ſin. } \Pi \text{ ſin. } 2P \times \int \frac{G'ff \text{ cof. } 2\xi}{2} + de^2 \text{ ſin. } \Pi \text{ cof. } \Pi \times \int G' \lambda\lambda - \frac{G'ff}{2} - de^2 \text{ ſin. } \Pi \text{ cof. } \Pi \text{ cof. } 2P \times \int \frac{G'ff \text{ cof. } 2\xi}{2} - \frac{1}{M} (\int G' \lambda)^2 \times [d(d\Pi \text{ ſin. } \Pi^2) + (de^2 - d\Pi^2) \times \text{ſin. } \Pi \text{ cof. } \Pi] = -Mp\nu \times \frac{2adt^2}{p\theta^2}$.

15. De plus, comme la ligne verticale, menée par le centre de gravité, & par laquelle paſſe la direction de la peſanteur $p$, tombe évidemment ſur la projection même de l'axe des $a - b$, il eſt évident que $\mu = 0$, & qu'ainſi le ſecond membre de la quatriéme équation doit être $= 0$ ; à l'égard de $\nu$, il eſt viſible (Vingt-deuxiéme Mémoire, §. II, art. 14,) que $\nu = \Lambda$ cof. $\Pi$.

16. Dans la troiſiéme équation de l'art. 24 du §. II du XXII^e Mémoire, il faudra donc (pour repréſenter la cinquiéme équation de l'art. 3 ci-deſſus) ajouter au premier membre $-\frac{1}{M}(\int G' \lambda)^2 \times [d(d\Pi \text{ ſin. } \Pi^2) + (de^2 - d\Pi^2) \text{ ſin. } \Pi \text{ cof. } \Pi]$.

17. De-là il eſt aiſé de voir qu'on aura, comme dans l'art. 25 du §. II du vingt-deuxiéme Mémoire, des équa-

tions finales intégrables, en employant des transformations analogues à celles de cet art. 25.

18. Nous avons déja remarqué plus haut (art. 1) que la méthode de l'art. 25 qu'on vient de citer, n'eſt bonne que dans le cas où $Q = 0$, comme il eſt aiſé de le voir; car ce n'eſt que dans ce cas qu'on aura $q =$ à une fonction de $\Pi$. Mais comme nous avons vû dans l'art. 15 que $\mu = 0$, il s'enſuit que $Q$ eſt ici $= 0$, & qu'on aura trois équations de cette forme ($\alpha, \xi, \zeta, \gamma, \eta, \delta, \epsilon, \zeta$ & $R$ étant données en $\Pi$); $de = \alpha dP + \xi dt$; $\zeta ddP + \gamma dP d\Pi + \eta dt d\Pi = 0$; $\delta dd\Pi + \epsilon dP^2 + \zeta d\Pi^2 - R dt^2 = 0$; dont la ſeconde donne (en faiſant $dP = q\,dt$) $q = \Pi'$, $\Pi'$ étant une fonction de $\Pi$; & la troiſiéme, en faiſant $dt = \sigma d\Pi$, donne $\frac{\delta d\sigma}{\sigma} + \Pi'' \sigma^2 d\Pi + \Pi''' d\Pi = 0$, équation intégrable par les méthodes connues, même dans le cas où la peſanteur ne ſeroit pas conſtante, & ſeroit proportionnelle à une fonction quelconque de l'angle $\Pi$. Ayant donc par ce moyen $\Pi$, $e$, $P$, on aura (art. 8 précédent) $s$ & $x$; & ſi le corps n'avoit point reçu d'impulſion primitive, on trouveroit encore plus facilement $s$ & $x$, par cette conſidération que le centre de gravité doit deſcendre perpendiculairement au plan.

19. Il faut remarquer, que dans le cas même de $\varphi$ & $\gamma = 0$, quoiqu'on puiſſe ſuppoſer, & qu'on ſuppoſe $q = 0$, & par conſéquent $dq = 0$ & $ddq = 0$ (puiſque le corps ſe meut en gliſſant ſur le plan, par l'hypothèſe); cette ſuppoſition n'aura lieu que dans les cas où $\frac{2Madt^2}{\theta^2}$

ne

ne ſera pas $< \int G' \dot{d} \, d\pi$); autrement, le corps feroit une eſpéce de ſaut, & ſeroit enlevé de deſſus le plan, comme l'expérience le fait voir ſouvent.

20. Mais alors il ne faudroit point d'autre méthode pour trouver le mouvement du corps, que la méthode générale qui rapporte tous les mouvemens au centre de gravité du corps. On pourra faire abſtraction, & du frottement, qui en ce cas n'exiſte plus, & de la peſanteur, dont l'effet ſe réduit à faire deſcendre toutes les parties du corps d'un mouvement égal. On peut donc, tant que le corps eſt en l'air, déterminer ſon mouvement quelle que ſoit ſa figure.

21. On pourra donc, par ce qui précéde, déterminer le pirouettement d'un corps peſant de figure quelconque, pourvu que $\int\int\int G'$ cof. $2\xi = 0$, abſtraction faite du frottement, & le plan étant ſuppoſé horizontal; la peſanteur étant d'ailleurs non-ſeulement conſtante, comme dans l'hypothèſe ordinaire, mais proportionnelle à une fonction quelconque de l'angle $\pi$.

22. Si le plan eſt incliné, il faudra, pour la facilité du calcul, ſuppoſer que la ligne fixe $CB$ (*Fig.* 31) à laquelle ſe rapportent les $\chi$, eſt une ligne horizontale tracée ſur ce plan; en conſéquence de quoi on aura $\varphi = 0$, & au lieu de $p$ & de $\gamma$, il faudra mettre $p$ cof. $\omega$, & $p$ ſin. $\omega$, $\omega$ étant l'angle d'inclinaiſon du plan. De plus, on auroit alors, comme on peut le voir aiſément $\xi' = \lambda$ ſin. $\pi$, & $\chi' = \lambda$ cof. $\pi$ ſin. $e$, & ces ſubſtitutions rendroient les intégrations plus difficiles dans le cas dont il s'agit, que

dans celui du plan horizontal, parce que les quantités sin. $e$ & cos. $e$ ne disparoîtroient pas des équations, comme elles ont fait dans le cas du plan horizontal. Pour trouver d'autres équations du mouvement du corps, dans lesquelles $\gamma$ & $\varphi$ soient $= 0$, on peut rapporter ce mouvement, non au plan incliné sur lequel le corps se meut, mais à un plan horizontal & mobile, passant à chaque instant par la pointe sur laquelle le corps pirouette; cette supposition n'apportera d'autre changement dans le calcul, pour le plan horizontal fixe, qu'en ce que $ddq$ ne sera pas $= 0$, mais $= -ds$ tang. $\omega$; & en ce que la force horizontale, combinée avec la verticale, doit produire une force perpendiculaire au plan incliné, enforte que $\int\frac{G\theta^2 dds}{2adt^2}+\int\frac{G\theta^2 ddu}{2adt^2}$, au lieu d'être nulle, doit être $\int\frac{G\theta^2 dd\pi}{2adt^2}+\frac{\int G\theta^2 ddq - Mp}{2adt^2}$ en raison de sin. $\omega$ à cos. $\omega$, & que $\frac{Mp\times 2a}{\theta^2}$ soit $> \int\frac{(Gdd\pi+Gddq)}{dt^2}$ (art. 19). On fera donc pour le cas dont il s'agit $\gamma = 0$, $\varphi = 0$, & au lieu de $ddq$, on mettra $-dds$ tang. $\omega$ dans les équations de l'art. 3; mais dans ce cas, la quatriéme & la cinquiéme équation renfermeroient encore sin. $e$ & cos. $e$, & seroient par conséquent plus difficiles à intégrer que dans le cas du plan horizontal.

23. Je n'en dirai pas davantage sur ce sujet, laissant à d'autres à pousser cette analyse plus loin, ainsi que celle du cas où l'on auroit égard au frottement. Je me contenterai de remarquer, que dans le cas où la pointe du

corps ſeroit ſuppoſée fixement attachée, on peut trouver le mouvement du corps, comme nous venons de le faire voir, en le rapportant à un plan horizontal; que l'intégration des équations ſeroit plus difficile en rapportant le mouvement à un plan incliné; que néanmoins ces équations ont évidemment une intégrale poſſible, puiſqu'ayant trouvé en équations finies le mouvement du corps par rapport à un plan horizontal, il eſt aiſé d'en déduire ce mouvement, auſſi en équations finies, par rapport à un plan incliné. Comparant donc avec attention les équations différentielles dans le cas où le mouvement eſt rapporté à un plan horizontal, & dans celui où il eſt rapporté au plan incliné, & les équations finies par leſquelles le mouvement eſt repréſenté dans les deux cas, on parviendroit, ce me ſemble, à trouver les préparations qu'il y auroit à faire à l'équation différentielle dans le cas du plan incliné, pour pouvoir en trouver directement l'intégrale. Cette eſpéce de méthode indirecte pour parvenir à l'intégration d'une équation, pourroit être utile en beaucoup d'autres cas, & ſerviroit peut-être à perfectionner les méthodes de calcul intégral, ſur-tout par rapport au problême dont il s'agit. Mais en voilà aſſez ſur cet article, qui me paroît digne de l'attention des Géometres. Je reviens à mon ſujet.

24. Lorſqu'un corps, ſuppoſé peſant ou non, pirouette par un de ſes points, fixement attaché ſur un plan horizontal, on peut employer une méthode aſſez ſimple pour trouver ſon mouvement. On n'a qu'à ſuppoſer de l'autre

côté du plan un corps abſolument ſemblable, animé par des forces parallèles à celles du corps donné, & en ſens oppoſé. On verra aiſément, 1°. que ces deux corps ſe mouvront comme s'ils n'en faiſoient qu'un, enſorte que leur axe commun ſera toujours une ligne droite ; 2°. que le point fixe ſur lequel ils pirouettent ſera le centre de gravité commun ; 3°. qu'au lieu d'appliquer aux deux corps des forces égales, parallèles, & en ſens contraire, il ſuffit d'en appliquer une double à un ſeul des deux corps. Par-là le problême d'un corps qui pirouette ſur un point fixe, ſe réduit à celui d'un corps qui pirouette ſur ſon centre de gravité fixement attaché.

25. A l'occaſion de ces recherches, & de celles qui ſont expoſées dans le ſecond, le XXI^e & le XXII^e Mémoires, je dirai un mot ici ſur les loix du mouvement de deux corps de figure quelconque qui ſe choquent. J'ai donné dans ma *Dynamique* (1^re *Edit.* art. 138, & ſeconde *Edit.* art. 169) les moyens de déterminer ce mouvement ; mais il eſt vrai que dans cet Ouvrage, j'ai regardé les corps choquans comme des figures planes ſituées dans un même plan. Ayant depuis donné les loix de l'équilibre pour les forces qui ne ſont pas dans un même plan, & les loix du mouvement d'un corps ſolide de figure quelconque, les loix du choc des corps ſolides de figure quelconque ne doivent plus avoir aucune difficulté ; car tout ſe réduit à faire enſorte, 1°. que la vîteſſe du point touchant à l'inſtant du choc, ſoit après le choc la même dans les deux corps, & dirigée dans le même ſens,

étant eſtimée ſuivant la perpendiculaire à l'endroit du contact ; 2°. que les forces détruites ſe réduiſent dans chaque corps à deux forces égales & contraires, dirigées ſuivant la même perpendiculaire, & paſſant par le point de contact. Or il eſt aiſé de ſatisfaire à ces deux conditions, & de trouver les équations qui les rempliſſent. Nous avons même donné dans le trente-ſeptiéme Mémoire, art. 42 & ſuiv. à l'occaſion du problême de la *Préceſſion des Equinoxes*, des calculs analogues à ceux qu'il faut faire pour remplir le ſecond des deux objets dont il s'agit ici, celui de l'équilibre des forces. On voit aiſément par ce détail que la queſtion des loix du choc des corps de figure quelconque ſe réduit à des équations faciles à trouver. Je fais cette remarque pour répondre au reproche que m'a fait un ſavant Géometre Italien, de n'avoir point donné les loix du choc de ces corps dans ma *Dynamique* ; il eſt évident, en effet, que les principes établis dans ma *Dynamique*, & dans l'Ouvrage ſur la *Préceſſion des Equinoxes*, renferment abſolument tout ce qui eſt néceſſaire pour réſoudre le problême dont il eſt queſtion, & que le reſte n'eſt plus abſolument qu'une affaire de détail & de calcul.

26. Je terminerai cet article par la réponſe à une objection qu'on m'a faite contre la propoſition énoncée dans l'art. 80 de mon Vingt-uniéme Mémoire, ſavoir qu'il y a d'autres corps ſolides que la ſphere qui peuvent avoir pour axe de rotation toute ligne paſſant par leur centre de gravité. Les propoſitions ſur leſquelles cette

assertion est appuyée, & qu'on peut voir dans le même Mémoire, art. 72 & suivans, ne sont vraies, m'a-t-on dit, qu'à peu près, c'est-à-dire en n'ayant point d'égard aux quantités du second ordre & des ordres suivans, qu'on néglige dans le calcul. Or si les forces qui résultent de la rotation du corps ne se détruisent pas entiérement & rigoureusement, les forces restantes, quelque petites qu'elles soient, doivent nécessairement produire quelque changement dans l'axe de rotation & dans la vîtesse.

27. Je conviens que les équations que j'ai trouvées, art 77 & suiv. du Mémoire cité, ne sont vraies qu'à peu près, & que la proposition de l'art. 80 ne peut avoir lieu qu'en les supposant rigoureusement exactes; mais il me semble que l'essai de calcul que j'ai donné sur les équations en question, fait voir qu'on peut les rendre aussi exactes qu'on voudra, & qu'il y a par conséquent un solide qui doit avoir rigoureusement la condition dont il s'agit; solide dont les dimensions doivent différer très-peu de celles que j'assigne, & duquel on approchera d'autant plus, qu'on poussera l'approximation plus loin. En effet, les conditions de $\int G u = 0$, & $\int G \pi \pi = \int G uu$, donnent des équations dans lesquelles faisant $A = 180°$, & $B = 360°$, il n'y a plus absolument que les coefficiens constans & indéterminés $B, C, D, E$, &c.; & ces équations que je n'ai résolues que par approximation, en négligeant les quarrés de $\alpha$ & les puissances plus hautes, peuvent être résolues exactement en ayant égard à ces

petites quantités, la valeur de $\alpha$ étant toujours arbitraire, mais très-petite; par-là on aura des valeurs de $B, C, D, E$, absolument exactes, & très-peu différentes de celles que j'ai assignées. J'ai fait ci-dessus une remarque à peu près semblable dans le Trentiéme Mémoire, art. 86, sur un problême dont la solution seroit susceptible d'une difficulté de même genre que celle-ci.

## §. IV.

*Sur le mouvement des ressorts; addition pour le Trente-sixiéme Mémoire*, §. I, art. 8, p. 222 de ce Volume.

1. Nous avons remarqué dans cet article, que quand la force du ressort est $\alpha x + \zeta x^3$, il peut très-bien se faire que le temps d'une vibration totale ne soit pas sensiblement constant, comme il l'est, quand la force est $\alpha x + \zeta x^2$. Si au lieu de supposer la force égale à $\alpha x + \zeta x^3$, on la supposoit $\alpha x + \zeta x^n$, $n$ étant $> 1$, & tel que $(-x)^n$ ne fût pas imaginaire (c'est-à-dire, tel que $n = \frac{p}{q}$, $p$ & $q$ étant des nombres positifs, & $q$ n'étant pas un nombre pair) il deviendroit encore bien plus difficile de déterminer la vîtesse du corps, & par conséquent de s'assurer si le temps d'une très-petite vibration totale est sensiblement constant. Or comme on ne peut être assuré que la force d'un ressort peu comprimé soit $\alpha x + \zeta x^2$ plutôt que $\alpha x + \zeta x^n$, on ne peut donc être assuré non plus par la théorie, que le temps d'une vibration totale, très-petite, soit sensiblement constant. Ce qui confirme plei-

nement ce que nous avons avancé dans l'art. 3 du §. I du XXXVI^e Mémoire, ſur l'impoſſibilité de démontrer, par la théorie, que les petites vibrations d'un reſſort, quand ce reſſort eſt peu comprimé, & par conſéquent dans un centre d'équilibre *oiſif*, ſont ſenſiblement iſochrones.

2. Il n'en eſt pas de même quand le reſſort eſt dans un centre d'équilibre *forcé*; car alors il n'eſt pas difficile de démontrer que l'expreſſion de la force accélératrice eſt réellement de la forme $\alpha x + \mathfrak{C} x^2$ à très-peu près. D'où il s'enſuit que le temps d'une vibration totale, ſuppoſée très-petite, eſt ſenſiblement conſtant, comme il réſulte de l'art. 7 du §. cité. La raiſon pour laquelle la force accélératrice eſt alors ſenſiblement $\alpha x + \mathfrak{C} x^2$, c'eſt qu'en un *point indéterminé* de la courbe dont les ordonnées expriment la force du reſſort, la différence de deux ordonnées voiſines eſt à peu près (comme dans toute courbe en général) $\alpha x + \mathfrak{C} x^2$, $x$ marquant la diſtance de ces ordonnées; au lieu qu'*à l'origine* de la courbe, la différence peut être $\alpha x + \mathfrak{C} x^n$, $n$ n'étant pas égale à 2.

## §. V.

*Sur des problêmes de calcul intégral. Addition pour le XXV^e Mémoire*, Tome IV des *Opuſcules*.

1. A la fin du ſecond alinea, p. 227, après ces mots, *tout le reſte étant d'ailleurs ſuppoſé le même*, ajoutez;

Ces trois valeurs différentes de $A, B, \omega$, doivent être d'autant plus remarquées, que ſi on n'avoit que deux

deux différentielles données & deux inconnues ſeulement $A$ & $B$, on ne trouveroit, par les méthodes que nous avons données ailleurs, qu'une ſeule valeur pour $A$, & une ſeule pour $B$; une différentielle de plus, ainſi qu'une inconnue $\omega$, donne beaucoup plus de ſolutions, puiſque le nombre des valeurs de $A, B, \omega$, eſt du moins égal au nombre des différentielles propoſées, & des inconnues qu'on cherche. Je dis *du moins égal*; car comme il y a ici quatre valeurs de $E$, & par conſéquent de $D$, & que toutes les combinaiſons *poſſibles* de quatre quantités $a, b, c, d$, priſes trois à trois, ſont *en tout* au nombre de quatre, ſavoir $a, b, c$; $a, b, d$; $a, c, d$; $b, c, d$; il eſt viſible que les inconnues $A, B, \omega$, ont non-ſeulement trois valeurs différentes poſſibles, mais même quatre valeurs; c'eſt-à-dire, dans le cas préſent, une de plus qu'il n'y a de différentielles propoſées, & d'inconnues qu'on cherche.

2. Au reſte, la méthode que nous avons donnée pour trouver les valeurs de $A, B, \omega$, lorſqu'il y a trois différentielles, peut être appliquée à tant de différentielles qu'on voudra, renfermant des fonctions inconnues $A$, $B$, $\omega$, $\pi$ &c. de $x$ & de $t$; & ſi l'équation finale qu'il faut réſoudre eſt du degré $n$, le nombre des valeurs de $A, B$, $\omega$ &c. ſera égal au nombre de fois que $n$ quantités peuvent être combinées, étant priſes $n-1$ à $n-1$, c'eſt-à-dire, ſera égal au nombre $n$.

3. Il paroît auſſi qu'on peut appliquer la même méthode au cas où il y auroit plus de deux indéterminées $x$,

1. Mais en voilà assez pour mettre sur la voie ceux qui voudront pousser ces recherches plus loin.

4. Dans le Supplément à ce XXVI^e Mémoire, & dans le XXXVI^e Mémoire ci-dessus, §. IV, j'ai donné quelques formules réductibles aux arcs de sections coniques. En voici une qui mérite d'y être ajoutée. Soit proposée $\frac{A x^m dx}{\sqrt{(\gamma + \delta x x)}} \times [\theta + \alpha x + \mathfrak{C}\sqrt{(\gamma + \delta x x)}]^{\frac{n}{2}}$, $m$ étant un nombre entier positif, $n$ un nombre entier positif ou négatif, & $\theta$, $\alpha$, $\mathfrak{C}$, $\gamma$, $\delta$ des constantes quelconques données; je dis que cette différentielle est toujours réductible à des arcs de sections coniques. En effet, soit supposé $\alpha x + \mathfrak{C}\sqrt{(\gamma + \delta x x)} = z$, on aura $x = \frac{\alpha z}{\alpha^2 - \mathfrak{C}^2\delta} \mp \frac{\sqrt{(\mathfrak{C}^2\alpha^2\gamma - \mathfrak{C}^4\gamma\delta + \mathfrak{C}^2\delta z^2)}}{\alpha^2 - \mathfrak{C}^2\delta}$; $\sqrt{(\gamma + \delta x x)} = \frac{z - \alpha x}{\mathfrak{C}}$ $= \frac{1}{\mathfrak{C}} \times \left[\frac{\mathfrak{C}\mathfrak{C}\delta z \mp \alpha\sqrt{(\mathfrak{C}^2\alpha^2\gamma - \mathfrak{C}^4\gamma\delta + \mathfrak{C}^2\delta z^2)}}{\alpha^2 - \mathfrak{C}^2\delta}\right]$, & par conséquent $\frac{dx}{\sqrt{(\gamma + \delta x x)}} = \mp \frac{\mathfrak{C}\, dz}{\sqrt{(\mathfrak{C}^2\alpha^2\gamma - \mathfrak{C}^4\gamma\delta + \mathfrak{C}^2\delta z^2)}}$. Donc la proposée se réduira à $\mp \frac{A\mathfrak{C}\, dz}{\sqrt{(\mathfrak{C}^2\alpha^2\gamma - \mathfrak{C}^4\gamma\delta + \mathfrak{C}^2\delta z^2)}} \times (\theta + z)^{\frac{n}{2}} \times x^m$. Donc, en mettant pour $x$ sa valeur en $z$, & réduisant, il est aisé de voir que dans certains termes, le radical $\sqrt{(\mathfrak{C}^2\alpha^2\gamma - \mathfrak{C}^4\gamma\delta + \mathfrak{C}^2\delta z^2)}$ disparoîtra, ce qui réduira ces termes à la forme très-simple & intégrable $B z^r dz (\theta + z)^{\frac{n}{2}}$, $r$ étant un entier positif, & que les plus composés des autres termes se réduiront

à la forme $\frac{C d z . z^{s} (\theta + z)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{(C^2 a^2 \gamma - C^4 \gamma \delta + C^2 \delta z^2)}}$, $s$ étant auſſi un entier poſitif. Donc faiſant $\theta + z = u$, ces différens termes ſe réduiront à la forme $\frac{D u^{\pm \frac{s}{2}} du}{\sqrt{(E + Fu + Gu^2)}}$, qui dépend, comme je l'ai fait voir ailleurs, de la rectification des ſections coniques.

5. On réduiroit de même, & par les mêmes raiſons, à des arcs de ſections coniques, la différentielle $\frac{A x^m dx}{\sqrt{(\gamma + \delta x x)}} \times (\gamma + \delta x x)^{\frac{l}{2}} [\theta + \alpha x + C\sqrt{(\gamma + \delta x x)}]^{\frac{n}{2}}$, $l$ étant un nombre entier poſitif, & le reſte comme ci-deſſus.

6. Et ſi au lieu de $\gamma + \delta x x$, on avoit $\gamma + \varepsilon x + \delta x x$, on verroit très-facilement, en faiſant évanouir le terme $\varepsilon x$, que l'intégration dépendroit toujours de la rectification des ſections coniques.

7. Si on ſuppoſoit que l'une des deux valeurs de $x$ ou de $\sqrt{(\gamma + \delta x x)}$, multipliée par l'autre, donnât une quantité conſtante, il ſeroit encore aiſé de voir, par les méthodes que j'ai données ailleurs, que $m$ ou $l$ pourroient être des nombres entiers négatifs, ſans que l'intégration devînt plus difficile. Il en ſeroit de même, ſi ce produit étoit un radical qui fût en raiſon conſtante avec $\sqrt{(C^2 a^2 \gamma - C^4 \gamma \delta + C^2 \delta z^2)}$. Mais en voilà aſſez ſur cette recherche, que je laiſſe à d'autres à pouſſer plus loin. Je me contenterai d'obſerver encore, 1°. que ſi dans la différentielle propoſée, il y avoit ſimplement $dx$ au lieu

de $\frac{dx}{\sqrt{(\gamma+\delta xx)}}$, elle seroit encore réductible à des arcs de sections coniques ; pour le voir, il ne faut qu'écrire $\frac{dx}{\sqrt{(\gamma+\delta xx)}} \times \sqrt{(\gamma+\delta xx)}$ au lieu de $dx$, & faire ensuite les mêmes transformations & opérations que ci-dessus. 2°. Par la même raison, la différentielle seroit encore réductible à de tels arcs, si au lieu de $\frac{dx}{\sqrt{(\gamma+\delta xx)}}$, on avoit $dx(\gamma+\delta xx)^{\frac{s}{2}}$, $s$ étant un nombre entier positif & impair ; car il n'y a qu'à changer cette quantité en $\frac{dx}{\sqrt{(\gamma+\delta xx)}} \times (\gamma+\delta xx)^{\frac{s+1}{2}}$, & achever le reste du calcul comme dans les cas précédens. 3°. Enfin, si les différentielles précédentes étoient encore multipliées par tant de quantités $[\varphi+\sigma x+\mu x\sqrt{(\gamma+\delta xx)}]^{t}$ qu'on voudra, $\varphi$, $\sigma$, $\mu$ étant des constantes quelconques, & $t$ un nombre entier positif, il est facile de prouver qu'elles se réduiroient de même à des arcs de sections coniques, par des opérations analogues aux précédentes.

## §. VI.

### *Sur les calculs relatifs à l'inoculation ; addition au Vingt-septième Mémoire.*

1. Je viens de lire dans les Mémoires de l'Académie de 1765, pag. 512 & suivantes, la réponse qu'on essaye de faire à ma principale objection sur la maniere dont on avoit calculé avant moi les avantages de l'inocula-

tion. J'ai démontré, ſi je ne me trompe, que le rapport des deux riſques ne ſauroit être apprétié, ſi on a égard à cette conſidération très-eſſentielle, que celui qui ſe fait inoculer riſque de mourir DEMAIN, & que le temps du riſque, pour l'expectant, eſt incertain & inconnu. On croit répondre à cette objection, en ſuppoſant de 10 à 1 le rapport des deux riſques, qu'on avoit évalué de 50 à 1 en n'ayant point égard à la conſidération importante dont il s'agit. Ma réponſe eſt que cette conſidération eſſentielle & inaprétiable met un ſi grand poids dans la balance, qu'on ne peut plus aſſigner avec certitude aucun rapport entre les deux riſques, ni ſe flatter d'avoir démontré que l'un eſt plus grand que l'autre. La preuve de cette aſſertion ſe trouve dans mon onziéme Mémoire, Tome II de mes *Opuſcules*, & dans le Tome V de mes *Mélanges de Philoſophie*, pag. 337 & ſuiv., 355 & ſuiv., 361 & ſuiv. L'objection que j'ai faite n'eſt donc point, comme on le dit agréablement, *une victime que j'ai parée pour la ſacrifier*; car dans la ſuppoſition faite par mon adverſaire, *qu'on peut mourir de l'inoculation*, l'objection conſerve toute ſa force; elle ne la perd que dans le cas où l'inoculation ne ſeroit nullement dangereuſe, comme le croyent beaucoup d'Inoculateurs, qui de leur propre aveu, *n'inoculeroient de leur vie*, s'il leur mouroit un ſeul malade. Voyez ſur cela le Tome V de mes *Mélanges*, pag. 387 & ſuiv. En un mot, je le répéte, l'inoculé ſe trouve, d'après la ſuppoſition dont il s'agit, dans le cas d'un joueur qui s'expoſe volontairement au

riſque de perdre tout ſon bien DANS LA JOURNÉE, & l'expectant dans le cas d'un joueur qui peut, à la vérité, courir *un jour* un riſque beaucoup plus grand, mais qui ignore quand il y ſera expoſé, & qui pourra même ne l'être jamais. Or je demande quel eſt le rapport des deux riſques, quel Mathématicien ſe croira aſſez habile pour les apprétier, & pour démontrer que le premier eſt moindre que le ſecond ?

2. Toutes ces conſidérations, en aſſurant la ſolidité de mon objection, n'empêchent pas que je n'aye eu raiſon de regarder l'inoculation comme une pratique utile; 1°. parce qu'il eſt encore très-douteux, je ne dis pas ſeulement qu'on en meure, mais qu'on puiſſe en mourir, quand elle ſera donnée avec les précautions convenables; 2°. parce qu'il y a du moins tout lieu de croire qu'on peut la perfectionner au point qu'on n'en mourra jamais; 3°. (& c'eſt ici la raiſon eſſentielle), parce que dans la ſuppoſition même qu'un petit nombre de citoyens en meure, l'Etat y gagnera toujours; 4°. parce que dans cette même ſuppoſition, comme le riſque eſt fort petit, (quoique *préſent*) on ne doit point blâmer, on peut même approuver *en général* ceux qui s'expoſeroient à courir ce riſque, quand on n'oſeroit pas prendre ſur ſoi de leur en donner le conſeil *à chacun en particulier*: par la raiſon qu'il ne faut point détourner les citoyens d'une opération qui doit ſauver la vie du plus grand nombre, quand même on n'oſeroit en donner le conſeil à aucun particulier, parce qu'il pourroit abſolument, *& dès le lendemain*, en être la victime.

## §. VII.

*Sur la maniere d'exprimer certaines fonctions ; addition au Vingt-huitiéme Mémoire*, Tom. IV, p. 345.

1. On m'a objecté qu'il eſt poſſible de réduire $y^{\frac{2}{3}}$ à cette forme $\alpha + \beta \text{ cof. } 2y + \gamma \text{ cof. } 4y$ &c., par la raiſon que $y = \text{ſin. } y + a \text{ ſin. } y^3 + b \text{ ſin. } y^5$ &c. ſin. $y(a' + b' \text{ cof. } 2y + c' \text{ cof. } 4y$ &c.); d'où $y^2 = \left(\frac{1 - \text{cof. } 2y}{2}\right) \times (a'' + b'' \text{ cof. } 2y + c'' \text{ cof. } 4y$ &c.) & $y^{\frac{2}{3}} = a''' + b''' \text{ cof. } 2y + c''' \text{ cof. } 4y$ &c.

2. Ma réponſe eſt que cette réduction de $y^{\frac{2}{3}}$ en ſerie, donne, ce me ſemble, une valeur peu exacte, par la raiſon, qu'en différentiant ces deux valeurs, ſuppoſées égales, de $y^{\frac{2}{3}}$, & diviſant par $dy$, la premiere valeur $y^{\frac{2}{3}}$ devient $\frac{2}{3} y^{\frac{-1}{3}} = \infty$, & l'autre $= b''' \text{ ſin. } 2y + c''' \text{ ſin. } 4y$ &c. $= 0$. D'ailleurs on prouveroit de même, que ſin. $y$ ſe réduiroit à $a' + b' \text{ cof. } 2y + c' \text{ cof. } 4y$ &c. par la raiſon que ſin. $y$ eſt égal à $\sqrt[2]{(\text{ſin. } y^2)}$ pris poſitivement, c'eſt-à-dire à la valeur poſitive de $\sqrt{\left(\frac{1 - \text{cof. } 2y}{2}\right)} = a' + b' \text{ cof. } 2y + c' \text{ cof. } 4y$ &c. Or il eſt évident que cette valeur eſt fautive, non-ſeulement parce que $\frac{d \text{ ſin. } y}{dy} = 1$ lorſque $y = 0$, & que $d\left(\frac{a' + b \text{ cof. } 2y}{dy}, \text{ &c.}\right) = 0$ lorſque $y = 0$ ; mais encore parce que l'équation

$z = \text{sin.}\, y$ donne une courbe à branches oppoſées au-deſſus & au-deſſous de l'axe, & que $z = a' + b' \text{ cos.}\, 2y + c' \text{ cos.}\, 4y$ &c. donne au contraire une courbe dont les branches qui répondent à $y$ & à $-y$ ſont du même côté de l'axe. Ainſi, la remarque que j'ai faite dans l'endroit du Tome IV dont il s'agit ici, me paroît ſubſiſter dans toute ſa force.

## §. VIII.

*Sur un problême aſtronomique ; addition au §. IV du Vingt-huitiéme Mémoire*, art. 2 ; Tome IV des *Opuſcules*, pag. 358.

1. Il s'eſt gliſſé en cet endroit (art. 2) une légere inadvertance de calcul, qui étant corrigée, fortifie encore davantage la concluſion que ce calcul a produite. A la page 358, ligne 3, à compter d'en-bas, au lieu de 2 ſin. $(\alpha - \mathfrak{C})^2$ au dénominateur, il faut mettre 2 ſin. $(\alpha - \mathfrak{C})^3$. Cette correction donnera dans le réſultat du calcul, page 360, ligne 4, $\frac{\text{cot.}\, \delta}{\text{ſin.}\, \delta}$ au lieu de cot. $\delta$ ; d'où il eſt aiſé de voir que l'erreur produite par la méthode qu'on examine en cet endroit, devient encore plus forte, & qu'ainſi on doit apporter d'autant plus de précaution dans l'emploi de cette méthode.

2. Au reſte l'équation de la page 358, $\text{cos.}\, (\alpha - \mathfrak{C} + \sigma) = \text{cos.}\, (\alpha - \mathfrak{C}) - \sigma \text{ ſin.}\, \alpha \text{ . ſin.}\, \mathfrak{C}$, ſur laquelle tout notre calcul eſt fondé, & dont nous n'avons tiré la valeur de $\sigma$ que par approximation, peut ſe réſoudre rigoureuſement en

en cette ſorte. Soit fait pour abréger cof. $(\alpha - \mathfrak{C}) - \omega$ ſin. $\alpha$. ſin. $\mathfrak{C} = A$, $\alpha - \mathfrak{C} = \mathfrak{d}$, & ſin. $\sigma = \zeta$, on aura cof. $\mathfrak{d} \surd (1 - \zeta\zeta) - \zeta$ ſin. $\mathfrak{d} = A$, d'où l'on tire $\zeta\zeta + 2\zeta \times A$ ſin. $\mathfrak{d} =$ cof. $\mathfrak{d}^2 - A^2$, & $\zeta = -A$ ſin. $\mathfrak{d} \pm \surd (A^2$ ſin. $\mathfrak{d}^2 +$ cof. $\mathfrak{d}^2 - A^2)$. Or comme $\zeta$ eſt ici ſuppoſé une petite quantité, il ne faut prendre de ces deux valeurs de $\zeta$, que celle qui eſt repréſentée par $-A$ ſin. $\mathfrak{d} + \surd (A^2$ ſin. $\mathfrak{d}^2 +$ cof. $\mathfrak{d}^2 - A^2)$, qui ſe réduit à $\frac{\text{cof. } \mathfrak{d}^2 - A^2}{2A \text{ ſin. } \mathfrak{d}}$ à très-peu près, & qui coincide à très-peu près auſſi avec la valeur de $\sigma$ que nous avons trouvée dans l'endroit cité. A l'égard de la ſeconde valeur de $\zeta$, il eſt aiſé de voir ce qu'elle déſigne. En effet, ſuppoſons pour un moment $A =$ cof. $\mathfrak{d} =$ cof. $(\alpha - \mathfrak{C})$, on aura cof. $(\alpha - \mathfrak{C} + \sigma) =$ cof. $(\alpha - \mathfrak{C})$, & les deux valeurs de $\zeta$ ſeront, $\zeta = 0$, & $\zeta = -2$ cof. $\mathfrak{d}$ ſin. $\mathfrak{d} = -$ ſin. $2\mathfrak{d}$. D'où l'on voit que $\sigma$ a deux valeurs, ſavoir zero, & $-2\mathfrak{d}$ ou $-2(\alpha - \mathfrak{C})$; &, en effet, cof. $(\alpha - \mathfrak{C} - 2(\alpha - \mathfrak{C}))$ ou, ce qui eſt la même choſe, cof. $(-\alpha + \mathfrak{C})$, eſt égal à cof. $(\alpha - \mathfrak{C} + 0)$ ou cof. $(\alpha - \mathfrak{C})$. De-là il eſt aiſé de voir que cof. $(\alpha - \mathfrak{C} + \sigma)$ étant en général la même choſe que cof. $(-\alpha + \mathfrak{C} - \sigma)$ ou cof. $(\alpha - \mathfrak{C} - (2\alpha - 2\mathfrak{C} + \sigma))$, on aura, pour les deux valeurs de $\sigma$, l'une l'angle dont le ſinus eſt $-A$ ſin. $\mathfrak{d} + \surd (A^2$ ſin. $\mathfrak{d}^2 +$ cof. $\mathfrak{d}^2 - A^2)$, angle que j'appelle $\Sigma$, & l'autre un angle $= -2\alpha + 2\mathfrak{C} - \Sigma$ ou $-2\mathfrak{d} - \Sigma$, & dont le ſinus ſera $-A$ ſin. $\mathfrak{d} - \surd (A^2$ ſin. $\mathfrak{d}^2 +$ cof. $\mathfrak{d}^2 - A^2)$. Les deux ſinus ajoutés enſemble, donnent $-2A$ ſin. $\mathfrak{d}$,

qui devient $-2\,\text{cof.}\,\delta\,\text{fin.}\,\delta$ ou $-\text{fin.}\,2\,\delta$, lorſque $\Sigma = 0$.

3. Si on avoit pris pour inconnu le coſinus de l'angle $\sigma$, que j'appelle $z'$, on auroit trouvé $z' = A\,\text{cof.}\,\delta \pm V(A^2\,\text{cof.}\,\delta^2 + \text{ſin.}\,\delta^2 - A^2)$, & il n'eſt pas difficile de voir que $V(A^2\,\text{cof.}\,\delta^2 + \text{ſin.}\,\delta^2 - A^2)$ eſt égal à $\frac{\text{ſin.}\,\delta\,V(A^2\,\text{ſin.}\,\delta^2 + \text{cof.}\,\delta^2 - A^2)}{\text{cof.}\,\delta}$, puiſque $A^2\,\text{cof.}\,\delta^2 + \text{ſin.}\,\delta^2 - A^2 = \frac{A^2\,\text{cof.}\,\delta^4 + \text{ſin.}\,\delta^2\,\text{cof.}\,\delta^2 - A^2\,\text{cof.}\,\delta^2}{\text{cof.}\,\delta^2} = \frac{A^2\,\text{ſin.}\,\delta^4 + \text{ſin.}\,\delta^2\,\text{cof.}\,\delta^2 - A^2\,\text{ſin.}\,\delta^2}{\text{cof.}\,\delta^2}$, dont la racine eſt égale à $\frac{\text{ſin.}\,\delta\,V(A^2\,\text{ſin.}\,\delta^2 + \text{cof.}\,\delta^2 - A^2)}{\text{cof.}\,\delta}$; d'où il s'enſuit que $\text{cof.}\,\Sigma$ ou $z' = A\,\text{cof.}\,\delta \mp \frac{\text{ſin.}\,\delta}{\text{cof.}\,\delta} \times V(A^2\,\text{ſin.}\,\delta^2 + \text{cof.}\,\delta^2 - A^2)$; & que $\text{ſin.}\,(-2\,\delta - \Sigma)$ ou $\text{ſin.}\,(-2\,\delta\,\text{cof.}\,\Sigma - \text{cof.}\,2\,\delta\,\text{ſin.}\,\Sigma) = \text{ſin.}\,(-2\,\delta) \times [A\,\text{cof.}\,\delta \pm \frac{\text{ſin.}\,\delta}{\text{cof.}\,\delta} \times V(A^2\,\text{ſin.}\,\delta^2 + \text{cof.}\,\delta^2 - A^2)] - \text{cof.}\,2\,\delta \times [-A\,\text{ſin.}\,\delta \pm V(A^2\,\text{ſin.}\,\delta^2 + \text{cof.}\,\delta^2 - A^2)]$; donc à cauſe de $\text{ſin.}\,(-2\,\delta) = -2\,\text{ſin.}\,\delta\,\text{cof.}\,\delta$, & de $\text{cof.}\,2\,\delta = 2\,\text{cof.}\,\delta^2 - 1$, cette quantité ſe réduira à $-A\,\text{ſin.}\,\delta \mp V(A^2\,\text{ſin.}\,\delta^2 + \text{cof.}\,\delta^2 - A^2)$, qui eſt en effet l'autre valeur de $\text{ſin.}\,\sigma$; ce qui confirme ce qu'on a déja remarqué, que $\Sigma$ & $-2\,\delta - \Sigma$ ſont les deux valeurs de $\sigma$.

4. Au reſte, la ſolution générale & rigoureuſe que nous venons de donner pour trouver l'angle $\sigma$, peut être employée dans les cas où la diſtance $\alpha - \zeta$ du ſoleil au zenith eſt peu conſidérable, & où la ſolution que nous avons donnée, Tome IV de nos *Opuſcules*, page 358, pourroit

n'être pas ſuffiſante. C'eſt ainſi que nous avons déja remarqué ailleurs (Mém. de Berlin 1747) que les formules pour la correction du midi, trouvé par les hauteurs correſpondantes, ne ſont pas exactes dans les lieux dont la latitude eſt fort grande.

## §. IX.

### *Sur la libration de la Lune.*

1. J'ai déja traité cette matiere dans le ſecond Volume de mes *Opuſcules*, Quinziéme Mémoire; mais une conſidération qui m'a échappé, apporte beaucoup de changement au réſultat de mes calculs. J'ai remarqué à la fin de ce Mémoire, que les réſultats que j'ai donnés dans les Mémoires de l'Académie de 1754, ne pourroient s'appliquer à la lune ſi le temps de ſa rotation étoit égal à celui de la révolution annuelle apparente de la terre autour du ſoleil; & je n'ai point fait attention, ce qui étoit pourtant bien facile, que le mouvement de rotation de la lune étant ſenſiblement égal à ſon mouvement autour de la terre, il réſultoit préciſément de-là, & par les mêmes raiſons, que mon Théorême de 1754 (pag. 421 des Mémoires de l'Académie de cette année) ne pouvoit s'appliquer au mouvement de l'axe de la lune. Heureuſement il eſt facile de réparer cette omiſſion par le moyen même des formules générales que j'ai données dans ce même Mémoire. M. de la Grange, qui en a trouvé de toutes ſemblables dans l'excellente piéce qui

a remporté le prix de l'Académie en 1764, a ſuppléé ce qui manquoit à cet égard à ma théorie; & en introduiſant dans les formules générales la conſidération de l'égalité du mouvement moyen de rotation de la lune & de ſon mouvement moyen autour de la terre, il a très-ingénieuſement expliqué pourquoi la lune nous préſente toujours la même face.

2. Pour ne point trop groſſir ce Volume, je me propoſe de donner ailleurs mes recherches ſur cet objet, ainſi que ſur les mouvemens de l'axe de la lune. Je chercherai d'abord quelles doivent être les équations rigoureuſes de ces mouvemens, ſans rien négliger. Je ferai voir comment on peut expliquer de différentes manieres la libration de la lune, ſans ſuppoſer que ſon mouvement primitif de rotation autour de ſon axe, moins le mouvement de ſes points équinoxiaux, ſoit exactement & rigoureuſement égal à ſon mouvement moyen, & j'examinerai laquelle de ces différentes explications eſt la plus naturelle & la plus ſimple. Je donnerai le moyen de déterminer les librations de la lune, dans le cas même où elles ſeroient beaucoup plus grandes qu'elles ne ſont, & dans le cas auſſi où l'axe de rotation de cette planete ne ſeroit pas à peu près perpendiculaire à ſon orbite & à l'écliptique. J'examinerai l'altération que la libration pourroit recevoir, ſi l'axe de la lune s'approchoit inſenſiblement du plan de l'écliptique, comme il paroît réſulter de la théorie, au moins dans certaines hypothèſes. Je chercherai enſuite les mouvemens de l'axe

de la lune, tant en nutation qu'en préceſſion, en ſuivant d'abord la même méthode que dans mes *Recherches ſur la Préceſſion des Equinoxes*, c'eſt-à-dire en n'employant que des équations différentielles du premier ordre, & en négligeant certaines petites quantités; je déterminerai dans cette hypothèſe les mouvemens dont il s'agit, en faiſant d'abord abſtraction de la libration, mais en ſuppoſant d'ailleurs que la préceſſion des points équinoxiaux lunaires ſoit en tel rapport qu'on voudra, même d'égalité, avec le mouvement des nœuds de la lune. Je déterminerai auſſi, par des équations & des conſtructions géométriques aſſez ſimples, les cas où les mouvemens de ces points ſont égaux, & ceux où leur plus grande différence en longitude peut être = ou moindre que 360°; & j'expliquerai à cette occaſion, d'une maniere nouvelle & fort ſimple, comment il peut ſe faire que le mouvement moyen des points équinoxiaux lunaires ſoit égal au mouvement moyen des nœuds de la lune. J'examinerai, toujours dans cette même ſuppoſition, comment & dans quels cas l'axe lunaire peut ſe rapprocher inſenſiblement de l'écliptique. Je diſcuterai l'influence que peut avoir ſur le rapport des différentes inégalités le peu d'inclinaiſon de l'axe de la lune ſur ſon orbite. Je ferai voir de plus que dans l'hypothèſe même où l'on ne détermine les mouvemens dont il s'agit que par des équations différentielles du premier ordre, il peut être néceſſaire d'avoir égard à la libration pour trouver ces mouvemens avec l'exactitude requiſe,

& pour être assuré de ne point négliger des inégalités ou équations essentielles. Ensuite j'emploirai, pour déterminer ces mêmes mouvemens, la méthode rigoureuse exposée dans le Trente-septiéme Mémoire ci-dessus, & je ferai voir, 1°. comment cette méthode donne à peu près le même résultat que la précédente, si on n'a point d'égard à l'équation du centre de la lune; 2°. comment, en ayant égard à cette derniere équation, les résultats peuvent être très-différens de ceux de la premiere hypothèse; par la raison que l'équation différentielle du mouvement de l'axe étant ici du second ordre, le mouvement (supposé non uniforme) de la lune autour de la terre, y introduit des termes qui peuvent devenir beaucoup plus grands dans l'intégrale que dans la différentielle, attendu l'égalité entre le mouvement de rotation de la lune & son mouvement moyen; ces termes peuvent encore augmenter par l'impulsion primitive qu'on peut supposer donnée à l'axe, & par le rapport inconnu de $2\int G'\lambda\lambda - \int G'ff\grave{a}\int G'ff\cos.2\xi$. Tels sont les objets intéressans que je me propose de traiter, objets dont la plûpart n'ont point encore été discutés jusqu'ici, ou ne l'ont pas été suffisamment.

*Fin de la seconde Partie & du quarante-quatriéme Mémoire.*

# ERRATA

*Pour le quatriéme Volume des Opuſcules.*

PAGE 53, ligne 12, *au lieu de*, à cauſe de, *liſez* & de plus.
Page 57, art. 25; voyez ſur cet article & les ſuiv. le quarante-quatriéme Mémoire, §. III, pag. 490 & 496.
Page 127, ligne 4, *au lieu de* 1766, *mettez* 1767.
Page 339, ligne 8, *au lieu de*, en quoi conſiſte, *liſez* d'où dépend.

# FAUTES A CORRIGER

*Dans ce cinquiéme Volume des Opuſcules.*

PAGE 31 ligne derniere, *au lieu de* $-\frac{4\pi m}{m}$, *liſez* $-\frac{4\pi m}{3}$.
Page 64, ligne 3, *au lieu de* Fig. 12, *liſez* Fig. 12, n°. 2.
Page 128, à la marge, ligne 3, *au lieu de* $2cv^4t^6$, *liſez* $2ev^4t^6$.
Page 185, lignes 5 & 6, *au lieu de* $\sqrt{3}$, *liſez* $\sqrt{-3}$.
Page 216, ligne 4, à compter d'en-bas, *après ces mots*, au moins du ſecond ordre, *ajoutez*, ou d'un ordre entre le ſecond & le premier.
Page 217, ligne 15, *au lieu de*, comme on, *liſez* comme ſi l'on.
Page 222, à la fin du premier alinea, *ajoutez*. Voyez plus bas page 503.
Page 280, ligne 5, à compter d'en-bas, *au lieu de* deux forces, *liſez* à deux forces.
Page 349, art. 27, ligne 3, *au lieu de* 16, *liſez* 8.
Page 351, art. 29, ligne 3, au lieu de $lm$, liſez $im$.
Page 401, ligne 10 & 12, *au lieu de* 5000, *liſez* 500000.
Page 486, à la fin de l'art. 18, *ajoutez* ; & ſi l'on faiſoit

inégaux les rayons de la cornée & du globe de l'œil, ſuppoſés concentriques, la cornée $QRS$ ne pourroit s'appliquer au globe de l'œil $QZS$.

Page 497, lignes 2 & 3, à compter d'en-bas, *au lieu de* λ, mettez Δ.

---

# EXTRAIT DES REGISTRES

## DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES,

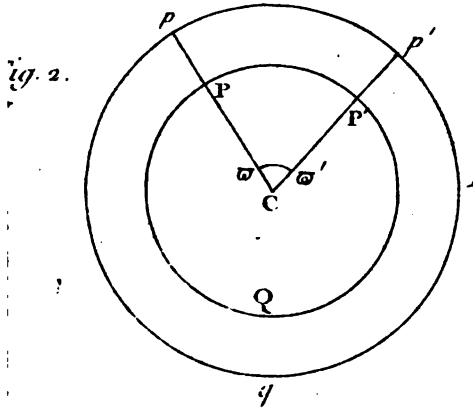
Du 17 Août 1768.

MESSIEURS LE MONNIER & BEZOUT, qui avoient été nommés pour examiner le cinquiéme Volume des Opuſcules Mathématiques de M. D'ALEMBERT, en ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris, le 17 Août 1768.

GRAND-JEAN DE FOUCHY,
*Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences.*

---

De l'Imprimerie de CHARDON, rue Galande, 1768.




ig. 2.

Fig. 3.

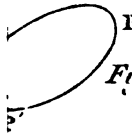



Fig. 5.

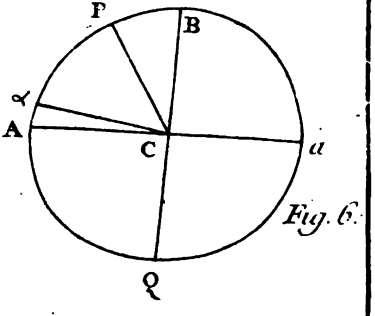
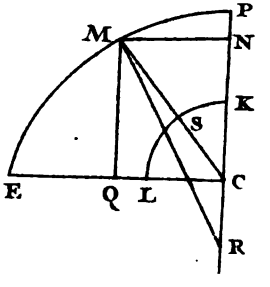



Fig. 6.

P

Fig. 8.

Fig. 9.



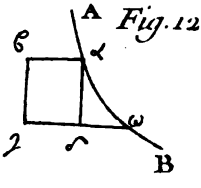
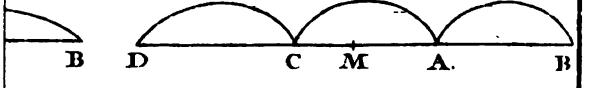




Fig. 12.

Fig. 11.




Opusc. Math. To. V. Pl. I.

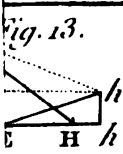



Fig. 13.

Fig. 14.

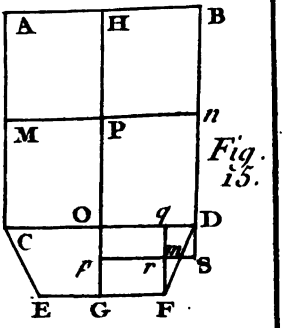



Fig. 15.

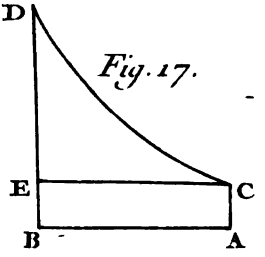



Fig. 17.

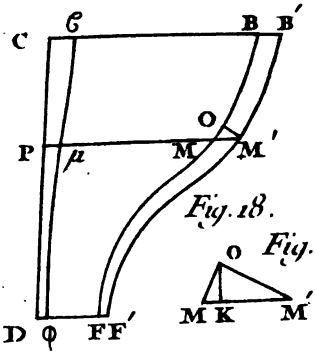



Fig. 18.

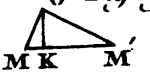



Fig. 19.

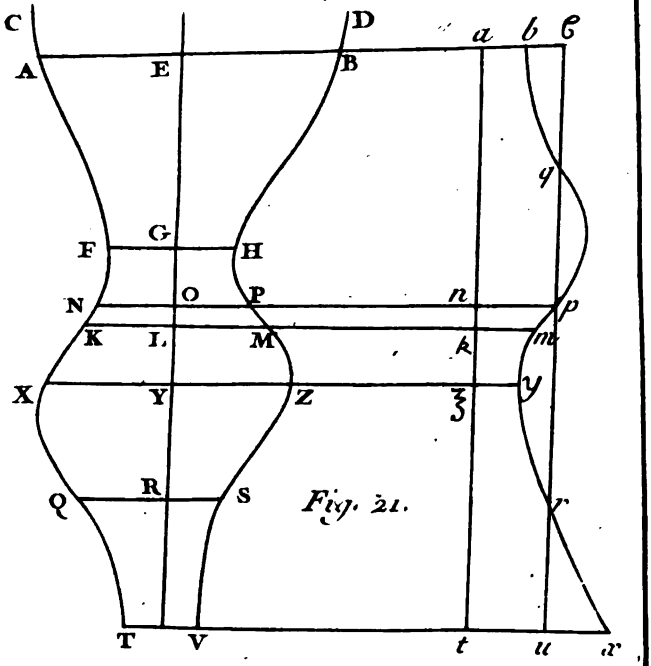



Fig. 21.

Fig. 23.

Opusc. Math. To. V. Pl. 2.

Fig. 25

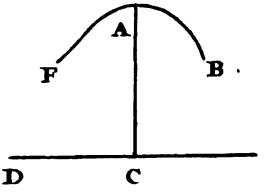



Fig. 26.

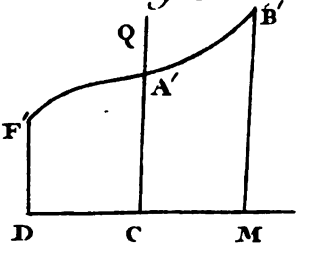



Fig. 27.

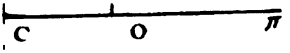



Fig. 28.

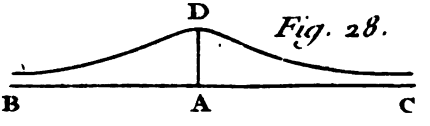
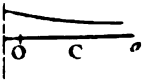



Fig. 29.



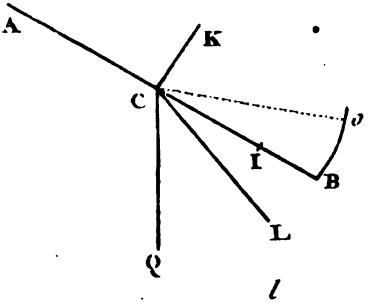




Fig. 30.

Fig. 32.

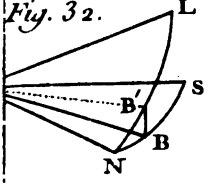



Fig. 33.

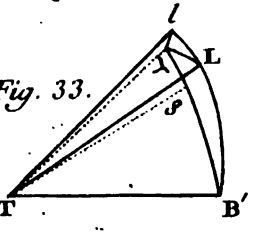
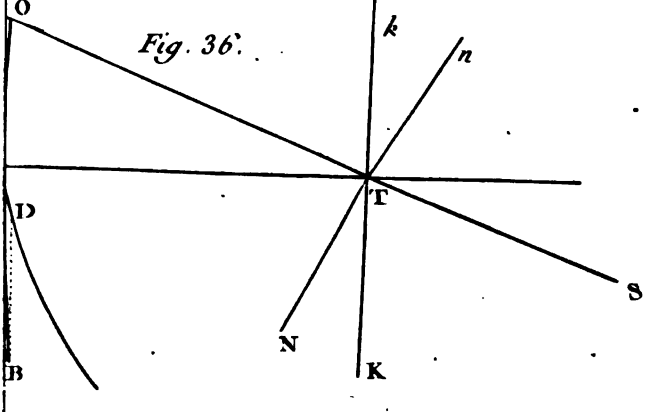



Fig. 36.



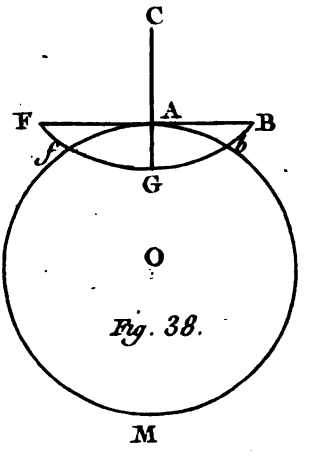



Fig. 38.

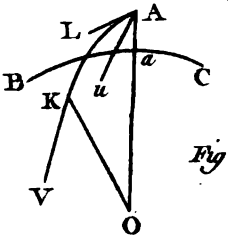



Fig. 40.

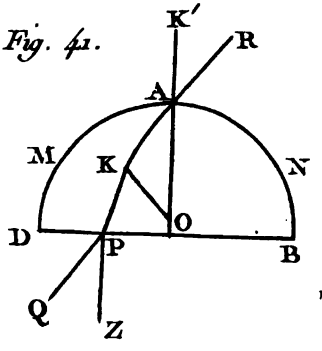



Fig. 41.

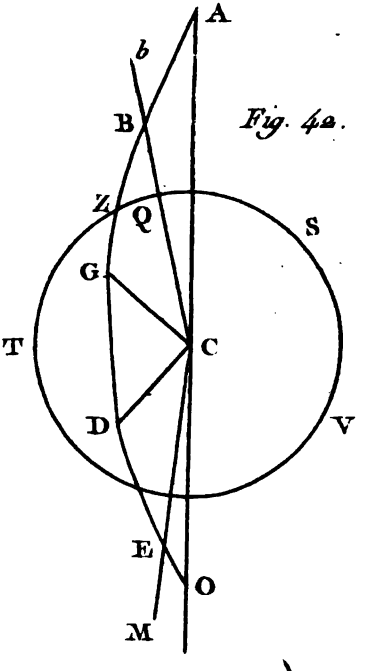



Fig. 42.

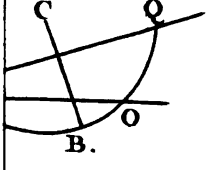



Fig. 43.

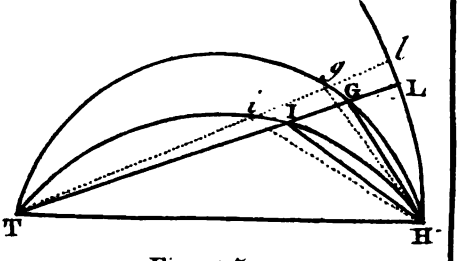



Fig. 45.

O